



REFINAMENTO AUTOMÁTICO DE MALHAS BI E TRIDIMENSIONAIS, SEM FORMAÇÃO DE NÓS IRREGULARES, EM UM SISTEMA DE ELEMENTOS FINITOS

José L. F. Aymone, Ademar G. Groehs
CEMACOM, CPGEC

Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Av. Osvaldo Aranha, 99 - 3º andar,
CEP: 90035-190, Porto Alegre, RS, Brasil

RESUMO

Este trabalho apresenta um estimador de erros "a-posteriori" para análises de elementos finitos em problemas elásticos-estáticos lineares, e um processo de refinamento auto-adaptativo tipo h por nó. Esse processo evita o problema da geração de nós irregulares e está implementado no sistema GAELI.

ABSTRACT

This paper presents an "a posteriori" error estimator for finite elements analysis in linear elastic-static problems, and a h-method adaptive remeshing procedure that works node by node. This procedure avoids the problem of irregular nodes generation and it is implemented into the GAELI system.

INTRODUÇÃO

Os processos adaptativos, além de realizarem a análise normal de elementos finitos, determinam a região do domínio onde o modelamento não é adequado e, após isso, melhoram o mesmo usando uma das estratégias (versão r, p ou h). Geralmente, inicia-se a análise com uma malha o mais uniforme possível e calcula-se a solução. Após isso, estima-se o erro local, enriquecendo a malha onde o erro for grande.

A versão r simplesmente realoca a posição dos nós, a versão p aumenta o grau dos polinômios das funções de interpolação e a versão h, que será utilizada neste trabalho, atua através da subdivisão dos elementos. A malha ótima será atingida quando o erro for igual em todos os elementos, ou seja, quando houver uma distribuição uniforme do erro de aproximação tendo como limite superior a percentagem de erro especificada. O presente trabalho é baseado na dissertação de Mestrado [1] e utiliza um estimador de erros proposto por [2] e [3] que consiste na projeção local e suavização global do campo de tensões. Este estimador de erros está implementado no sistema GAELI [4].

O ESTIMADOR DE ERROS

Calculam-se as tensões aproximadas pela expressão $\hat{\sigma} = D\hat{\epsilon} = DB\hat{U}^e$ onde $\hat{\epsilon}$ e \hat{U}^e representam respectivamente as deformações específicas e os deslocamentos nodais aproximados e D é a matriz constitutiva elástica. Sendo σ a solução exata de tensões, o erro de tensões será dado pela expressão (1)

$$e_{\sigma} = \sigma - \hat{\sigma}. \quad (1)$$

Como a expressão (1) é uma função de ponto, de difícil aplicação prática, utiliza-se a norma de energia do erro definida sobre o volume do elemento Ω

$$\|E\|_{\epsilon_0} = \sqrt{\int_{\Omega} \underline{e}_{\sigma}^T D^{-1} \underline{e}_{\sigma} d\Omega} \quad (2)$$

Para obter uma avaliação de $\underline{\sigma}$, parte-se da expressão $\underline{\sigma}^* = \underline{\Phi} \underline{\bar{\sigma}}^*$ onde uma componente de tensão $\underline{\sigma}^*$, em um ponto qualquer no interior de um elemento, relaciona-se com as mesmas componentes de tensão $\underline{\bar{\sigma}}^*$ nos diversos nós do elemento através da matriz linha de funções $\underline{\Phi}$.

Para obter $\underline{\bar{\sigma}}^*$ minimiza-se o funcional quadrático $\chi = \int_{\Omega} (\hat{\sigma} - \underline{\sigma}^*)^2 d\Omega$ para cada componente de tensão $\hat{\sigma}$ e $\underline{\sigma}^*$, o que permite obter $\left[\int_{\Omega} \underline{\Phi}^T \underline{\Phi} d\Omega \right] \underline{\bar{\sigma}}^* = \int_{\Omega} \underline{\Phi}^T \hat{\sigma} d\Omega$ onde $\underline{\bar{\sigma}}^*$ é o vetor incógnita do problema, o qual não depende de Ω . Integrando $\underline{M} = \int_{\Omega} \underline{\Phi}^T \underline{\Phi} d\Omega$ e $\underline{R} = \int_{\Omega} \underline{\Phi}^T \hat{\sigma} d\Omega$ por Gauss, pode-se obter cada conjunto de componentes $\underline{\bar{\sigma}}^*$ para os nós do elemento. Denomina-se $\underline{\bar{\sigma}}^*$ de tensões projetadas, as quais dependem do elemento considerado.

