



CFD presenta  
**COMPRESIBLE + INCOMPRESIBLE**

**Un matrimonio por conveniencia**

por N. Nigro, M. Storti y S. Idelsohn

GTM-INTEC-CONICET, Güemes 3450  
(3000) Santa Fe - Argentina  
email: nnigro@venus.unl.edu.ar

**Resúmen**

En este trabajo se presentan una serie de resultados numéricos en fluidodinámica computacional (CFD) obtenidos mediante una versión vectorizada de un código tridimensional de elementos finitos. La principal característica de este software radica en la utilización de una formulación unificada que permite tratar fluidos newtonianos en flujo compresible e incompresible tanto viscoso como inviscido sin necesidad de recurrir a distintos tipos de elementos. [5]. Sin entrar en detalle acerca de la evolución histórica de los métodos utilizados para lograr este objetivo podemos mencionar que la formulación unificada se basa en el uso de un esquema de marcha temporal para alcanzar el estado estacionario con una matriz de masa preconditionada PMM. Este preconditionador basado en la física permite acelerar la convergencia en las zonas críticas del mapa de parámetros (Ma, Re). La implementación numérica se basa en una formulación espacial SUPG acoplada con un resolvidor iterativo implícito MATRIX-FREE GMRES.

El objetivo de este trabajo es mostrar el comportamiento de la formulación unificada en una gran variedad de ejemplos numéricos.

**Summary**

This paper presents several numerical results using a vectorized version of a 3D finite element compressible and nearly incompressible Euler and Navier-Stokes code. The assumptions were set on laminar flows and newtonian fluids. The goal of this research is to show the capabilities of the presented code to treat a wide range of problems appearing in laminar fluid dynamics towards the unification from incompressible to compressible and from inviscid to viscous flow codes. In this paper we have used a physics based preconditioner to GMRES implicit solver developed in [5] and an SUPG formulation for the semidiscretization of the spatial operator. In this paper we show the capabilities of this unified formulation by several numerical results covering a wide range of interesting problems.

**1.- Introducción**

Es muy habitual en estos tiempos buscar la resolución de grandes problemas en mecánica computacional, en particular en fluidodinámica (CFD), a través de esquemas de marcha temporal (*time marching schemes*), ya sea para problemas estacionarios como no estacionarios. Si bien la adecuación de estas técnicas está bastante difundida existen inconvenientes numéricos que continúan siendo tema de debate científico. Uno de ellos es el relacionado con la mala convergencia que experimentan estos esquemas frente a situaciones particulares como por ejemplo la resolución de problemas de flujo compresible en zonas de muy bajo número de Mach. Algunas soluciones propuestas en el pasado consistían en modificar la formulación de forma tal de poder tratar problemas cuasi-incompresibles o usar métodos de perturbaciones. Estas propuestas brindan una solución parcial al problema ya que sólo sirven para flujos globalmente cuasi-incompresibles. Por otro lado existen una gran cantidad de aplicaciones físicas de interés donde el dominio computacional se encuentra dividido en varias zonas con muy diferentes patrones fluidodinámicos,

