



## FUNDAMENTACION MATEMATICA DE LA CONEXION NO CONFORME DE MALLAS DE ELEMENTOS FINITOS MEDIANTE UNA FORMULACION HIBRIDA\*

GABRIEL N. GATICA

Departamento de Ingeniería Matemática, Universidad de Concepción,  
Casilla 4009, Concepción, Chile

LUIS E. QUIROZ

Departamento de Ingeniería Mecánica, Universidad de Concepción,  
Casilla 53-C, Concepción, Chile

**Resumen.** En este trabajo, demostramos la existencia y unicidad de solución de la formulación variacional asociada a un esquema híbrido para la conexión no-conforme de mallas de elementos finitos. Además, deducimos condiciones suficientes sobre los subespacios de elementos finitos involucrados para obtener convergencia de las aproximaciones de Galerkin correspondientes. Como problema modelo, se considera el operador de Laplace sobre una partición en dos subdominios de un abierto acotado del plano. Nuestros argumentos se basan principalmente en los resultados clásicos sobre problemas variacionales con restricciones.

**Abstract.** We prove existence and uniqueness of solution of the variational formulation associated to a hybrid scheme for the non-conforming mesh gluing of finite elements. In addition, we derive sufficient conditions on the finite element subspaces in order to obtain convergence of the corresponding Galerkin approximations. As a model problem, we consider the Laplace operator acting on a bounded region in the plane which is subdivided into two domains. Our analysis is mainly based on the classical results for constrained variational problems.

### 1. Introducción

La utilización de los sistemas actuales de Diseño Asistido por Computador (CAD) permite la modelación geométrica de piezas mecánicas y estructuras de una complejidad creciente. Para realizar el análisis físico de estas piezas es necesario construir un modelo de análisis que normalmente consiste en la discretización de la geometría en elementos finitos u otros (elementos de frontera, volúmenes finitos, etc.). El punto de partida para establecer el modelo de análisis es, por lo tanto, el modelo geométrico.

Mientras más compleja es la pieza o estructura, más difícil se hace construir su discretización en forma automática y de calidad controlada según las necesidades del usuario. Para hacer frente a este problema se ha propuesto subdividir la pieza en subdominios geométricos relativamente simples, en los que los generadores automáticos de mallas puedan aplicarse sin mayores restricciones. Estos subdominios se discretizan en forma independiente y deben ser unidos antes del análisis de intervención del usuario. Esto permite elegir el generador y el tipo de elemento más adecuado para cada subdominio según las necesidades del análisis.

\* Este trabajo fue financiado por FONDECYT-Chile a través del proyecto No. 1951018.

La técnica de unión propuesta en [ 7 ] y [ 8 ] es similar a una formulación híbrida donde, si se utilizan elementos finitos de tipo desplazamiento, los conectores entre los subdominios son las tracciones de superficie. La interfaz es incompatible ya que cada subdominio utiliza una función de desplazamiento diferente y en la interfaz se puede elegir una distinta de las otras dos.

Esta técnica puede ser utilizada además para un análisis global/local en el sentido de la distribución de esfuerzos (ver [ 1 ]) y para establecer esquemas de descomposición de dominios en cálculo paralelo (ver [ 3 ], [ 4 ]). Actualmente se investiga la posibilidad de aplicarla a la unión de dominios en problemas acoplados como la interacción sólido-fluido para independizar la discretización del sólido de la del fluido.

El objetivo del presente trabajo es presentar la justificación matemática del método propuesto en [ 7 ], haciendo uso de algunos resultados clásicos sobre problemas variacionales con restricciones. En especial, se demuestra la convergencia, existencia y unicidad de la solución propuesta al problema de conexión entre dos subdominios de discretización incompatible en la interfaz.

El resto del trabajo se presenta como sigue. El problema modelo se describe en la Sección 2. En la Sección 3 se deduce la formulación variacional correspondiente y se demuestran la existencia y unicidad de solución. Finalmente, en la Sección 4 se analiza el esquema de Galerkin asociado y se derivan condiciones suficientes para su convergencia.