Usando os nós do elemento como pontos de integração, a matriz \underline{M} dá origem à matriz diagonal \underline{M}^D [5], enquanto que \underline{R} dá origem à \underline{R}^D . Essas matrizes permitem obter as matrizes globais $\underline{M}^T = \sum_{e=1}^{QL} \underline{M}^D$ e $\underline{R}^T = \sum_{e=1}^{QL} \underline{R}^D$ onde QL é o número de elementos constituintes da estrutura. A solução do sistema $\underline{M}^T \underline{\bar{\sigma}}^{**} = \underline{R}^T$ fornece as tensões suavizadas globais $\underline{\bar{\sigma}}^{**}$ nos nós do elemento. A partir de $\underline{\bar{\sigma}}^{**}$ pode-se obter, para cada elemento, os valores das componentes de tensão $\underline{\sigma}^{**}$ nos pontos de integração de Gauss através das funções de interpolação $\underline{\phi}$ utilizadas para calcular a matriz de rigidez do elemento. Assim, para cada componente em um certo ponto de integração, $\underline{\sigma}^{**} = \sum_{i=1}^{NNE} \phi_i \bar{\sigma}_i^{**}$ onde ϕ_i são os valores das funções de interpolação no ponto de integração e NNE é o número de nós por elemento. Após isso, é possível fazer uma avaliação da expressão (1) nos pontos de integração (PI) como

$$\left(\hat{\underline{e}}_{\sigma} \right)_{PI} = \left(\underline{\sigma}^{**} - \hat{\underline{\sigma}} \right)_{PI} \quad (3)$$

e uma avaliação da expressão (2) pode ser obtida pela expressão (4)

$$\|E\|_{\epsilon_0} = \sqrt{\sum_{PI=1}^{NPI} \left(\hat{\underline{e}}_{\sigma}^T \right)_{PI} D^{-1} \left(\hat{\underline{e}}_{\sigma} \right)_{PI} W_{PI} \det J_{PI}} \quad (4)$$

onde W_{PI} é o peso e $\det J_{PI}$ é o determinante do Jacobiano. Seguindo o raciocínio utilizado na norma de energia do erro obtém-se, ao substituir na expressão (4) o termo $\hat{\underline{e}}_{\sigma}$ por $\hat{\underline{\sigma}}$, uma avaliação da norma de

energia de tensão através da expressão $\|E\|_{\sigma_0} = \sqrt{\sum_{PI=1}^{NPI} \left(\hat{\underline{\sigma}}^T \right)_{PI} D^{-1} \left(\hat{\underline{\sigma}} \right)_{PI} W_{PI} \det J_{PI}}$. Para obter uma melhor avaliação da norma de energia de tensão $\|E\|_{\sigma_0}$, em nível de elemento, pode-se combinar $\|E\|_{\epsilon_0}$ com a

expressão (4) chegando a $\|E\|_e = \sqrt{\|E\|_{\sigma}^2 + \|E\|_{\varepsilon}^2}$. Com isso, o erro relativo aproximado $\hat{\eta}$ (%), em nível de elemento, será

$$\hat{\eta} = \frac{\|E\|_{\varepsilon}}{\|E\|_e} \times 100. \quad (5)$$

REFINAMENTO AUTO-ADAPTATIVO TIPO h POR ELEMENTO

Existem várias estratégias de refinamento tipo h. Na estratégia utilizada neste trabalho, é estabelecido um critério de precisão cujo objetivo é atingir uma determinada porcentagem de erro relativo através da norma de energia. Para isso, utiliza-se as normas de energia globais. A norma de energia do erro, correspondente a toda a estrutura, pode ser avaliada como

$$\|E\|_{T\sigma}^2 = \sum_{i=1}^{QL} \|E\|_{i\sigma}^2 \quad (6)$$

onde $\|E\|_{i\sigma}$ é calculado, para cada elemento i , pela (4). A norma de energia de tensão global, obtida de forma semelhante à expressão (6) será $\|E\|_{T\varepsilon}^2 = \sum_{i=1}^{QL} \|E\|_{i\varepsilon}^2$.