como ser, regiones muy extensas con un flujo invíscido, flujo compresible con fuertes efectos viscosos en las inmediaciones de algunos cuerpos sumergidos y zonas donde el flujo se vuelve muy cercano al régimen incompresible debido a su baja velocidad local como por ejemplo puntos de estancamiento. Problemas como flujo a través de toberas convergentes-divergentes con una gran relación entre el diámetro de entrada o salida y el de la garganta, muy habituales en propulsión, problemas con grandes bolsones de recirculación y extensas zonas de estancamiento, problemas donde intervienen rotores con una gran relación entre el radio interior y el exterior, como los que suelen aparecer en turbomáquinas y en rotores de helicópteros, son algunos de los ejemplos más claros donde se presentan patrones fluidodinámicos tan diferentes que a priori dificultan el uso eficiente de una única formulación. Son estas dificultades las que promovieron el desarrollo de formulaciones unificadas con el fin de tratar eficientemente situaciones tan extremas. [2,3,5,7,8]. Como es bien sabido los esquemas de marcha temporal son basados en esquemas de integración temporal explícitos e implícitos, donde el tiempo de CPU necesario para resolver el problema es altamente dependiente del condicionamiento numérico del problema. Existen varios factores que promueven el mal condicionamiento del problema, todos con un carácter multiplicativo, a saber: (a) alto grado de refinamiento, (b) alta relación de aspecto en los elementos, (c) alta disparidad de las velocidades características, etc. Los dos primeros tópicos dependen fuertemente de la discretización del dominio (generación de las mallas) mientras que el tercero depende del problema físico. Técnicas como *time local stepping* permiten subsanar las dificultades asociadas con mallas altamente refinadas ya que ésta técnica equivale a deformar la escala temporal de forma tal de hacer constante el número de Courant en la malla. Los problemas relacionados con mallas con una alta relación de aspecto pueden ser parcialmente aliviados por técnicas como *direcciones alternadas* (ADI) donde se resuelve cada dirección por separado. De todos modos esta alternativa sólo es aplicable al caso de mallas estructuradas bidimensionales. El tercer tópico, tema central en este trabajo, se refiere a los problemas causados por las diferentes velocidades características en el fluido y que es bien sabido que se presentan en régimen transónico ( $M \rightarrow 1$ ), con  $M$  el número de Mach, en el caso cuasi-incompresible ( $M \rightarrow 0$ ), en zonas con fuertes efectos viscosos entre otras. Por lo tanto, el éxito de un resolutor iterativo (tanto explícito como implícito) se basa en mejorar el condicionamiento del sistema y en este trabajo se mostrará como lograrlo atacando el tercer ítem. Siguiendo una estrategia similar al caso del *time local stepping* buscamos modificar la matriz de masa del sistema de forma tal de uniformizar el número de Courant no solamente nodo a nodo sino también ecuación a ecuación. El diseño de la matriz de masa preconditionada (PMM) está sujeto a ciertas hipótesis y en general su aplicación es válida para el caso de problemas estacionarios. En este trabajo nosotros hemos adoptado un preconditionador presentado por Choi et al. [2,7] que fue deducido a partir de un método de perturbaciones e implementado como una técnica PMM y que dio muestra de ser eficiente para un amplio rango de números de Mach y Reynolds. En el trabajo original los autores han usado una formulación en volúmenes finitos y un esquema ADI para la resolución de problemas bidimensionales. [2] El aporte de este trabajo es extender su aplicación al caso de una formulación SUPG por elementos finitos, en la resolución de problemas tridimensionales y especialmente usando un resolutor implícito GMRES tipo *matrix-free* que conforma una de las combinaciones más utilizadas en el área de la fluidodinámica computacional en estos tiempos. Por lo tanto, este trabajo propone un nuevo preconditionador para el método GMRES basado en consideraciones físicas, muy promisorio por su buena convergencia para todo número de Mach y Reynolds, numericamente estable y con excelentes posibilidades para su paralelización.

## 2.- Definición del problema

Las ecuaciones de Navier-Stokes para flujo compresible modificada por la introducción del preconditionador sobre el término temporal se puede escribir como [2,5,7]:

$$\Gamma_v \frac{\partial \mathbf{Q}_v}{\partial t} + \mathbf{A} \cdot \nabla \mathbf{Q} = \mathbf{K} \nabla^2 \mathbf{Q} + \mathbf{F} \quad (1.1)$$

El preconditionador  $\Gamma_v$  introducido en el término temporal se presenta posteriormente. Hay dos variables involucradas en la definición, las variables viscosas  $\mathbf{Q}_v$  y las conservativas  $\mathbf{Q}$ , definidas como:

$$\mathbf{Q} = \{\rho; \rho u; \rho v; \rho w; \rho e\}^T ; \quad \mathbf{Q}_v = \{p; u; v; w; T\}^T \quad (1.2)$$

Las variables viscosas son necesarias para obtener un buen número de condición en el límite viscoso. Algunos detalles relacionados con esto se presentan en la sección 4.

