



**"SOLUCIONES DE DIFERENCIAS FINITAS Y DE RAYLEIGH RITZ DE FLEXION LINEAL DE SOLIDOS MICROPOLARES DE COSSERAT"**

Marcela Nieto(1) y Guillermo Etse (2)

(1) Auxiliar en Investigación

(2) Profesor

Universidad Nacional de Santiago del Estero-CONICET

**RESUMEN:**

Las particularidades de la teoría micropolar continua propuesta por los hermanos Cosserat es analizada en el caso de flexión plana elástica lineal y comparadas con las soluciones de la teoría clásica del continuo. Los resultados muestran la importancia de los parámetros adicionales del continuo de Cosserat en la predicción del campo de los desplazamientos.

**1.-INTRODUCCION:**

A comienzos de este siglo los hermanos Cosserat (1) introdujeron una formulación generalizada de los medios continuos. Esta se caracterizaba por rotaciones independientes de cualquier campo de desplazamientos. Es así que en el continuo Cosserat cada punto material equivale a un cuerpo rígido infinitesimal de tal manera que se desarrollan no solo las tensiones convencionales sino también momentos tensionales.

El continuo de Cosserat constituye una teoría original ya que a nivel tensional equivale a admitir que el tensor de tensiones es asimétrico, lo cual en la teoría clásica es a priori rechazado en base al axioma de Boltzmann.

Recién muchas décadas después de ser propuesta, la teoría micropolar de Cosserat ha encontrado gran atención en la comunidad científica. Como consecuencia, autores varios han publicado trabajos prominentes en los cuales se establecían relaciones con el continuo clásico y se analizaban características particulares de la teoría micropolar. Entre otros podemos citar los trabajos de Guenther (2), Mindlin (3), Toupin (4), Schaefer (5) y Eringen (6). Estos fueron atraídos mas por el aspecto teórico de los continuos no convencionales que por la potencialidad que ellos brindaban para la simulación computacional del campo de deformación de sólidos, cosa que en aquella época estaba fuera de alcance.

En los últimos años ha surgido un interés renovado en los continuos Cosserat debido al hecho de que los parámetros materiales adicionales conducen a relevantes ventajas en los análisis computacionales. En particular estas ventajas son mas categóricas en el caso de simulación de procesos de localización de deformaciones en sólidos elastoplásticos que incluyen ablandamientos, los cuales conducen a problemas patológicos de falta de objetividad de los resultados respecto del tamaño de la malla de elementos finitos. Entre otros podemos citar en este contexto los autorizados trabajos de Muelhaus (7), de Borst (8) y Steinmann y Willam (9).

En este trabajo se presentan resultados de problemas de flexión plana en medios micropolares elásticos lineales y los mismos son cotejados con las predicciones de la teoría clásica. Los análisis se llevan a cabo con el Método de las Diferencias Finitas y con el método de Rayleigh Ritz. Los resultados muestran la fundamental importancia de la longitud característica de Cosserat en la variación de los campos de desplazamiento y de deformación obtenidos.

Estas investigaciones se enmarcan dentro de los trabajos preliminares que viene desarrollando el primer autor para completar la tesis de Magister en Ingeniería Estructural de la Universidad de Tucumán.

## 2.- ECUACIONES FUNDAMENTALES DEL CONTINUO ELASTICO COSSERAT

### 2.1.- DESPLAZAMIENTOS Y DEFORMACIONES

La teoría micropolar se basa en la descomposición del tensor de deformaciones en una parte simétrica  $e_{[ij]}$

$$e_{(ij)} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial j} + \frac{\partial u_j}{\partial i} \right) \quad (1)$$

y otra asimétrica  $e_{[ij]}$

$$e_{[ij]} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial j} - \frac{\partial u_j}{\partial i} \right) - e_{ijz} * \phi_z \quad (2)$$

donde  $\phi_z$  representa el giro polar de cada punto material, el cual depende de los desplazamientos.

En el estado plano el tensor de deformaciones, en su parte simétrica y asimétrica estará completamente definida por cuatro de sus componentes

$$\begin{aligned} e_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} & e_{(xx)} &= \frac{\partial u}{\partial x} & e_{[xx]} &= 0 \\ e_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} & e_{(yy)} &= \frac{\partial v}{\partial y} & e_{[yy]} &= 0 \\ e_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} - \phi_z & e_{(xy)} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) & e_{[xy]} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \phi_z \\ e_{yx} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \phi_z & e_{(yx)} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) & e_{[yx]} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \phi_z \end{aligned} \quad (3)$$

Una medida adicional de la deformación es el tensor de curvaturas  $\kappa_{ij}$ , definido como

$$\kappa_{iz} = \frac{\partial \phi_z}{\partial i}$$

para el caso plano es  $i=x,y$

$$\begin{aligned} \kappa_{xz} &= \frac{\partial \phi_z}{\partial x} \\ \kappa_{yz} &= \frac{\partial \phi_z}{\partial y} \end{aligned} \quad (4)$$

que es la medida de la rotación sobre cada eje del sistema de coordenadas.