Admitindo que o erro esteja igualmente distribuído entre todos os elementos, que é a condição ótima [6], tem-se $\|E\|_{i\varepsilon} = \|E\|_{j\varepsilon} = \|E\|_{k\varepsilon}$, tal que $1 \leq i, j \leq QL$, onde i e j correspondem a dois elementos distintos quaisquer e k simboliza um valor constante do erro. Devido a isso, a expressão (6) pode ser reescrita como $\|E\|_{T\varepsilon}^2 = QL \cdot \|E\|_{k\varepsilon}^2$, e o erro relativo de toda a estrutura, avaliado por uma expressão análoga a (5), fica

$$\hat{\eta}_T = \left[\frac{QL \times \|E\|_{k\varepsilon}^2}{\|E\|_{T\sigma}^2 + \|E\|_{T\varepsilon}^2} \right]^{1/2} \times 100. \quad (7)$$

Estabelecendo $\bar{\eta}_T$ como o máximo erro relativo permitido para a estrutura, em porcentagem, o critério a ser satisfeito será $\hat{\eta}_T \leq \bar{\eta}_T$. Adotando nele a igualdade, a expressão (7) permite obter

$$\|E\|_{k\varepsilon} = \sqrt{\left(\frac{\bar{\eta}_T}{100}\right)^2 \times \frac{\|E\|_{T\sigma}^2 + \|E\|_{T\varepsilon}^2}{QL}} \quad (8)$$

que pode ser adotado como limite superior de erro desejado em cada elemento, correspondente ao $\bar{\eta}_T$ especificado. Então se $\|E\|_{i\varepsilon} > \|E\|_{k\varepsilon}$, com $1 \leq i \leq QL$, o elemento i deve sofrer refinamento. Fazendo $\rho_i = \|E\|_{i\varepsilon} / \|E\|_{k\varepsilon}$, e sendo p igual à ordem do polinômio empregado, o valor de $\rho_i^{1/p}$ pode ser interpretado como

- | | |
|-----------------------------------|---|
| $\rho_i^{1/p} \leq 1$ | - não há necessidade de realizar refinamento; |
| $1 < \rho_i^{1/p} \leq 2$ | - há necessidade de realizar um refinamento; |
| $2^{r-1} < \rho_i^{1/p} \leq 2^r$ | - há necessidade de realizar r refinamentos sucessivos no elemento. |

Devido a existência de elementos de dimensões variadas, é interessante utilizar na expressão (8), em lugar de $(1/QL)$, a relação de volumes (V_i/V_T) onde V_i representa o volume do elemento considerado e V_T o volume global. O valor limite $\|E\|_{kt}$, passará a depender do elemento e então, para um elemento i , será

$$\|E\|_{kt,i} = \sqrt{\left(\frac{\bar{\eta}_T}{100}\right)^2 \cdot \left(\frac{V_i}{V_T}\right) \cdot (\|E\|_{T\sigma}^2 + \|E\|_{T\tau}^2)}. \quad (9)$$

São válidas todas as fórmulas vistas anteriormente, substituindo $\|E\|_{kt}$ por $\|E\|_{kt,i}$, onde for o caso. O refinamento por elemento normalmente apresenta problemas de implementação por criar, dependendo do tipo de subdivisão adotado, os chamados nós irregulares (ver figura 1).

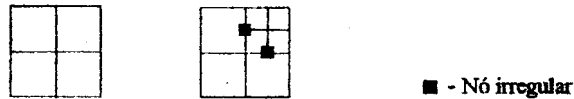


Figura 1 - Tipo de subdivisão que cria os nós irregulares.

A vantagem das subdivisões acima é que elas conduzem a elementos com um mínimo de distorção, não importando o nível de refinamento. Nota-se que os nós irregulares não existem nos elementos vizinhos ao elemento refinado. Por isso, usam-se técnicas especiais que permitem acoplá-los ao restante da malha. Essas técnicas, contudo, implicam modificações no algoritmo de solução e apresentam dificuldades adicionais para o caso de elementos quadráticos ou cúbicos e em malhas constituídas de elementos de diversas formas ou tipos.

Embora seja possível subdividir um elemento sem criar nós irregulares, refinamentos sucessivos, levados a cabo sobre elementos oriundos do primeiro refinamento, tendem a gerar elementos muito distorcidos. Esses elementos possuem ângulos internos cada vez mais próximos de 180° , dando origem a erros cada vez mais acentuados (ver figura 2).

