



ESTUDIO DEL DESPLAZAMIENTO DE UNA INTERFASE LIQUIDO-GAS USANDO EL METODO DE ELEMENTOS FINITOS. CASOS PLANO Y AXISIMETRICO.

María D. Giavedoni y Fernando A. Saita.

Instituto de Desarrollo Tecnológico para la Industria Química
(UNL- CONICET)

Güemes 3450 - 3000 Santa Fe - ARGENTINA.

RESUMEN

En este trabajo se emplea el método de elementos finitos combinados con una adecuada parametrización de la superficie libre para analizar el desplazamiento en estado estacionario de una fase líquida contenida entre placas planas paralelas o en un tubo capilar de paredes rectas, por un gas inviscido. Los valores obtenidos para variables tales como el espesor de la película formada entre la burbuja y la pared del tubo, coinciden muy bien con los resultados experimentales y teóricos de la bibliografía. La técnica permite obtener soluciones en un rango muy amplio del número Capilar.

SUMMARY

In this work the finite element method combined with a suitable parametrization of the free surface is employed in order to analyze the steady displacement of an inviscid bubble in the liquid that initially fills the space between two parallel plates or a straight capillary tube. Computed values of variables such as the thickness of the liquid film between the bubble and the tube wall are in very good agreement with experimental and theoretical results reported in the literature. The technique employed is able to obtain solutions for a wide range of the Capillary number.

INTRODUCCION

La recuperación asistida de petróleo por inyección de CO_2 y la intrusión de aire en las fibras saturadas con agua en la manufactura de papel, son dos ejemplos de procesos en los cuales el fenómeno fundamental consiste en el desplazamiento de un líquido por un gas. Si bien los procesos mencionados involucran geometrías complicadas, el estudio del problema en geometrías simples (tubo capilar recto o placas planas paralelas) es un prototipo útil para analizar flujos multifásicos con el objeto de obtener estimaciones sobre variables tales como la eficiencia del desplazamiento.

Este problema ha sido ampliamente estudiado tanto teórica como experimentalmente. En efecto, Fairbrother y Stubbs [1] obtuvieron una correlación empírica entre la fracción de líquido (m) que queda adherido a las paredes del tubo y el número capilar (Ca), cuando la velocidad característica del sistema es baja. Esta correlación fue verificada por Taylor [2] quien estableció el rango de validez de la misma y encontró que m tiende a un valor asintótico cuando el Ca se aproxima a 2.

Bretherton [3] estudió analíticamente el problema del desplazamiento estacionario de una burbuja en un tubo capilar considerando que para valores pequeños del número Capilar la forma de la burbuja se aparta de la forma correspondiente al caso estático sólo en la zona donde los efectos viscosos son importantes, es decir, cerca de la pared. Suponiendo que en esta región la aproximación de lubricación es adecuada para describir el flujo y la forma de la interfase, Bretherton obtuvo correlaciones analíticas para el espesor

del film y para la caída de presión en función del número Capilar, que concuerdan bien con sus resultados experimentales en el rango $10^{-4} < Ca < 10^2$, y con los de los autores mencionados previamente para Ca pequeño pero mayor a 10^3 . Finalmente, Ratulowski y Chang [4] extendieron el análisis asintótico de Bretherton para valores más bajos de Ca usando una formulación en longitud de arco de una forma compuesta de la ecuación de lubricación.

Los principales trabajos numéricos que estudian este problema son los de Reinelt y Saffman [5], Shen y Udell [6] y Lu y Chang [7]. El primero considera las dos geometrías mencionadas y obtiene soluciones para valores del Ca entre 10^2 y 2, empleando una técnica de diferencias finitas y dos mallas, una curvilínea que sigue a la interfase y otra rectilínea paralela a las fronteras sólidas. Shen y Udell resuelven por elementos finitos el problema axisimétrico en el rango de Ca $5 \times 10^3 - 0.1$ y, finalmente, Lu y Chang trabajando con elementos de contorno encuentran soluciones para el caso plano desde valores del Ca próximos a 5×10^4 (que son los menores valores para los cuales existen soluciones numéricas) hasta $Ca = 2$. En todos los trabajos mencionados, las fuerzas de inercia se consideran despreciables y la forma de la interfase se determina, numéricamente, iterando sobre el balance de tensiones normales.