## 2. El Problema Modelo

Sea  $\Omega$  un abierto acotado de  $\mathbf{R}^2$  el cual se subdivide, por medio de una interfaz  $\Gamma$ , en dos subdominios  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$  tales que  $\Omega = \Omega_1 \cup \Gamma \cup \Omega_2$ . La frontera de  $\Omega$  se particiona también en dos curvas disjuntas  $\Gamma_u$  y  $\Gamma_t$  tales que  $\partial\Omega = \bar{\Gamma}_u \cup \bar{\Gamma}_t$ . Se define además  $\Gamma_{1,t} := \partial\Omega_1 \cap \Gamma_t$  y  $\Gamma_{2,t} := \partial\Omega_2 \cap \Gamma_t$ .

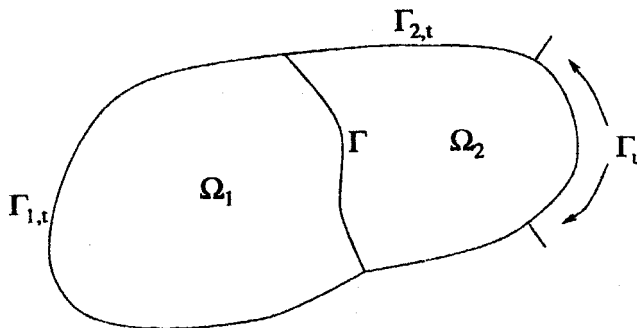


Figura 1: Geometría del Problema.

Entonces, dados  $f_1 \in L^2(\Omega_1)$ ,  $f_2 \in L^2(\Omega_2)$ ,  $g_1 \in H^{-1/2}(\Gamma_{1,t})$  y  $g_2 \in H^{-1/2}(\Gamma_{2,t})$ , consideramos el siguiente problema de valores de contorno: Hallar  $u_1 \in H^1(\Omega_1)$  y  $u_2 \in H^1(\Omega_2)$ , tales que

$$\begin{aligned} -\Delta u_1 &= f_1 \quad \text{en } \Omega_1 \quad , \quad -\Delta u_2 = f_2 \quad \text{en } \Omega_2, \\ \frac{\partial u_1}{\partial \mathbf{n}} &= g_1 \quad \text{en } \Gamma_{1,t} \quad , \quad \frac{\partial u_2}{\partial \mathbf{n}} = g_2 \quad \text{en } \Gamma_{2,t}, \\ u_2 &= 0 \quad \text{en } \Gamma_u \quad , \quad u_1 - u_2 = 0 \quad \text{en } \Gamma. \end{aligned} \tag{1}$$

Aquí,  $\mathbf{n}$  es el vector normal unitario exterior a  $\partial\Omega$ ,  $H^1(\Omega_1)$  y  $H^1(\Omega_2)$  son los espacios de Sobolev de orden 1 usuales, y  $H^{-1/2}(\Gamma_{1,t})$ ,  $H^{-1/2}(\Gamma_{2,t})$  son los espacios duales de los espacios de trazas  $\tilde{H}^{1/2}(\Gamma_{1,t})$  y  $\tilde{H}^{1/2}(\Gamma_{2,t})$ , respectivamente. Además, denotaremos por  $H_{\Gamma_u}^1(\Omega_2)$  al subespacio de  $H^1(\Omega_2)$  con traza nula en  $\Gamma_u$ .

El potencial de la energía en los subdominios  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$  queda expresado, respectivamente, por

$$\Pi_1(u_1) := \frac{1}{2} \int_{\Omega_1} \|\nabla u_1\|^2 dx - \int_{\Gamma_{1,t}} g_1 u_1 ds - \int_{\Omega_1} f_1 u_1 dx$$

y

$$\Pi_2(u_2) := \frac{1}{2} \int_{\Omega_2} \|\nabla u_2\|^2 dx - \int_{\Gamma_{2,t}} g_2 u_2 ds - \int_{\Omega_2} f_2 u_2 dx.$$