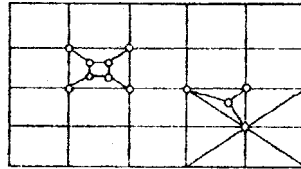


Figura 2 - Subdivisão por elemento que não cria nós irregulares.

Por isso, será adotada uma técnica intermediária que não cria nós irregulares e que tende a apresentar um menor índice de distorção nos elementos oriundos de refinamentos sucessivos. Esta técnica opera realizando o refinamento ao redor de um nó e não diretamente dentro de um elemento (ver próximo item).

REFINAMENTO AUTO-ADAPTATIVO TIPO h POR NÓ

É a estratégia utilizada neste trabalho. Para tal, procura-se caracterizar nós ao redor dos quais será realizado o refinamento. Inicialmente calcula-se, para cada elemento, a norma de energia do erro e o valor limite de erro conforme as expressões (4) e (9) respectivamente. Em seguida realizam-se, para cada nó, as médias dos quadrados da norma de energia e do limite de erro dos elementos concorrentes no nó N . Sendo $NLCN$

o número de elementos concorrentes no nó N , tem-se $\|E\|_{N\hat{e}_i}^2 = \frac{1}{NLCN} \sum_{i=1}^{NLCN} \|E\|_{\hat{e}_i}^2$ e $\|E\|_{N\hat{e}_i}^2 = \frac{1}{NLCN} \sum_{i=1}^{NLCN} \|E\|_{\hat{e}_i}^2$. Comparando essas expressões, haverá refinamento nos elementos que circundam o nó N sempre que $\|E\|_{N\hat{e}_i} > \|E\|_{N\hat{e}_i}$. As figuras 3 a 6 mostram a subdivisão adotada conforme o tipo de elemento utilizado.

● - Nó ao redor do qual é realizado o refinamento

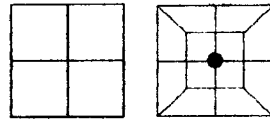


Figura 3 - Elemento quadrilátero.

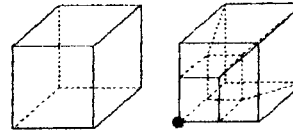


Figura 4 - Elemento hexaédrico.

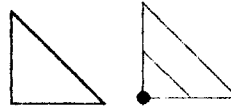


Figura 5 - Elemento triangular.

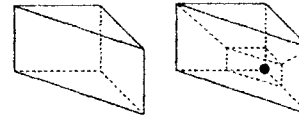


Figura 6 - Elemento pentaédrico.

As subdivisões de elementos valem para malhas mistas com qualquer dos elementos acima mostrados, tanto lineares como quadráticos, contanto que cada elemento dê origem a elementos de mesma ordem e que não haja mistura de elementos de ordem diversa (ver figura 7).

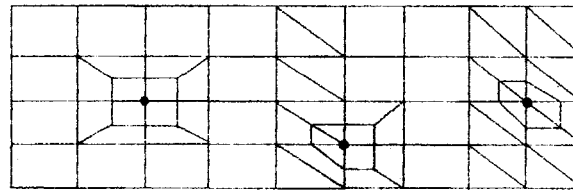


Figura 7 - Malha mista de elementos quadriláteros e triangulares

O processo de criação de nós e elementos é controlado através do arranjo $NCONTR$. O controle é feito ao longo das diversas etapas de refinamento, usando a variável $NIVEL$.

Para a 1a. etapa de refinamento:

- $NIVEL=1$, todos os nós de canto da malha original recebem $NCONTR=NIVEL$;
- Um nó que tenha o valor em $NCONTR=NIVEL$ e que necessite de refinamento:
 - marca-se este nó com valor $-NIVEL$ em $NCONTR$ (não será mais refinado)
 - marca-se os nós dos elementos vizinhos com $NCONTR=0$ (impedir refino na etapa);
- Fim da etapa: nós com $NCONTR=0$ são repostos com $NCONTR=NIVEL$.

Para as etapas seguintes de refinamento:

- Atribui-se $NIVEL+1$ aos novos nós de canto;

b) O processo continua, produzindo refinamento nos nós com $NCONTR=NIVEL$;

c) Se, a partir de uma certa etapa, não existirem mais nós sem refino que satisfaçam a $\|E\|_{N\hat{e}_i} > \|E\|_{N\hat{e}_j}$,

$NIVEL=NIVEL+1$ e o processo recomeça para os novos nós.