En el trabajo que aquí se presenta se emplea el método de elementos finitos utilizando, a diferencia de sus predecesores, una metodología de solución simultánea [8] para resolver tanto el caso plano como el axisimétrico. Las soluciones obtenidas cuando las fuerzas de inercia son despreciables, coinciden muy bien con los resultados teóricos y experimentales de la bibliografía. Además, tanto en el caso plano como en el axisimétrico, la técnica numérica permite hallar soluciones para valores del número Capilar tan pequeños como 5×10^4 . Este valor es el límite inferior de las soluciones numéricas existentes en la bibliografía para el problema bidimensional y es un orden de magnitud menor de las que existen publicadas para el problema axisimétrico. Finalmente, si bien en este tipo de problemas el número de Reynolds no es mayor a 50, las soluciones obtenidas muestran que el espesor final de la película es sensible a las fuerzas de inercia, especialmente cuando el número Capilar es de orden uno. Este efecto se discute por primera vez en la bibliografía.

FORMULACION MATEMATICA

Ecuaciones.

Este trabajo considera el desplazamiento de un líquido viscoso y Newtoniano por un gas inviscido en estado estacionario. El líquido se encuentra inicialmente contenido entre dos placas planas, paralelas, separadas entre sí por una distancia pequeña, $2d$, (problema plano) o en el interior de un tubo capilar de paredes rectas y radio d (problema axisimétrico). Debido a que la longitud característica del sistema es muy pequeña, los efectos gravitatorios pueden considerarse despreciables frente a los efectos capilares y viscosos; en consecuencia, las ecuaciones que gobiernan el problema son Navier-Stokes y continuidad, que en su forma adimensional resultan:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (1)$$

$$Re \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} - \nabla \cdot \mathbf{T} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{T} = -\frac{p}{Ca} \mathbf{I} + [\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T] \quad (2)$$

En (1) y (2), la velocidad característica es la velocidad de desplazamiento de la burbuja, U , y la longitud característica es d ; la presión está adimensionalizada con las fuerzas capilares (σ/d). $Ca = \mu U / \sigma$ y $Re = \rho U d / \mu$, son el número Capilar y el número de Reynolds, respectivamente; ρ y μ son la densidad y la viscosidad de la fase líquida y σ la tensión interfacial.

Condiciones de contorno.

Si el sistema de referencia se mueve con velocidad U , las condiciones de contorno son las que se indican en la Figura 1.

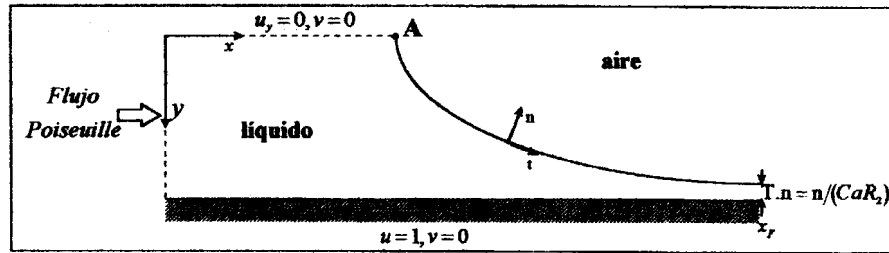


Figura 1: Sistema coordenado y condiciones de contorno.

La localización de la superficie libre se determina junto con los campos de velocidad y presión por medio de la condición cinemática:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (3)$$

Las condiciones de contorno que deben verificarse en la interfase establecen que no hay tensiones tangenciales y que las tensiones normales se balancean con las fuerzas capilares; es decir

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{Ca} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \mathbf{n} \quad (4)$$

En la ecuación anterior R_1 y R_2 son los radios de curvatura principales de la superficie libre,

$$\frac{\mathbf{n}}{R_1} = \frac{d\mathbf{t}}{ds}, \quad \frac{\mathbf{n}}{R_2} = \frac{-\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_r}{y_x} \mathbf{n} \quad (5)$$

en la ecuación (5) s es la longitud de arco. Para flujos planos, R_2 se hace infinito.

En el punto A se imponen la posición y la pendiente de la superficie libre; este punto es, además, un punto de estancamiento ($\mathbf{v} = 0$). El problema no está sobreespecificado porque existe una incógnita adicional, el espesor final de la película, que aparece como un parámetro en el perfil de velocidades impuesto en $x = 0$.