Ahora, la condición de transmisión sobre  $\Gamma$  se satisfecerá de manera débil a través de un multiplicador de Lagrange  $\lambda$ , el cual representa la incógnita dada por la derivada normal sobre  $\Gamma$ . De este modo, se induce la definición del potencial  $\Pi : \mathbf{H} \times \mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{R}$ ,

$$\Pi((u_1, u_2), \lambda) := \Pi_1(u_1) + \Pi_2(u_2) + \langle u_1 - u_2, \lambda \rangle \quad \forall ((u_1, u_2), \lambda) \in \mathbf{H} \times \mathbf{Q}, \quad (2)$$

donde  $\mathbf{H} := H^1(\Omega_1) \times H_{\Gamma_u}^1(\Omega_2)$ ,  $\mathbf{Q} := H^{-1/2}(\Gamma)$ , y  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  denota la paridad dual de  $H^{1/2}(\Gamma)$  y  $H^{-1/2}(\Gamma)$  con respecto al producto escalar en  $L^2(\Gamma)$ .

De acuerdo al funcional (2), nuestro problema variacional con restricciones queda dado como sigue: Hallar  $((u_1, u_2), \lambda) \in \mathbf{H} \times \mathbf{Q}$  tal que

$$\Pi((u_1, u_2), \xi) \leq \Pi((v_1, v_2), \xi) \leq \Pi((v_1, v_2), \lambda) \quad \forall ((v_1, v_2), \xi) \in \mathbf{H} \times \mathbf{Q}. \quad (3)$$

Esto significa que interesa maximizar  $\Pi$  con respecto a  $\lambda$  y a la vez minimizar  $\Pi$  con respecto a  $(u_1, u_2)$ . Lo anterior equivale, naturalmente, a imponer que las derivadas direccionales de Gateaux sean iguales a cero. En otras palabras, para cada  $((v_1, v_2), \xi) \in \mathbf{H} \times \mathbf{Q}$  se deben satisfacer las siguientes identidades:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\Pi((u_1 + \epsilon v_1, u_2 + \epsilon v_2), \lambda) - \Pi((u_1, u_2), \lambda)}{\epsilon} = 0, \quad (4)$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\Pi((u_1, u_2), \lambda + \epsilon \xi) - \Pi((u_1, u_2), \lambda)}{\epsilon} = 0. \quad (5)$$

### 3. La Formulación Variacional

Haciendo los cálculos respectivos, la identidad (4) se reduce a

$$\int_{\Omega_1} \nabla u_1 \cdot \nabla v_1 dx + \int_{\Omega_2} \nabla u_2 \cdot \nabla v_2 dx + \langle v_1 - v_2, \lambda \rangle = \mathbf{F}(v_1, v_2) \quad \forall (v_1, v_2) \in \mathbf{H},$$

donde  $\mathbf{F} \in \mathbf{H}'$  es el funcional lineal y acotado definido por

$$\mathbf{F}(v_1, v_2) := \int_{\Omega_1} f_1 v_1 dx + \int_{\Omega_2} f_2 v_2 dx + \int_{\Gamma_{1,t}} g_1 v_1 ds + \int_{\Gamma_{2,t}} g_2 v_2 ds.$$

Similarmente, (5) se simplifica a

$$\langle u_1 - u_2, \xi \rangle = 0 \quad \forall \xi \in \mathbf{Q}.$$

Definamos ahora las formas bilineales  $\mathbf{A} : \mathbf{H} \times \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{R}$  y  $\mathbf{B} : \mathbf{H} \times \mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{R}$ , donde

$$\mathbf{A}((u_1, u_2), (v_1, v_2)) := \int_{\Omega_1} \nabla u_1 \cdot \nabla v_1 dx + \int_{\Omega_2} \nabla u_2 \cdot \nabla v_2 dx \quad \forall (u_1, u_2), (v_1, v_2) \in \mathbf{H},$$

y

$$\mathbf{B}((v_1, v_2), \lambda) := \langle v_1 - v_2, \lambda \rangle \quad \forall ((v_1, v_2), \lambda) \in \mathbf{H} \times \mathbf{Q}.$$

Notemos que  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  son acotadas y que  $\mathbf{A}$  es simétrica. Con esto, el problema variacional (3) puede reescribirse como sigue: *Hallar*  $((u_1, u_2), \lambda) \in \mathbf{H} \times \mathbf{Q}$  tal que

$$\begin{aligned} \mathbf{A}((u_1, u_2), (v_1, v_2)) + \mathbf{B}((v_1, v_2), \lambda) &= \mathbf{F}(v_1, v_2) \quad \forall (v_1, v_2) \in \mathbf{H}, \\ \mathbf{B}((u_1, u_2), \xi) &= 0 \quad \forall \xi \in \mathbf{Q}. \end{aligned} \quad (6)$$