Obs.: Nós intermediários de elementos quadráticos não são considerados no processo acima visto que $NCONTR$ é preenchido apenas com nós de canto. Não é possível realizar refinamento ao redor de nós intermediários.

EXEMPLOS

Obs.: Nos exemplos a seguir, $\hat{\eta}$ (%) e $\bar{\eta}_T$ vêm das expressões (5) e (8) respectivamente.

Exemplo 1: Viga engastada livre (ver figuras 8 e 9). $\bar{\eta}_T = 10\%$ (erro relativo máximo permitido)

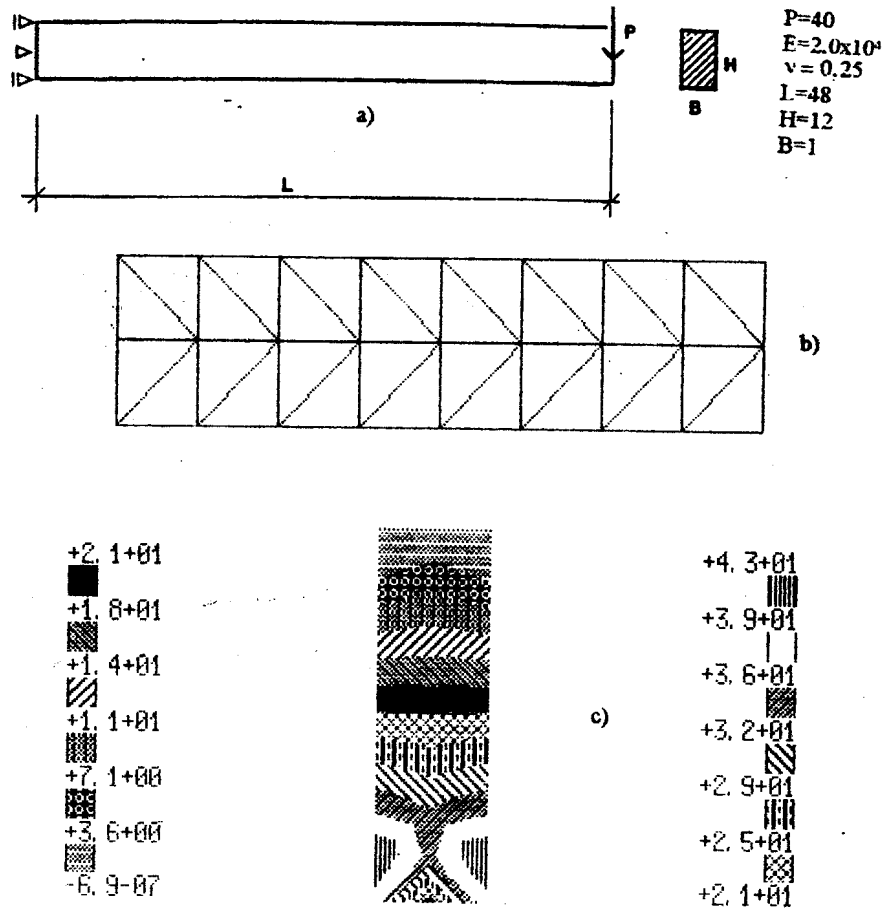


Figura 8 - Viga engastada livre. Estado plano de tensões. Elementos triangulares de 3 nós. a) Desenho esquemático b) Malha inicial, 27 nós, 32 elementos. $\sigma_{x,max} = 26$ c) Malha inicial, $\hat{\eta}$ (%). $\hat{\eta}_{max} = 43\%$, $\hat{\eta}_{med} = 22,1\%$