METODO NUMERICO

El sistema de ecuaciones se discretizó usando el método de elementos finitos. Las características fundamentales del mismo para el problema bidimensional se pueden encontrar en [9]. En el caso axisimétrico, se utilizó la formulación adecuada en coordenadas cilíndricas [10].

El problema discreto es no-lineal aún en el caso particular en que las fuerzas de inercia sean despreciables ($Re = 0$) porque la forma de la interfase es desconocida a priori y debe calcularse como parte de la solución.

El conjunto de ecuaciones algebraicas no-lineales resultantes de la discretización se resolvió en forma simultánea mediante el método de Newton. El criterio de convergencia adoptado fue que la norma de la diferencia entre dos vectores solución consecutivos sea menor a 10^{-6} .

RESULTADOS

Se obtuvieron soluciones en el rango de Ca entre 6×10^{-4} y 10 y, para cada valor de Ca entre $Re = 0$ y Re_{max} . El valor de Re_{max} se obtuvo suponiendo que las propiedades y variables características del sistema toman los valores indicados en la Tabla I.

TABLA I

$U = 10^{-3} - 0.3 \text{ m/s}$
$\sigma = 15 \times 10^{-3} - 10^{-2} \text{ N/m}$
$\mu = 1 \text{ cp} - 1 \text{ poise}$
$d = 0.5 \times 10^{-3} \text{ m}$
$\rho = 10^3 \text{ kg/m}^3$

Los resultados de la Tabla II para $Ca = 5 \times 10^{-3}$ y para el caso plano, indican que prácticamente no existen diferencias en los valores de las variables características del problema, aún cuando la diferencia en el número de elementos de las distintas mallas empleadas para obtenerlos, sea grande. En todos los casos, el valor de h_0 obtenido no difiere del valor de la teoría asintótica de Bretherton en más del 0.42%. Resultados similares se obtuvieron para el caso axisimétrico.

TABLA II

NE	NNOFS	$1 - h_0$	ΔP	(x_E, y_E)
123	39	0.964	-1.096	(1.946, 0.103)
138	45	0.964	-1.096	(1.943, 0.104)
148	49	0.964	-1.096	(1.946, 0.104)

En la Tabla II, NE es el número total de elementos de la malla, NNOFS es el número de nodos en la superficie libre, h_0 es el espesor final de la película que deja la burbuja al arrastrar el líquido, ΔP es la diferencia de presión en la interfase en el punto A (ver Fig. 1) y (x_E, y_E) son las coordenadas del punto de estancamiento. Los resultados que se presentan en este trabajo fueron obtenidos con la malla indicada en primer término en esta Tabla. Si el número Capilar aumenta, la película necesita una distancia mayor para relajarse; en consecuencia, la posición de la frontera $x = x_F$, se fijó teniendo en cuenta que el valor de h_0 sea insensible a la misma.

Soluciones del caso plano.

Antes de considerar la influencia de las fuerzas de inercia sobre el desplazamiento, vamos a mostrar las soluciones obtenidas cuando $Re = 0$, con el propósito de compararlas con las soluciones existentes en la literatura.

La Figura 2 muestra el espesor final del film para valores del Ca entre 6×10^{-4} y 10. En esta figura se indican también los resultados de la teoría asintótica de Bretherton [3] y las obtenidas mediante diferencias

finitas por Reinelt y Saffman [5] y con elementos de contorno por Lu y Chang [7]. Se observa que las soluciones calculadas empleando la técnica indicada en este trabajo coinciden muy bien con los resultados de [3] y de [7] para valores bajos del número Capilar ($Ca \leq 0.01$) y con los de [5] para $Ca > 0.01$. Si bien la técnica permite obtener soluciones hasta $Ca \approx 10^{-4}$, a partir de 6×10^{-4} los valores de h_0 se desvían sensiblemente (son menores) de los predichos por la teoría asintótica y por esa razón no se indican en la figura.

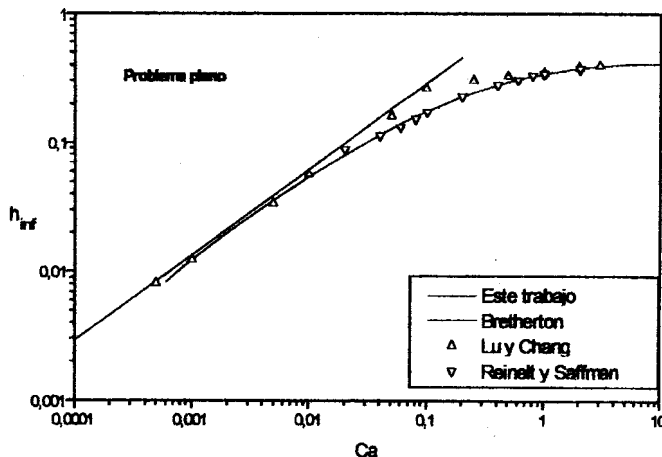


Figura 2: Espesor de la película en función del Ca .