Lo anterior corresponde a una típica formulación variacional de tipo mixto. Por lo tanto, el estudio de existencia y unicidad de solución de (6) requiere de los resultados clásicos debidos a Babuska y Brezzi (ver, por ejemplo, Teorema 7.4.1 en [6], o bien Teorema 1.1 en el Capítulo II de [2]). En nuestro caso, las condiciones suficientes para aplicar estos resultados a la formulación continua (6) están dadas por los siguientes lemas.

LEMA 1. *Sea  $\mathbf{V}$  el espacio definido por*

$$\mathbf{V} := \{(v_1, v_2) \in \mathbf{H} \mid \mathbf{B}((v_1, v_2), \xi) = 0 \quad \forall \xi \in \mathbf{Q}\}.$$

*Entonces  $\mathbf{A}$  es  $\mathbf{V}$ -elíptica, es decir existe  $C > 0$  tal que*

$$\mathbf{A}((v_1, v_2), (v_1, v_2)) \geq C \|(v_1, v_2)\|_{\mathbf{H}}^2 \quad \forall (v_1, v_2) \in \mathbf{V}.$$

DEMOSTRACION. Notemos primero que

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= \{(v_1, v_2) \in \mathbf{H} \mid \langle v_1 - v_2, \xi \rangle = 0 \quad \forall \xi \in \mathbf{Q}\} \\ &= \{(v_1, v_2) \in \mathbf{H} \mid v_1 = v_2 \text{ en } \Gamma\}. \end{aligned}$$

Luego, dado  $(v_1, v_2) \in \mathbf{V}$  se tiene

$$\mathbf{A}((v_1, v_2), (v_1, v_2)) = \int_{\Omega_1} \|\nabla v_1\|^2 dx + \int_{\Omega_2} \|\nabla v_2\|^2 dx = \int_{\Omega} \|\nabla v\|^2 dx,$$

donde  $v := \begin{cases} v_1 & \text{en } \Omega_1 \\ v_2 & \text{en } \Omega_2 \end{cases}$  pertenece al subespacio de  $H^1(\Omega)$  con traza nula en  $\Gamma_u$ , el cual se denota por  $H_{\Gamma_u}^1(\Omega)$ . Puesto que la norma  $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$  y la semi-norma  $|\cdot|_{H^1(\Omega)}$  son equivalentes en  $H_{\Gamma_u}^1(\Omega)$ , se deduce que existe  $C > 0$  tal que

$$\int_{\Omega} \|\nabla v\|^2 dx = |v|_{H^1(\Omega)}^2 \geq C \|v\|_{H^1(\Omega)}^2 = C \left\{ \|v_1\|_{H^1(\Omega_1)}^2 + \|v_2\|_{H^1(\Omega_2)}^2 \right\} = C \|(v_1, v_2)\|_{\mathbf{H}}^2,$$

lo cual completa la demostración. ■

LEMA 2. *Existe una constante positiva  $C$  tal que*

$$\sup_{\substack{(v_1, v_2) \in \mathbf{H} \\ (v_1, v_2) \neq 0}} \frac{\mathbf{B}((v_1, v_2), \xi)}{\|(v_1, v_2)\|_{\mathbf{H}}} \geq C \|\xi\|_{\mathbf{Q}} \quad \forall \xi \in \mathbf{Q}.$$

DEMOSTRACION. En primer lugar, observemos que

$$\sup_{\substack{(v_1, v_2) \in \mathbf{H} \\ (v_1, v_2) \neq 0}} \frac{\mathbf{B}((v_1, v_2), \xi)}{\|(v_1, v_2)\|_{\mathbf{H}}} \geq \sup_{\substack{v_1 \in H^1(\Omega_1) \\ v_1 \neq 0}} \frac{\mathbf{B}((v_1, 0), \xi)}{\|(v_1, 0)\|_{\mathbf{H}}} = \sup_{\substack{v_1 \in H^1(\Omega_1) \\ v_1 \neq 0}} \frac{\langle v_1, \xi \rangle}{\|v_1\|_{H^1(\Omega_1)}}. \quad (7)$$