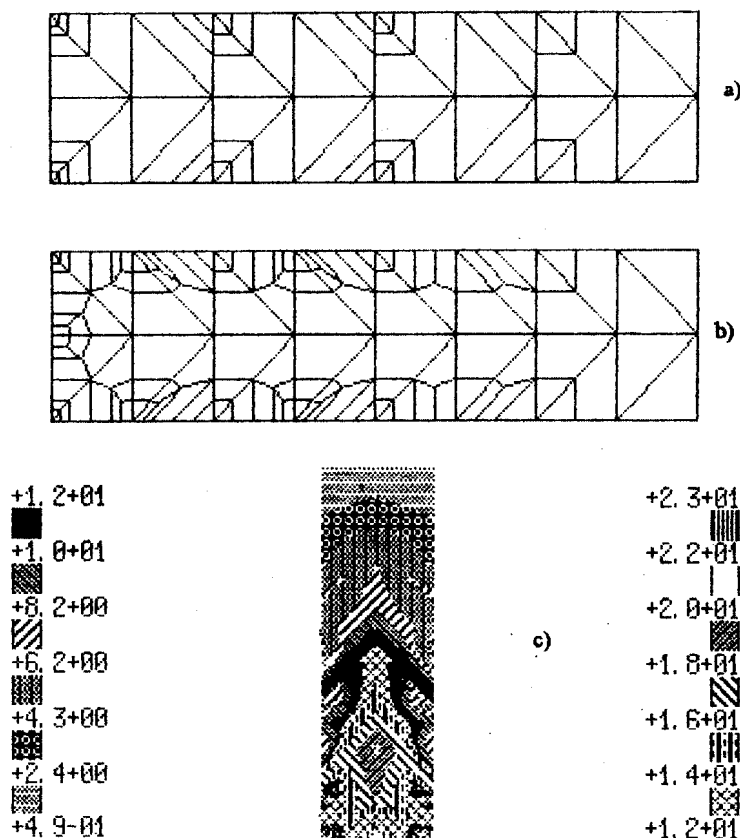


Figura 9 - Viga engastada livre. Estado plano de tensões. Elementos triangulares de 3 nós. a) 1º refino, 85 nós, 74 elementos. $\sigma_{x \max} = 77,3$, $\hat{\eta}_{\max} = 29\%$, $\hat{\eta}_{\text{med}} = 9,4\%$. b) 2º refino, 155 nós, 132 elementos. $\sigma_{x \max} = 78$ c) 2º refino, $\hat{\eta}$ (%). $\hat{\eta}_{\max} = 23\%$, $\hat{\eta}_{\text{med}} = 9,2\%$

Pode-se notar, das figuras 8 e 9, que a tensão σ_x máxima se aproxima da tensão máxima teórica de 80 a medida em que se vai refinando a malha. Além disso, os erros máximo e médio diminuem ao longo das etapas de refinamento. O erro máximo se concentra na zona de apoio. O erro médio é calculado somando-se o erro existente em cada nó e depois dividindo-se pelo número de nós da malha. Pelo resultados obtidos, conclui-se que o processo de refinamento utilizado funciona corretamente e é eficiente. As zonas que possuem maior nível de erro sofrem maior número de refinamentos sucessivos. Nos pontos de apoio não é possível atingir a percentagem máxima de erro especificada devido a sua presença. Por isso, é importante avaliar o erro máximo em conjunto com o médio para verificar a eficiência do processo de refinamento.

Exemplo 2: Viga simplesmente apoiada (ver figuras 10 e 11). $\bar{\eta}_T = 5\%$ (erro relativo máximo permitido)