En la Figura 3 se ilustra la caída de presión interfacial en el punto A (ver Figura 1) en función del Capilar; también se muestran los valores calculados con la teoría asintótica [3] y los de las soluciones numéricas [5] y [7]. Para valores bajos del número Capilar, la solución que se presenta aquí es la que mejor se aproxima a la teoría asintótica ($\Delta P = 1 + 3.72Ca^{2/3}$) y para valores del $Ca > 0.1$, coincide muy bien con los de [5]. Este resultado es razonable si se tiene en cuenta que la teoría asintótica supone que la forma del frente de la burbuja se puede aproximar con un arco de círculo, hipótesis que es buena para $Ca \rightarrow 0$, cuando la burbuja adopta la forma estática.

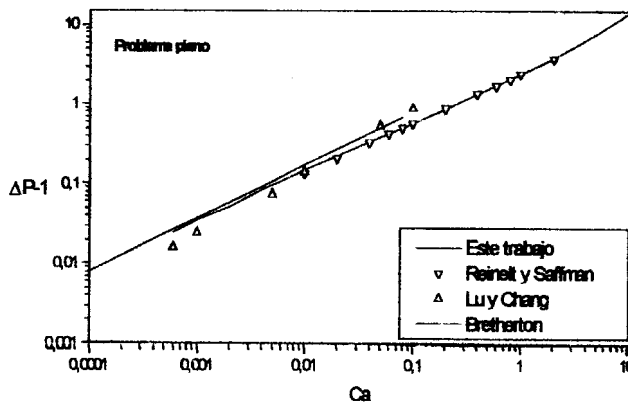


Figura 3: Valores de $\Delta P - 1$ en función del Ca .

Cuando el sistema coordenado está fijo en la fase gas y el valor de h_0 es menor a $1/3$, el campo de velocidad muestra una recirculación. La posición del punto de estancamiento que, en estos casos existe en la interfase, se desplaza hacia la línea de simetría a medida que el Capilar aumenta, desapareciendo según nuestros resultados para $Ca \geq 0.7$, que es el valor para el cual h_0 es $1/3$. Este resultado es sensiblemente distinto al obtenido por Lu y Chang [7] mediante elementos de contorno, según los cuales $h_0 \approx 1/3$ para $Ca \approx 0.125$ y coincide con el valor de Reinelt y Saffman [5], según se puede deducir de los resultados de la Fig. 2.

La forma adoptada por la interfase depende del número Capilar como puede observarse en la Fig. 4, donde se ve que para valores pequeños de este parámetro, la interfase se asemeja a un arco de círculo, forma característica del caso estático donde las fuerzas capilares son las que dominan, mientras que a medida que las fuerzas viscosas aumentan (mayor Ca) la burbuja se alarga.

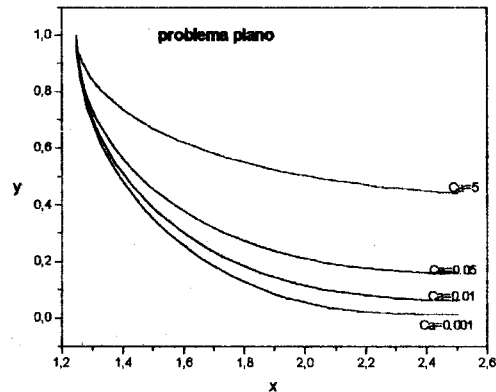


Figura 4: Forma de la interfase en función del número Capilar.

Para determinar el efecto de las fuerzas de inercia sobre el espesor de la película, se resolvió el problema para $Re = 40$, y $0.001 \leq Ca \leq 0.1$; los valores obtenidos para h_0 se ilustran en la Fig. 5. Como puede observarse, el espesor de la película líquida aumenta con el Reynolds para valores de $Ca < 0.02$, pero disminuye para valores mayores del número Capilar.