Ahora, sea  $\gamma : H^1(\Omega_1) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma)$  el operador de trazas usual, esto es  $\gamma v_1 = v_1|_{\Gamma}$  para todo  $v_1 \in H^1(\Omega_1)$ . Sabemos que puede elegirse un subespacio  $\tilde{H}^1(\Omega_1)$  de  $H^1(\Omega_1)$  tal que  $\gamma : \tilde{H}^1(\Omega_1) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma)$  es una biyección acotada. Esto implica que existe  $\tilde{C} > 0$  tal que

$$\|\gamma v_1\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \leq \|v_1\|_{H^1(\Omega_1)} \leq \tilde{C} \|\gamma v_1\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \quad \forall v_1 \in \tilde{H}^1(\Omega_1). \quad (8)$$

Luego, de acuerdo a la definición de norma en espacios duales, podemos escribir

$$\|\xi\|_{\mathbf{Q}} = \|\xi\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} = \sup_{\substack{\mu \in H^{1/2}(\Gamma) \\ \mu \neq 0}} \frac{\langle \mu, \xi \rangle}{\|\mu\|_{H^{1/2}(\Gamma)}} = \sup_{\substack{v_1 \in \tilde{H}^1(\Omega_1) \\ v_1 \neq 0}} \frac{\langle \gamma v_1, \xi \rangle}{\|\gamma v_1\|_{H^{1/2}(\Gamma)}},$$

lo cual, usando (8), implica que

$$\|\xi\|_{\mathbf{Q}} \leq \tilde{C} \sup_{\substack{v_1 \in \tilde{H}^1(\Omega_1) \\ v_1 \neq 0}} \frac{\langle v_1, \xi \rangle}{\|v_1\|_{H^1(\Omega_1)}} \leq \tilde{C} \sup_{\substack{v_1 \in H^1(\Omega_1) \\ v_1 \neq 0}} \frac{\langle v_1, \xi \rangle}{\|v_1\|_{H^1(\Omega_1)}}. \quad (9)$$

Finalmente, (7) y (9) concluyen la demostración. ■

En virtud de los lemas anteriores, podemos enunciar el siguiente resultado principal.

TEOREMA 3. *El problema variacional (6) tiene una única solución  $((u_1, u_2), \lambda) \in \mathbf{H} \times \mathbf{Q}$ . Además, existe una constante  $C > 0$  tal que*

$$\|(u_1, u_2)\|_{\mathbf{H}} + \|\lambda\|_{\mathbf{Q}} \leq C \|\mathbf{F}\|_{\mathbf{H}}.$$

DEMOSTRACION. Es consecuencia directa de los Lemas 1 y 2 y del Teorema 7.4.1 en [6]. ■

#### 4. El Esquema de Galerkin

Para definir las aproximaciones de Galerkin de (6), introducimos ahora subespacios de elementos finitos

$$H_{1,h} \subseteq H^1(\Omega_1) \quad , \quad H_{2,\tilde{h}} \subseteq H_{\Gamma_v}^1(\Omega_2) \quad \text{y} \quad \mathbf{Q}_{\tilde{h}} \subseteq \mathbf{Q},$$

con tamaños de malla dados por  $h$ ,  $\tilde{h}$  y  $\hat{h}$ , respectivamente. Sea además

$$\mathbf{H}_{h,\tilde{h}} := H_{1,h} \times H_{2,\tilde{h}}.$$

Entonces el esquema de Galerkin asociado al problema variacional con restricciones (6) se reduce a: *Hallar  $((u_{1,h}, u_{2,\tilde{h}}), \lambda_{\tilde{h}}) \in \mathbf{H}_{h,\tilde{h}} \times \mathbf{Q}_{\tilde{h}}$  tal que*

$$\Pi((u_{1,h}, u_{2,\tilde{h}}), \xi_{\tilde{h}}) \leq \Pi((v_{1,h}, v_{2,\tilde{h}}), \xi_{\tilde{h}}) \leq \Pi((v_{1,h}, v_{2,\tilde{h}}), \lambda_{\tilde{h}}) \quad \forall ((v_{1,h}, v_{2,\tilde{h}}), \xi_{\tilde{h}}) \in \mathbf{H}_{h,\tilde{h}} \times \mathbf{Q}_{\tilde{h}}.$$