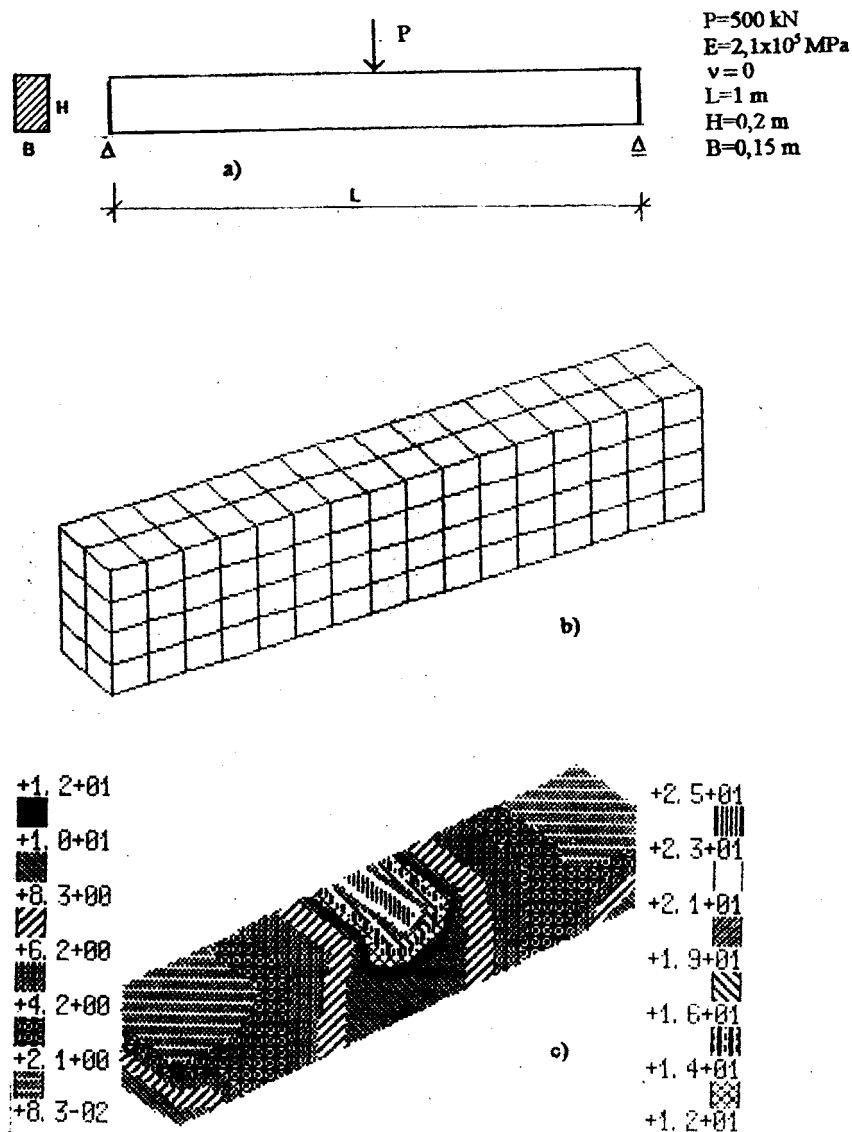


Figura 10 - Viga simplesmente apoiada. Sólido tridimensional. Elementos hexaédricos de 8 nós. a) Desenho esquemático b) Malha inicial, 255 nós, 128 elementos. $\sigma_{x \max} = 1,1 \times 10^5 \text{ kN/m}^2$ c) Malha inicial, $\hat{\eta}$ (%). $\hat{\eta}_{\max} = 25\%$