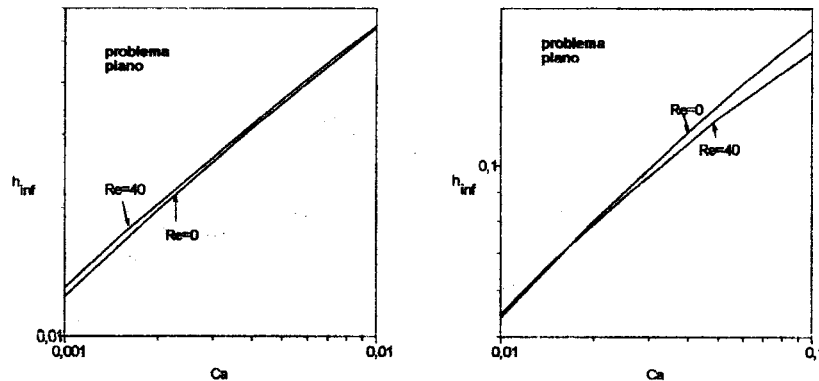


Figura 5: Valores de h_0 en función de Ca , para $Re=0$ y $Re=40$.

Es importante señalar que Wassmuth y col. [11] también encontraron que el espesor de la película que forma la burbuja al desplazarse entre placas planas cuando el $Re \approx 20$ y $0.02 < Ca < 0.05$, es menor que el calculado por Reinelt y Saffman [5] cuando $Re = 0$. En la Fig. 6 se muestra el efecto de las fuerzas de inercia sobre h_{inf} para distintos valores del Capilar.

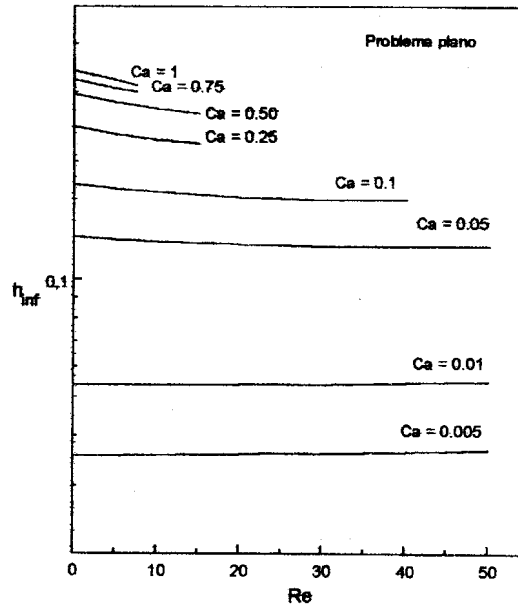


Figura 6: Espesor de la película en función del Re para distintos valores del Ca .

En esta Figura se observa que para $Ca = 0.005$ y $Ca = 0.01$ el aumento de las fuerzas de inercia se traduce en un pequeño aumento del espesor de la película, mientras que para los otros valores del Capilar ocurre lo contrario; el efecto de las fuerzas de inercia es muy marcado para valores de Ca próximos a 1, aún cuando en éste último caso el Re no supera a 6.

Soluciones del caso axisimétrico.

También en este caso se presentan primero las soluciones correspondientes $Re = 0$, con el objeto de compararlas con las existentes en la bibliografía.

En términos del parámetro $m = 1 - y_{\infty}^2$, en la Fig. 7 se ilustran los valores del espesor final de la película líquida que se forma como consecuencia del desplazamiento de la burbuja en función del número Capilar; m es la fracción de volumen de líquido que queda pegado a las paredes del tubo por el pasaje de la burbuja semiinfinita. Además, en la misma figura se indican los resultados experimentales de Taylor [2], la correlación empírica de Fairbrother y Stubbs [1] ($m = Ca^{1/2}$) y las soluciones numéricas de Reinelt y Saffman [5] y de Shen y Udeff [6]. El valor calculado de m coincide muy bien con los resultados experimentales de Taylor y con las soluciones numéricas mencionadas; con respecto a la correlación [1], la mejor concordancia se encuentra para valores del Capilar entre 4×10^{-3} y 0.10, rango en el cual las diferencias no superan al 6%, mientras que para $Ca < 4 \times 10^{-3}$ los valores calculados numéricamente son hasta un 30% menores que los de esta correlación. Sin embargo, si las soluciones numéricas se comparan con los valores de la teoría asintótica de Bretherton [3], las diferencias no superan al 13%.