De manera similar al caso continuo, utilizando nuevamente las derivadas direccionales, el problema anterior puede reescribirse, equivalentemente, como: *Hallar  $((u_{1,h}, u_{2,\tilde{h}}), \lambda_{\tilde{h}}) \in \mathbf{H}_{h,\tilde{h}} \times \mathbf{Q}_{\tilde{h}}$  tal que*

$$\begin{aligned} \mathbf{A}((u_{1,h}, u_{2,\tilde{h}}), (v_{1,h}, v_{2,\tilde{h}})) + \mathbf{B}((v_{1,h}, v_{2,\tilde{h}}), \lambda_{\tilde{h}}) &= \mathbf{F}(v_{1,h}, v_{2,\tilde{h}}) \quad \forall (v_{1,h}, v_{2,\tilde{h}}) \in \mathbf{H}_{h,\tilde{h}}, \\ \mathbf{B}((u_{1,h}, u_{2,\tilde{h}}), \xi_{\tilde{h}}) &= 0 \quad \forall \xi_{\tilde{h}} \in \mathbf{Q}_{\tilde{h}}. \end{aligned} \quad (10)$$

Para la existencia y unicidad de solución de (10), y también para la convergencia con respecto a la solución de (6), recurrimos nuevamente a los resultados clásicos de la teoría de Babuska-Brezzi (ver Teoremas 7.4.2 y 7.4.3 en [6], Teorema 1.1 en el Capítulo II de [5] o bien Teorema 2.1 en el Capítulo II de [2]).

Las condiciones suficientes son análogas a las dadas en Lemas 1 y 2, y se escriben como sigue:

(I) Existe  $\alpha > 0$ , independiente de  $h$ ,  $\tilde{h}$  y  $\hat{h}$ , tal que

$$\mathbf{A}((v_{1,h}, v_{2,\tilde{h}}), (v_{1,h}, v_{2,\tilde{h}})) \geq \alpha \|(v_{1,h}, v_{2,\tilde{h}})\|_{\mathbf{H}}^2 \quad \forall (v_{1,h}, v_{2,\tilde{h}}) \in \mathbf{V}_{h,\tilde{h}},$$

donde

$$\mathbf{V}_{h,\tilde{h}} := \{(v_{1,h}, v_{2,\tilde{h}}) \in \mathbf{H}_{h,\tilde{h}} \mid \mathbf{B}((v_{1,h}, v_{2,\tilde{h}}), \xi_{\hat{h}}) = 0 \quad \forall \xi_{\hat{h}} \in \mathbf{Q}_{\hat{h}}\}.$$

(II) Existe  $\beta > 0$ , independiente de  $h$ ,  $\tilde{h}$  y  $\hat{h}$ , tal que

$$\sup_{\substack{(v_{1,h}, v_{2,\tilde{h}}) \in \mathbf{H}_{h,\tilde{h}} \\ (v_{1,h}, v_{2,\tilde{h}}) \neq 0}} \frac{\mathbf{B}((v_{1,h}, v_{2,\tilde{h}}), \xi_{\hat{h}})}{\|(v_{1,h}, v_{2,\tilde{h}})\|_{\mathbf{H}}} \geq \beta \|\xi_{\hat{h}}\|_{\mathbf{Q}} \quad \forall \xi_{\hat{h}} \in \mathbf{Q}_{\hat{h}}.$$

Es importante notar ahora que

$$\mathbf{V}_{h,\tilde{h}} = \{(v_{1,h}, v_{2,\tilde{h}}) \in \mathbf{H}_{h,\tilde{h}} \mid \int_{\Gamma} (v_{1,h} - v_{2,\tilde{h}}) \xi_{\hat{h}} ds = 0 \quad \forall \xi_{\hat{h}} \in \mathbf{Q}_{\hat{h}}\}.$$

En consecuencia, si la identidad

$$\int_{\Gamma} (v_{1,h} - v_{2,\tilde{h}}) \xi_{\hat{h}} ds = 0 \quad \forall \xi_{\hat{h}} \in \mathbf{Q}_{\hat{h}}$$

implica que necesariamente  $v_{1,h}$  y  $v_{2,\tilde{h}}$  coinciden en  $\Gamma$ , entonces se deduce que  $\mathbf{V}_{h,\tilde{h}}$  es un subespacio de  $\mathbf{V}$ . En esta situación, aplicamos nuevamente el Lema 1 y concluimos que (I) se verifica trivialmente.