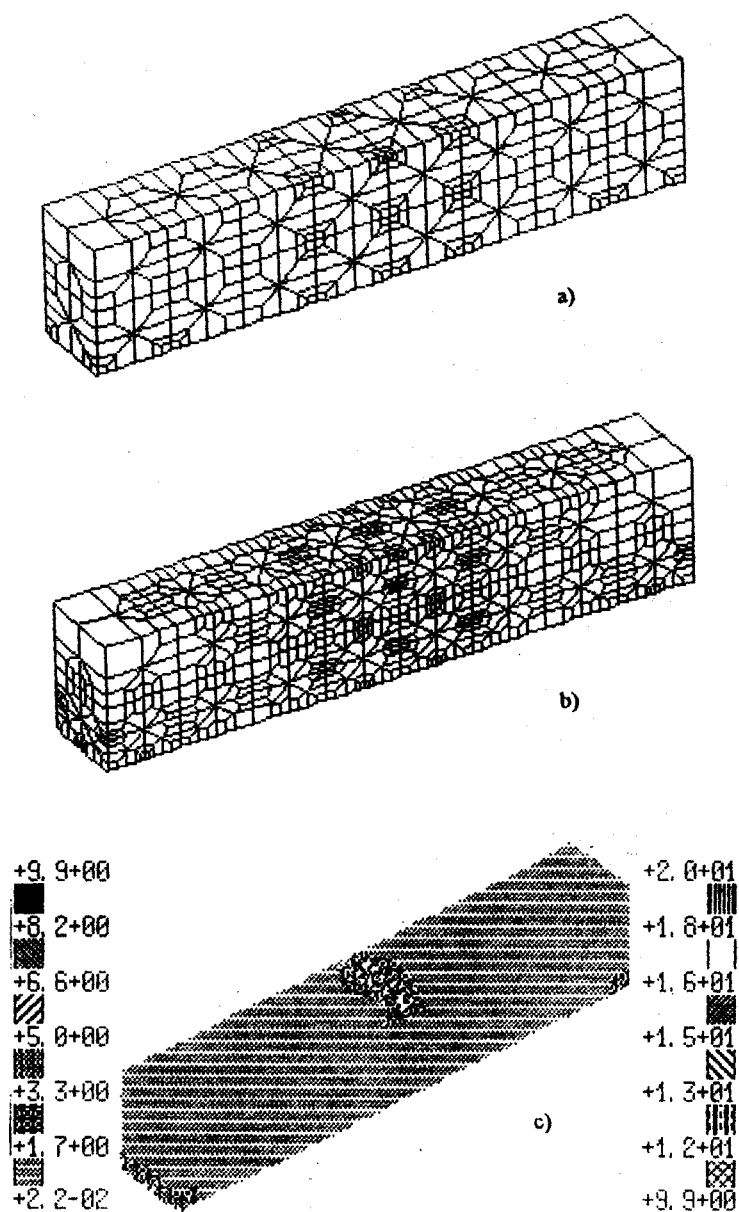


Figura 11 - Viga simplesmente apoiada. Sólido tridimensional. Elementos hexaédricos de 8 nós. a) 1^o refino, 1201 nós, 692 elementos. $\sigma_{x_{max}} = 1,2 \times 10^5 \text{ kN/m}^2$, $\hat{\eta}_{max} = 23\%$. b) 2^o refino, 3432 nós, 2228 elementos. $\sigma_{x_{max}} = 1,2 \times 10^5 \text{ kN/m}^2$ c) 2^o refino, $\hat{\eta}$ (%). $\hat{\eta}_{max} = 20\%$.

O exemplo 2 (figuras 10 e 11) conduz a um resultado que permite atingir a percentagem de erro especificada $\bar{\eta}_T = 5\%$ em quase toda a estrutura. As únicas exceções são: o ponto de aplicação da carga concentrada e os pontos de apoio. Os maiores valores de erro se concentram cada vez mais ao redor desses pontos a medida em que a malha vai sendo refinada, o que indica que o erro médio também baixou. Os valores de tensão σ_x máximos estão próximos da tensão σ_x máxima teórica de $1,25 \times 10^5$ kN/m², visto que $\sigma_{x \text{ max}} = 1,2 \times 10^5$ kN/m² nas duas etapas de refinamento.

CONCLUSÕES

A estratégia de refinamento por nó, por não criar nós irregulares, é de fácil implementação em sistemas convencionais de elementos finitos. Ela pode ser aplicada em elementos bi e tridimensionais lineares e quadráticos do tipo triângulo, quadrilátero, pentaedro ou hexaedro.

Ao realizar refinamentos sucessivos dentro de uma mesma etapa, consegue-se atingir baixos índices de erro mais rapidamente. Apesar da distorção dos elementos, que aumenta nas consecutivas etapas de refinamento, o processo permite que se obtenha um abaixamento do nível de erro até valores da ordem de 5%, exceto para pontos de aplicação de carga ou apoio. Para níveis de erro menores, corre-se o risco de a distorção exagerada em alguns elementos não permitir o abaixamento do erro, embora isso não seja uma regra. O erro médio pode ser usado como critério para verificar a necessidade da realização de refinamento.

De modo geral, o estimador de erros e o processo de refinamento utilizados mostraram-se bastante eficientes, uma vez que o erro diminui até níveis razoáveis do ponto de vista de engenharia. Caso se desejar erros ainda menores, pode-se iniciar o processo com uma malha mais fina.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Aymone, J. L. F., *Implementação de Estratégia de Refinamento Tipo h, sem Formação de Nós Irregulares, no Sistema GAELI*, Dissertação de Mestrado, Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 1996.
- [2] Zienkiewicz, O. C. and Zhu, J. Z., *A Simple Error Estimator and Adaptive Procedures for Practical Engineering Analysis*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 24, 1987, págs. 337-357.
- [3] Zhu, J. Z. and Zienkiewicz, O. C., *Adaptive Techniques in the Finite Element Method*, Communications in Applied Numerical Methods, Vol. 4, 1988, págs. 197-204.
- [4] Groehs, A. G. e Santos, M. I. G., *GAELI - Gerador e Analisador de Estruturas Lineares*, Grupo de Análise Numérica Aplicada, UFRGS, Porto Alegre, Brasil, 1990.
- [5] Silva, L. C. P., *Um Processo de Refinamento Auto-Adaptativo Tipo h para o Método dos Elementos Finitos*, Dissertação de Mestrado, Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 1991.
- [6] Lyra, P. R. M., Alves, L. D., Coutinho, A. L. G. A. and Landau, L., *Comparison of Mesh Refinement Strategies for the h Version of the Finite Element Method*, X Congresso Ibero-Americano sobre Métodos Computacionais em Engenharia, Vol. 2, 1989, págs. A595-A610, Porto, Portugal.