### 3.- Formulación variacional

La formulación variacional del problema definido en (1.1) asociada al método SUPG usando variables conservativas se escribe como:

Encontrar  $Q^h \in S^h$  tal que  $\forall W^h \in \mathcal{V}^h$  [1,6]

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} W^h \cdot \left( \Gamma \frac{\partial Q^h}{\partial t} + A_i^h \frac{\partial Q^h}{\partial x_i} \right) d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\partial W^h}{\partial x_i} \cdot K_{ij} \frac{\partial Q^h}{\partial x_j} d\Omega + \\ & + \sum_{e=1}^{numel} \int_{\Omega^e} (\tau^e)^T (A_k^h)^T \frac{\partial W^h}{\partial x_k} \cdot \left\{ \Gamma \frac{\partial Q^h}{\partial t} + A_i^h \frac{\partial Q^h}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left( K_{ij} \frac{\partial Q^h}{\partial x_j} \right) - F \right\} d\Omega + \\ & + \sum_{e=1}^{numel} \int_{\Omega^e} \delta'_{shc} \frac{\partial W^h}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial Q^h}{\partial x_i} d\Omega = \int_{\Omega} W^h F d\Omega + \int_{\partial\Omega} W^h h d\partial\Omega \end{aligned} \quad (2)$$

con

$\Gamma = \Gamma_v \frac{\partial Q_x}{\partial Q}$  Para detalles de la misma, ver [5].

### 4.- Definición del preconditionador

El preconditionador introducido en (1.1) se define como:

$$\Gamma_v = \begin{pmatrix} \frac{1}{\beta M_r^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\rho}{\beta M_r^2} & \rho & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\rho v}{\beta M_r^2} & 0 & \rho & 0 & 0 \\ \frac{\rho w}{\beta M_r^2} & 0 & 0 & \rho & 0 \\ \frac{(\epsilon+p)}{\rho \beta M_r^2} - \delta & \rho u & \rho v & \rho w & \frac{\gamma p R}{\gamma - 1} \end{pmatrix} \quad (3)$$

Ver detalles en [2]. Esta clase de preconditionador ha mostrado tener convergencia uniforme para todo número de Mach y Reynolds a través de varios experimentos numéricos. La introducción de las variables viscosas le confiere cierta similitud con los métodos basado en presiones con el preconditionador manteniendo las escalas acústicas y viscosas lo mas similares que sea posible en tamaño cuando la difusión domina. Por otro lado cuando la advección domina es mejor cambiar a un método basado en densidad donde el rol del preconditionador es igualar las velocidades de la partícula con la sónica. El parámetro  $\beta$  a través de su definición permite unificar la formulación y conferirle al método una flexibilidad para acomodarse a todas las situaciones. Siguiendo la definición de Choi et.al [2] tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \beta M_r^2 &= \epsilon c^2 \quad \text{con} \quad \epsilon = \max(\epsilon_{inv}, \epsilon_{vis}) \\ \begin{cases} \epsilon_{inv} = M_r^2 \\ \epsilon_{vis} = \max_j \left[ \frac{\alpha_j(\alpha_j-1)}{(\alpha_j-1+c^2/u_j^2)} \right] \end{cases} & M_r = \begin{cases} M_{min} & M < M_{min} \\ M & M_{min} < M < 1 \\ 1 & M > 1 \end{cases} \end{aligned} \quad (4.1-5)$$

$$\alpha_j = \frac{CFL}{\sigma Re_{\Delta x_j}} \quad j = x, y, z$$

$M_r$  es un número de Mach de referencia que se usa para evitar singularidades cuando la velocidad local es nula y en este trabajo hemos usado  $M_{min} = 10^{-6}$ .  $\sigma$  representa el número de Fourier y  $Re_{\Delta x_j}$  es el número de Reynolds del elemento con  $\Delta x_j$  su longitud característica.  $\delta$  es una constante arbitraria que juega el rol de un coeficiente para la derivada temporal de la presión.