Por otra parte, es claro que

$$\sup_{\substack{(v_{1,h}, v_{2,\tilde{h}}) \in \mathbf{H}_{h,\tilde{h}} \\ (v_{1,h}, v_{2,\tilde{h}}) \neq 0}} \frac{\mathbf{B}((v_{1,h}, v_{2,\tilde{h}}), \xi_{\hat{h}})}{\|(v_{1,h}, v_{2,\tilde{h}})\|_{\mathbf{H}}} \geq \sup_{\substack{v_{1,h} \in H_{1,h} \\ v_{1,h} \neq 0}} \frac{\langle v_{1,h}, \xi_{\hat{h}} \rangle}{\|v_{1,h}\|_{H^1(\Omega_1)}}$$

y también

$$\sup_{\substack{(v_{1,h}, v_{2,\tilde{h}}) \in \mathbf{H}_{h,\tilde{h}} \\ (v_{1,h}, v_{2,\tilde{h}}) \neq 0}} \frac{\mathbf{B}((v_{1,h}, v_{2,\tilde{h}}), \xi_{\hat{h}})}{\|(v_{1,h}, v_{2,\tilde{h}})\|_{\mathbf{H}}} \geq \sup_{\substack{v_{2,\tilde{h}} \in H_{2,\tilde{h}} \\ v_{2,\tilde{h}} \neq 0}} \frac{\langle v_{2,\tilde{h}}, \xi_{\hat{h}} \rangle}{\|v_{2,\tilde{h}}\|_{H^1(\Omega_2)}}.$$

Estas desigualdades inducen dos condiciones suficientes para que se satisfaga (II).

De acuerdo al análisis anterior, podemos establecer ahora el siguiente resultado.

TEOREMA 4. Supongamos que los espacios de elementos finitos  $H_{1,h}$ ,  $H_{2,\bar{h}}$  y  $\mathbf{Q}_{\bar{h}}$  se eligen de modo que las siguientes condiciones se satisfacen:

i) La identidad

$$\int_{\Gamma} (v_{1,h} - v_{2,\bar{h}}) \xi_{\bar{h}} ds = 0 \quad \forall \xi_{\bar{h}} \in \mathbf{Q}_{\bar{h}}$$

implica que

$$v_{1,h} = v_{2,\bar{h}} \quad \text{en } \Gamma.$$

ii) Existe  $\beta > 0$ , independiente de  $h$ ,  $\bar{h}$  y  $\hat{h}$ , tal que una de las siguientes desigualdades se cumple:

$$\sup_{\substack{v_{1,h} \in H_{1,h} \\ v_{1,h} \neq 0}} \frac{\int_{\Gamma} v_{1,h} \xi_{\bar{h}} ds}{\|v_{1,h}\|_{H^1(\Omega_1)}} \geq \beta \|\xi_{\bar{h}}\|_{\mathbf{Q}} \quad \forall \xi_{\bar{h}} \in \mathbf{Q}_{\bar{h}},$$

o bien

$$\sup_{\substack{v_{2,\bar{h}} \in H_{2,\bar{h}} \\ v_{2,\bar{h}} \neq 0}} \frac{\int_{\Gamma} v_{2,\bar{h}} \xi_{\bar{h}} ds}{\|v_{2,\bar{h}}\|_{H^1(\Omega_2)}} \geq \beta \|\xi_{\bar{h}}\|_{\mathbf{Q}} \quad \forall \xi_{\bar{h}} \in \mathbf{Q}_{\bar{h}}.$$