A medida que el Capilar aumenta, m tiende a un valor asintótico; según nuestras soluciones m es igual a 0.592 para $Ca=10$, valor que concuerda muy bien con los hallados experimentalmente por Cox [13] ($m \approx 0.60$) y numéricamente por Martínez y Udell [12] ($m \approx 0.59$), e indica que aproximadamente el 60% del líquido queda adherido a las paredes del tubo como consecuencia del pasaje de la burbuja. Además, para $Ca=2$, $m \approx 0.56$, valor muy próximo al de Taylor [3] ($m \approx 0.55$).

A diferencia de lo descrito por Shen y Udell [6] para $Ca > 0.2$ o por Martínez y Udell [12] para $Ca > 2$, nuestras soluciones no muestran oscilaciones en la interfase para ningún valor del Capilar dentro del rango que se analizó: $5 \times 10^{-4} < Ca < 10$.

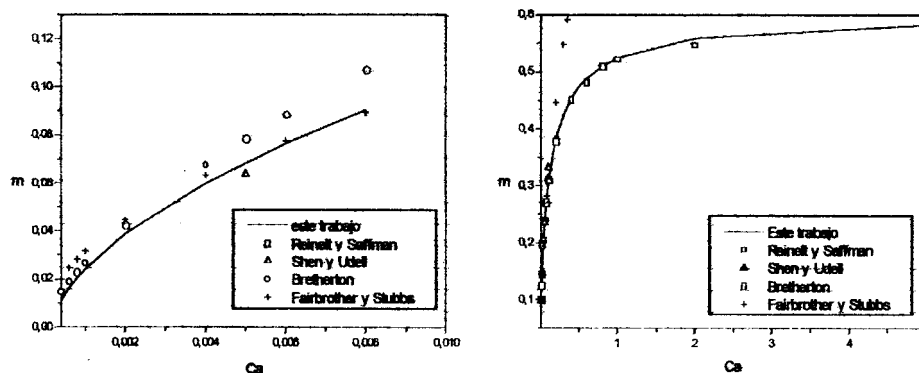


Figura 7: Valores de m en función del Ca .

La diferencia de presión que existe en el frente de la burbuja en función del número Capilar se muestra en la Figura 8. En la misma Figura se ilustran los valores calculados con la ecuación de Bretherton [3] y las soluciones numéricas de [5] y [6].

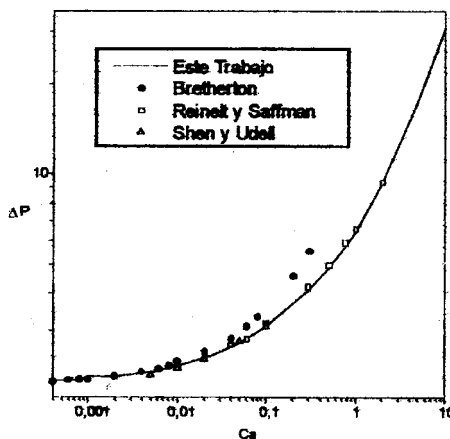


Figura 8: ΔP en el frente de la burbuja en función de Ca .

Se observa que los valores computados concuerdan bien con los de la teoría asintótica para valores del Capilar menores a 8×10^{-3} ; este resultado es razonable ya que esta teoría es válida para $Ca \leq 5 \times 10^{-3}$. En

la gráfica, ΔP parece tender a infinito para Ca grande; este efecto se debe a que la presión está escalada con α/d en todo el rango de Ca y si bien esta es una adimensionalización adecuada para valores pequeños del Capilar, no lo es para $Ca \approx 1$ donde la presión es de orden μ/Ud .

Como ocurre en el caso plano, cuando el sistema coordenado se mueve con la velocidad de la burbuja, el campo de velocidad presenta un recirculación central cuyo tamaño es mayor a bajos valores del Ca y que no existe, según nuestras soluciones, cuando $Ca \approx 0.7$; este valor coincide con el reportado en [6]. El punto de estancamiento que existe sobre la superficie libre cuando hay recirculación, se desplaza hacia la línea de simetría a medida que el Capilar aumenta.

Finalmente, en la Fig. 8 se muestra el efecto de la inercia sobre el valor de m . Para valores bajos del Ca , la variación del número de Reynolds no produce cambios sensibles en la fracción de líquido que queda adherido a las paredes del tubo; a medida que el Capilar aumenta, el aumento de las fuerzas de inercia produce una disminución de m , siendo el efecto más notable que en el caso plano.