## 5. Detalles de implementación

El preconditionador afecta la definición de la matriz de tiempos intrínsecos, las condiciones absorbentes y el esquema temporal. A continuación presentamos una breve descripción de estas alteraciones.

### 5.1.- Matriz de escala de tiempos intrínsecos

Como puede verse en (2) la conjunción del método SUPG con el sistema preconditionado da origen a un par de parámetros  $\tau'$  y  $\delta'_{shc}$  que son diferentes a los correspondientes parámetros del sistema no preconditionado. En este trabajo nosotros presentamos una aproximación analítica para el cómputo de esta matriz de tiempos característicos evitando el uso de costosas rutinas de cálculo de autovalores y autovectores. Sin entrar en detalle acerca del álgebra [5] arribamos a la siguiente expresión para esta matriz:

$$\tilde{\tau} = \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{Q}_v} \tilde{\tau}_v \Gamma_v^{-1}, \quad \tilde{\tau}_v = \|\tilde{\mathbf{B}}_v\|^{-1}, \quad \tilde{\mathbf{B}}_{v,i} = \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} \tilde{\mathbf{A}}_{v,j} \quad \text{con } \tilde{\mathbf{A}}_v = \Gamma_v^{-1} \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{Q}_v} \quad (5)$$

La extensión al caso de las ecuaciones de Navier-Stokes se completa mediante la corrección de  $\tilde{\tau}$  por efectos viscosos [4]

### 5.2 Condiciones de contorno absorbentes

El operador absorbente asociado a las condiciones de contorno se define mediante la solución de un problema de autovalores sobre el jacobiano advectivo proyectado en la dirección de la normal exterior. Si observamos (1.1), vemos que para ello se requiere que la descomposición se lleve a cabo sobre el jacobiano modificado por el preconditionador en lugar del original. De esta forma es factible usar la misma estructura de cálculo para  $\tau$  que para las condiciones absorbentes.

### 5.3 Matrix-free GMRES

Todo lo visto hasta aquí es válido para la generalidad de los resolvedores. La modificación de la matriz de masa y sus influencias sobre la estabilización y las condiciones absorbentes nada tienen que ver con la elección del esquema de paso temporal usado. Una implementación explícita es directa salvo cuestiones relacionadas con la estabilidad del esquema temporal. En esta sección detallamos la aplicación del preconditionador a un resolvedor implícito tipo GMRES. Como es sabido el algoritmo GMRES necesita de un preconditionador para que pueda lograrse una aceptable velocidad de convergencia. Es muy usual en mecánica de fluidos usar o un preconditionador diagonal o uno diagonal en bloques. Estos preconditionadores funcionan como una especie de escaleo entre los grados de libertad del sistema. En nuestro caso y para evitar confusiones nosotros hemos usado un preconditionador en bloques aplicado sobre el sistema previamente preconditionado por la matriz  $\tilde{\Gamma}$ . Evitando entrar en detalles, ya que está fuera de los objetivos de este trabajo, podemos sintetizar el método diciendo que se basa en la creación de una base ortogonal en el espacio de Krylov mediante un proceso de Arnoldi en donde se plantea la minimización del residuo a través de la solución de un sistema lineal.