Entonces, el esquema de Galerkin (10) tiene una única solución  $((u_{1,h}, u_{2,\bar{h}}), \lambda_{\bar{h}}) \in \mathbf{H}_{h,\bar{h}} \times \mathbf{Q}_{\bar{h}}$ . Además, existe una constante positiva  $C$ , independiente de  $h$ ,  $\bar{h}$  y  $\hat{h}$ , tal que la estimación de Cea ocurre, esto es

$$\begin{aligned} & \| (u_1, u_2) - (u_{1,h}, u_{2,\bar{h}}) \|_{\mathbf{H}} + \| \lambda - \lambda_{\bar{h}} \|_{\mathbf{Q}} \\ & \leq C \left\{ \inf_{(v_1, v_2, \lambda) \in \mathbf{H}_{h,\bar{h}}} \| (u_1, u_2) - (v_1, v_2, \lambda) \|_{\mathbf{H}} + \inf_{\xi_{\bar{h}} \in \mathbf{Q}_{\bar{h}}} \| \lambda - \xi_{\bar{h}} \|_{\mathbf{Q}} \right\}, \end{aligned} \quad (11)$$

donde  $((u_1, u_2), \lambda)$  es la única solución de (6).

DEMOSTRACION. Se sigue de nuestras deducciones previas y del resultado clásico de Babuska-Brezzi (ver, por ejemplo, Teoremas 7.4.2 y 7.4.3 en [6]). ■

Como observaciones finales, es preciso señalar primero que la estimación de Cea dada por (11) garantiza la convergencia de las aproximaciones de Galerkin por cuanto la cota superior depende sólo de las distancias a los subespacios de elementos finitos, las cuales tienden a cero a medida que  $h$ ,  $\bar{h}$  y  $\hat{h}$  se acercan a cero.

En segundo lugar, debemos hacer notar que el análisis presentado en este trabajo puede extenderse fácilmente, y sin mayores cambios, al caso del operador de elasticidad. En efecto, en esta situación, las incógnitas corresponden a desplazamientos en  $\Omega$  y tracciones sobre  $\Gamma$ , y la forma bilineal  $\mathbf{A}$  queda dada por:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}((\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2), (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)) &= \int_{\Omega_1} (\lambda_1 \operatorname{div} \mathbf{u}_1 \operatorname{div} \mathbf{v}_1 + 2\mu_1 \mathbf{e}(\mathbf{u}_1) : \mathbf{e}(\mathbf{v}_1)) dx \\ &+ \int_{\Omega_2} (\lambda_2 \operatorname{div} \mathbf{u}_2 \operatorname{div} \mathbf{v}_2 + 2\mu_2 \mathbf{e}(\mathbf{u}_2) : \mathbf{e}(\mathbf{v}_2)) dx, \end{aligned}$$

donde  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ,  $\mu_1$  y  $\mu_2$  son las constantes de Lamé.

**Referencias**

- [ 1] M.A. Aminpour, J.B Ramson and S.L. McCleary, A coupled analysis method for structures with independently modelled finite element subdomains. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **38**, 3695-3718, (1995).
- [ 2] F. Brezzi and M. Fortin, *Mixed and Hybrid Finite Element Methods*. Springer-Verlag, New York, 1991.
- [ 3] C. Farhat and M. Geradin, Using a reduced number of Lagrange multipliers for assembling parallel incomplete field finite element approximations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **97**, 333-354, (1992).
- [ 4] C. Farhat and M. Geradin, A hybrid component mode synthesis method for incompatible substructures. CU-CSSC-91-29 *Technical Report*, University of Colorado at Boulder, (1991).
- [ 5] V. Girault and P. Raviart, *Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations: Theory and Algorithms*. Springer-Verlag, Berlin, 1986.
- [ 6] A. Quarteroni and A. Valli, *Numerical Approximation of Partial Differential Equations*. Springer-Verlag, Berlin, 1994.
- [ 7] L. Quiroz and P. Beckers, Non-conforming mesh gluing in the finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **38**, 2165-2184, (1995).
- [ 8] L. Quiroz y P. Ibañez, Conexión no-conforme de mallas de elementos finitos mediante una formulación híbrida. *Mecánica Computacional*, vol. 16, S. Idelsohn y V. Sonzogni (Eds.), AMCA, Argentina, 1994.