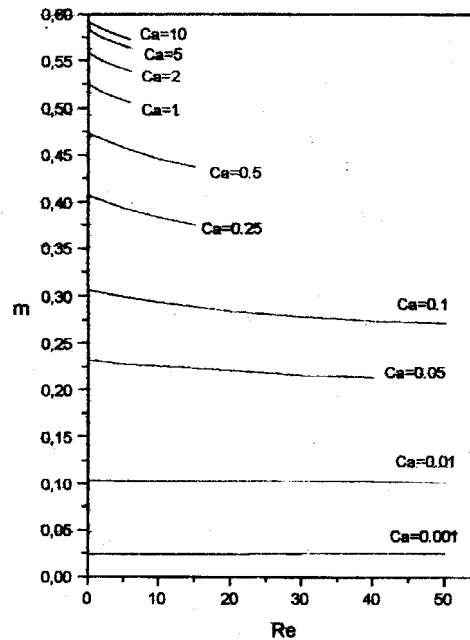


Figura 9: Influencia de las fuerzas de inercia sobre el valor de m .

CONCLUSION

En Este trabajo se ha analizado el desplazamiento en estado estacionario de un líquido contenido inicialmente entre placas planas paralelas o en el interior de un tubo capilar por un gas. La técnica numérica empleada permite obtener soluciones en un amplio rango del número Capilar. Este rango es más amplio, en el caso del problema axisimétrico, que el estudiado previamente en la bibliografía por medio de técnicas numéricas distintas a la aquí considerada. Además, en ningún caso se observaron oscilaciones en la interfase como las descritas en otros trabajos, aún cuando el rango de Ca aquí estudiado es más amplio.

Para valores bajos del número Capilar se observa una excelente concordancia con los valores de la teoría asintótica de Bretherton siendo, para el caso plano, las solución numérica que mejor aproxima la caída de presión.

REFERENCIAS

- [1] Fairbrother, F. y Stubbs, A. E., "Studies in Electroendosmosis. Part VI. The bubble-tube methods of measurements," *J. Chem. Sci.*, **1**, 527-529, 1935.
- [2] Taylor, G. I., "Deposition of a viscous fluid on the wall of a tube," *J. Fluid Mech.*, **10**, 161-165, 1961.
- [3] Bretherton, F. P., "The motion of long bubbles in tubes," *J. Fluid Mech.*, **10**, pp. 166-188, 1961.
- [4] Ratulowski, J. y Chang, H. C., "Transport of gas bubbles in capillaries," *Phys. Fluids A*, **1**, 1642-1655, 1989.
- [5] Reinelt, D. A. y Saffman, P. G., "The penetration of a finger into a viscous fluid in a channel and tube," *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, **6**, 542-561, 1985.
- [6] Shen, E. I. y Udell, K. S., "A finite element study of low Reynolds number two phase-flow in cylindrical tubes," *ASME Journal of Applied Mechanics*, **52**, 253-256, 1985.
- [7] Lu, W. Q. y Chang, H. C., "An extension of the biharmonic boundary integral method to free surface flow in channels," *J. Comput. Phys.*, **77**, 340-360, 1988.
- [8] Giavedoni, M. D. y Saita, F. A., "Differential pressure in slot coating - Viscocapillary limit values versus computed predictions," *Chem. Engng. Comm.*, **125**, 27-45, 1993.
- [9] Kistler, S. F., "The fluid mechanics of curtain coating and related viscous free surface flows with contact lines," Ph. D. Thesis, Universidad de Minnesota, 1983.
- [10] Crochet, M. J., Davies, A. R. y Walters, K., "Numerical Simulation of Non-Newtonian Flow," Elsevier, New York, 1984.
- [11] Wassmuth, F., Laidlaw, W. G. y Coombe, D. A., "Calculation of interfacial flows and surfactant redistribution as a gas/liquid interface moves between two parallel plates," *Phys. Fluids A*, **5**, 1533-1548, 1993.
- [12] Martinez, M. J. Y Udell, K. S., "Boundary integral analysis of the creeping flow of long bubbles in capillaries," *ASME J. Of Applied Mechanics*, **56**, 211-217, 1989.
- [13] Cox, B. G., "On driving a viscous fluid out of a tube," *J. Fluid. Mech.*, **14**, 81-98, 1962.