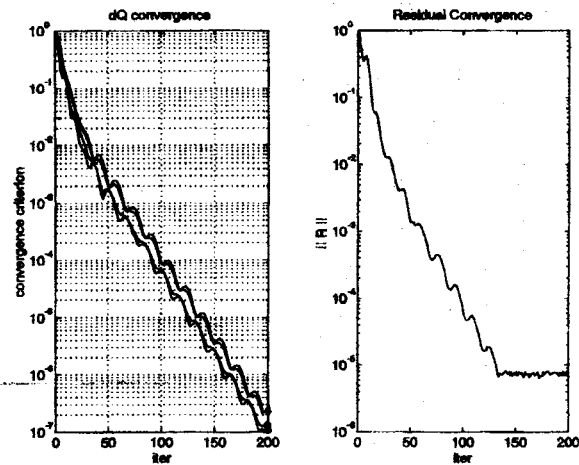


Figure 1.1 NACA0012 - Euler -  $Ma = 0.001$  - Convergence

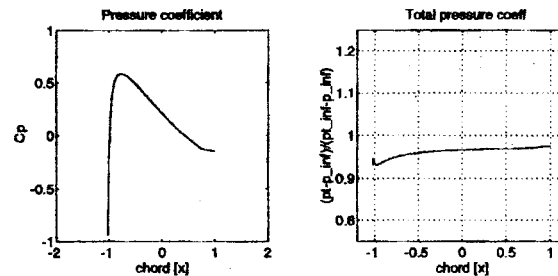


Figure 1.2 NACA0012 - Euler -  $Ma = 0.001$  - Solution

## 6.- Resultados numéricos

El objetivo de este trabajo es mostrar la efectividad del preconditionamiento presentado en (1.1) para resolver una gran variedad de problemas de mecánica de fluidos involucrando cualquier combinación de juego de parámetros representado por los números de Mach y Reynolds usando una formulación SUPG con elementos finitos y una versión matrix-free [1] del resolvidor implícito GMRES . A continuación presentamos una serie de ejemplos numéricos que sirven para validar los argumentos teóricos expuestos. Los casos a mostrar son: (1) flujo a través de un perfil NACA 0012 , (2) flujo alrededor de un cilindro circular , (3) flujo alrededor de una esfera. La grilla empleada para el caso del perfil NACA 0012 consiste en una malla tipo C con 39 nodos sobre el perfil, 20 nodos en la estela y 31 nodos en la dirección normal.

El ángulo de ataque es nulo y el tamaño de la cuerda del perfil se extiende a dos unidades mientras que los contornos computacionales se hallan a 28 unidades. Para el caso invíscido las condiciones de contorno fueron: (1) condiciones deslizantes (*slip*) sobre el perfil, (2) condición de Kutta en el borde de fuga , (3) condiciones absorbentes en el borde exterior . En el caso viscoso

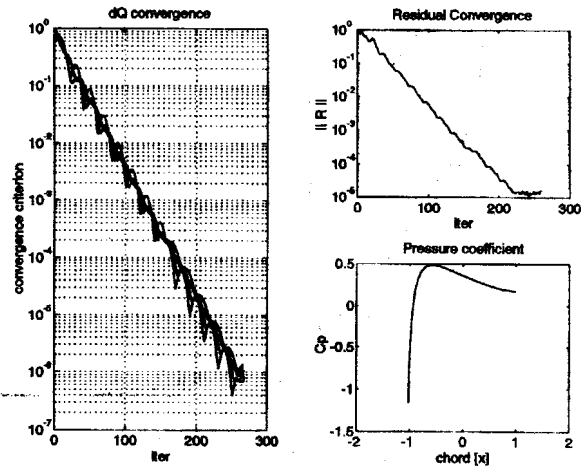


Figure 2. NACA0012 - Navier Stokes -  $Ma = 0,001$   $Re = 200$  - Convergence and Solution

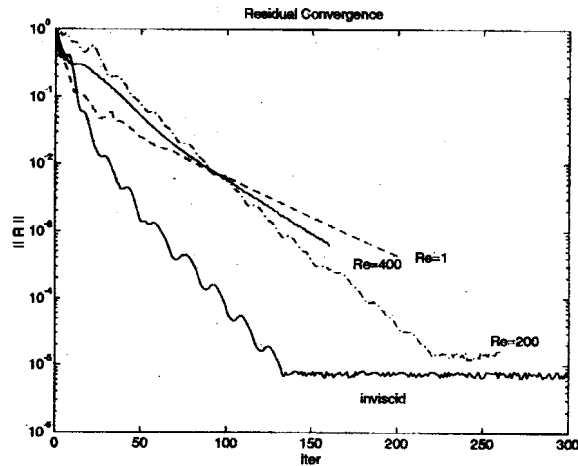


Figure 3. NACA0012 -  $Ma = 0.001$  - Convergence

las dos primeras condiciones cambian por una condición de no deslizamiento y flujo térmico nulo sobre el perfil

En el caso del cilindro circular la malla cubre el dominio completo pero repartida en dos zonas, la primera consiste de un cuadrado centrado en el cilindro y una malla tipo O con 80 nodos alrededor del cilindro y 20 nodos en la dirección radial, mientras que la segunda zona se ubica aguas abajo del cilindro y está formada por una malla tipo H de  $20 \times 20$  nodos. El diámetro del cilindro es unitario y la entrada se ubica a 9 unidades del centro del cilindro mientras que la salida se halla a 27 unidades del mismo centro.

Las condiciones de contorno usadas fueron de no deslizamiento con flujo térmico nulo sobre el perfil, todas las variables impuestas a la entrada y tracción nula con flujo térmico nulo a la salida.

Para la esfera hemos usado una malla de 19942 nodos con 15840 elementos distribuidos en un dominio computacional formado por una caja definida por  $-3 \leq x \leq 10$ ,  $-3 \leq y \leq 3$ ,  $-3 \leq z \leq 3$  con una esfera de diámetro unitario. Las condiciones de contorno fueron similares al caso del cilindro.

El costo computacional asociado con todas las operaciones que involucran al preconditionador se estima que ronda un 30% del costo inicial.

Las figuras relacionadas a la velocidad de convergencia que a continuación se presentan se organizan de la siguiente forma: sobre la izquierda se grafica el incremento de la variable de estado  $\Delta Q$  en función de las iteraciones mientras que a la derecha se hace lo propio con el residuo  $\|R\|$ .

Comenzamos mostrando los resultados de flujo inviscido alrededor del perfil NACA 0012 para un número de Mach de 0.001. La figura 1.1 muestra no solamente una buena convergencia sino también un buen condicionamiento del problema ya que todas las ecuaciones convergen con la misma tasa de convergencia (pendiente). Es importante resaltar que el problema físico tiene características que viajan con velocidades muy dispares, por ejemplo las ondas acústicas viajan aproximadamente 1000 veces más rápido que las ondas de entropía y las de vorticidad.

#### NOTA:

Los gráficos correspondientes al caso no preconditionado no se muestran ya que la solución numérica es espacialmente inestable. Este es otro de los factores que favorecen al preconditionamiento, el de no ser sólo un remedio para acelerar la convergencia sino que en algunos casos es hasta necesario para solucionar las inestabilidades asociadas con la incompresibilidad.

La figura 1.2 muestra los coeficientes de presión a la izquierda y el coeficiente de presión total a la derecha para la solución preconditionada. A pesar de utilizar una malla gruesa se obtienen valores del coeficiente de presión total cercanos a la unidad, que es la solución exacta del caso inviscido. A continuación presentamos resultados sobre el mismo perfil pero para el caso viscoso. Hemos usado un  $Ma = 0.001$  y un  $Re = 200$ .

La figura 2 muestra que las buenas propiedades de convergencia del caso inviscido no se pierden cuando aparecen efectos viscosos. Más aún la solución sigue siendo numéricamente estable en contraste con la solución no preconditionada que presenta numerosas oscilaciones.

La figura 3 muestra un resumen con algunos de los resultados en velocidad de convergencia cuando se fue variando el número de Reynolds frente al obtenido con el caso inviscido. Se observa un factor de aproximadamente dos entre el caso inviscido y el viscoso y una muy pareja performance del método para todos los números de Reynolds utilizados.

La figura 4.1 y 4.2 muestran los resultados en el caso del cilindro circular para  $Ma = 0.001$  y  $Re = 20,1$  respectivamente. Las conclusiones son similares a las anteriores salvo en el caso del Reynolds mas bajo donde la primera ecuación se satura casi inmediatamente. No obstante observando el residuo vemos que este continúa descendiendo en forma monótona.

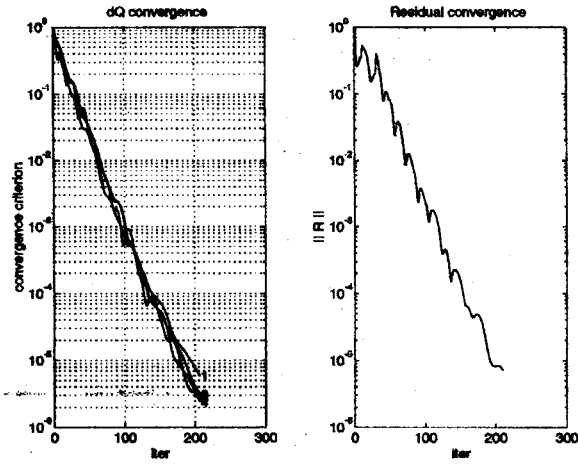


Figure 4.1 Cylinder -  $Ma = 0.001$  -  $Re = 20$  - Convergence

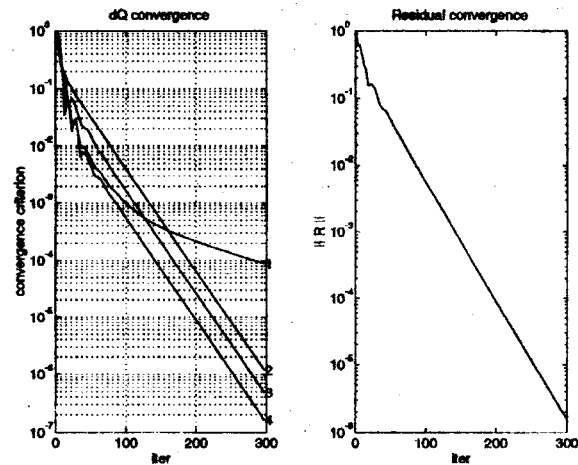


Figure 4.2 Cylinder -  $Ma = 0.001$  -  $Re = 1$  - Convergence

El último ejemplo se trata de un caso tridimensional representado por flujo alrededor de una esfera. Este ejemplo tiene solución analítica en el caso de Stokes y algunas aproximaciones asintóticas en el caso de Reynolds bajos o altos. También existe una correlación entre el número de Reynolds y la extensión o tamaño del bolsón de recirculación aguas abajo de la esfera. La figura 5.1 muestra la historia de la convergencia para el caso con  $Ma = 0.002$  y  $Re = 10$ , notándose el mismo comportamiento que los casos anteriores, mientras que la figura 5.2 muestra las líneas de corriente para este mismo ejemplo. El residuo se reduce 6 órdenes de magnitud en 100 iteraciones de GMRES con una velocidad constante. Después de 100 iteraciones los errores de redondeo dominan y la convergencia de la solución se estanca. Para este valor del número de Reynolds no existe recirculación en la zona posterior de la esfera siendo este patrón confirmado por los resultados



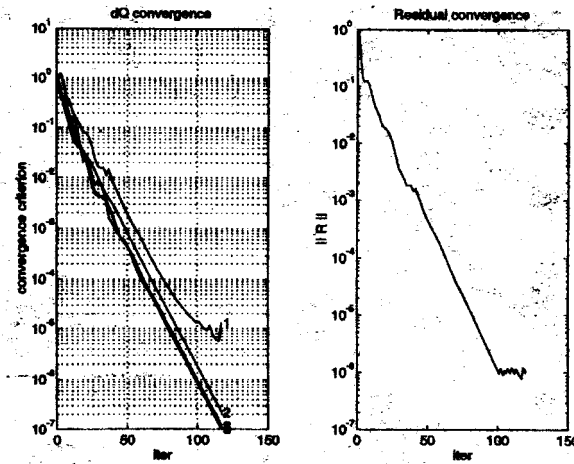


Figure 5.1 Sphere -  $Ma = 0.002$  -  $Re = 10$  - Convergence



Figure 5.2 Sphere -  $Ma = 0.002$  -  $Re = 10$  - Streamlines

mostrados en 5.2. El último ejemplo consiste de la misma esfera pero a un Reynolds de 100. La convergencia no se presenta por razones de espacio pero su comportamiento no difiere básicamente de los anteriores. La figura 6 muestra las líneas de corriente para el plano  $z = 0$  y la zona de recirculación aguas abajo de la esfera tiene una extensión de aproximadamente 3 veces el radio de la esfera contado desde el centro de la misma. Esta observación coincide con los experimentos de laboratorio de Taneda (1956) y los cálculos computacionales via métodos de expansiones de Jenson (1959). [9]

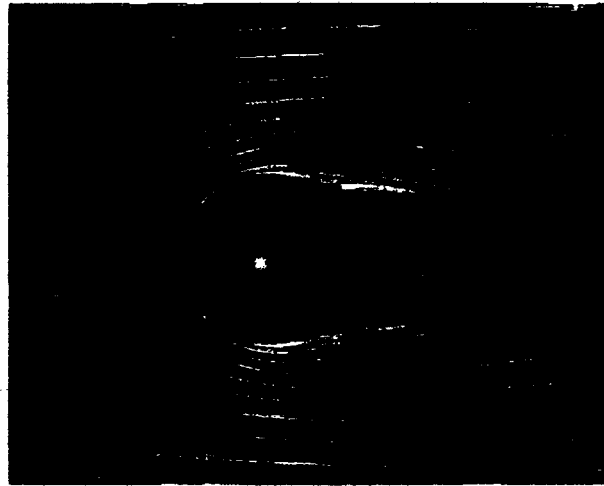


Figure 6 Sphere -  $Ma = 0.002$  -  $Re = 100$  - Streamlines

#### Referencias

1. ALIABADI, S. - Parallel finite element computations in aerospace applications. Ph.D. Thesis, Department of Aerospace Engineering and Mechanics, University of Minnesota (1994)
2. CHOI, Y. and MERKLE, C. - The application of preconditioning in viscous flows. *Journal of Computational Physics*, 105, 207-223 (1993)
3. HAUKE, G. and HUGHES T.J.R. - A unified approach to compressible and incompressible flows. *Métodos Numéricos en Ingeniería*, Ed. Navarrina, F. and Casteleiro, M. SEMNI, Barcelona (1993)
4. MALLET, M. - A finite element method for CFD. Ph.D. Thesis, Department of Civil Engineering, Stanford University, (1985).
5. NIGRO, N., STORTI, M., IDELSOHN, S. and TEZDUYAR, T. - Physics based GMRES preconditioner for compressible and incompressible Navier-Stokes equations. submitted to *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* (1996)
6. SHAKIB, F. - Finite element analysis of the compressible Euler and Navier-Stokes equations. Ph.D. Thesis, Department of Mechanical Engineering, Stanford University (1988)
8. STORTI, M., NIGRO, N. and IDELSOHN, S. - Steady state incompressible flows using explicit schemes with an optimal local preconditioning. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 124, 231-252 (1995)
7. VENKATESWARAN, S., WEISS, J., MERKLE, C. and CHOI, Y. - Propulsion-related flowfields using the preconditioned Navier-Stokes equations. *AIAA Paper.*, 92-3437, (1992)

8. ZIENKIEWICZ, O. C., SZMELTER, J. and PERAIRE, J. - Compressible and incompressible flow: an algorithm for all seasons. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* , 78, 105-121 (1990)
9. VAN DYKE, M. - Perturbation methods in fluid mechanics - The Parabolic Press, Stanford, California (1975)