### 2.2.- EQUILIBRIO ESTÁTICO

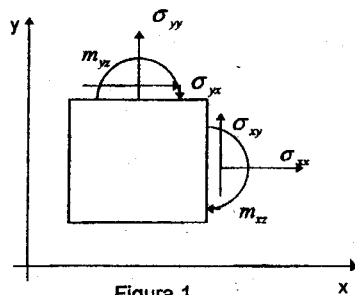


Figura 1

A cada punto del continuo micropolar se le asigna un vector de desplazamiento y un vector de giro. La figura 1 indica las tensiones en el elemento micropolar infinitesimal.

Consideramos el equilibrio del elemento infinitesimal del continuo micropolar. El equilibrio de fuerzas y momentos conduce a las ecuaciones:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + b_j = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial m_{ij}}{\partial x_i} + e_{ijz} * \sigma_{ij} + v_z = 0 \quad (6)$$

donde  $b_j$  son las fuerzas másicas,  $v_z$  el momento de volumen del cuerpo y  $m_{ij}$  denotan las tensiones momentos definidas como momento por unidad de superficie.

Desarrollando estas ecuaciones para el caso bidimensional obtenemos

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} = 0 \quad (7)$$

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = 0 \quad (8)$$

$$\frac{\partial m_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial m_{yz}}{\partial y} - (\sigma_{yx} - \sigma_{xy}) = 0 \quad (9)$$

en las cuales fueron considerandas nulas las fuerzas de masa  $b_y$  y los momentos de volumen  $v_z$ .

### 2.3.- CONTINUO ELASTICO MICROPOLAR

Las ecuaciones constitutivas del material derivadas de las expresiones de la energía potencial, para el caso isotrópico y lineal elástico quedan definidas mediante las dos expresiones siguientes:

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl} * e_{kl} \quad (10)$$

$$m_{ix} = C_{ij} * \kappa_{jx} \quad (11)$$

donde el tensor de cuarto orden E esta definido como

$$E_{ijkl} = \alpha_1 * \delta_{ij} * \delta_{kl} + \alpha_2 * \delta_{ik} * \delta_{jl} + \alpha_3 * \delta_{il} * \delta_{jk} \quad (12)$$

con las constantes

$$\alpha_1 = \lambda \quad \alpha_2 = \mu + \mu_c \quad \alpha_3 = \mu - \mu_c$$

siendo  $\lambda$  y  $\mu$  las constantes de Lamé y  $\mu_c$  la constante de Cosserat.

A su vez

$$C_{ij} = c_{ijkl} = \beta * l_c^2 * \delta_{ij}$$

$$C_{xx} = C_{yy} = \beta * l_c^2$$

$$C_{xy} = C_{yx} = 0$$

con lo cual, teniendo en cuenta las (3),(4) y (11), nos queda

$$m_{xx} = C_{xx} * \kappa_{xx} = \beta * l_c^2 * \kappa_{xx} \quad (13)$$

$$m_{yz} = C_{yy} * \kappa_{yz} = \beta * I_c^2 * \kappa_{yz} \quad (14)$$

La ecuación constitutiva en notación matricial resulta

$$\sigma = E * \varepsilon$$

con los vectores

$$\sigma^T = [\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}, \sigma_{yx}, m_{xx}, m_{yz}]$$

$$\varepsilon^T = [\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{xy}, \varepsilon_{yx}, \kappa_{xx}, \kappa_{yz}]$$

y la matriz material

$$E = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu + \mu_c & \mu - \mu_c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu - \mu_c & \mu + \mu_c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_c^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_c^2 \end{bmatrix}$$

En lo que sigue buscamos una expresión que relacione el giro  $\phi_z$  e Cosserat con los desplazamientos.

Desarrollando las ecuaciones constitutivas (10) y (11) obtenemos

$$\sigma_{xx} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \frac{\partial v}{\partial y} \quad (15)$$

$$\sigma_{yy} = \lambda \frac{\partial u}{\partial x} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v}{\partial y} \quad (16)$$

$$\sigma_{xy} = (\mu + \mu_c) \left[ \frac{\partial v}{\partial x} - \phi_z \right] + (\mu - \mu_c) \left[ \frac{\partial u}{\partial y} + \phi_z \right] = (\mu + \mu_c) \frac{\partial v}{\partial x} + (\mu - \mu_c) \frac{\partial u}{\partial y} - 2\mu_c \phi_z \quad (17)$$

$$\sigma_{yx} = (\mu - \mu_c) \left[ \frac{\partial v}{\partial x} - \phi_z \right] + (\mu + \mu_c) \left[ \frac{\partial u}{\partial y} + \phi_z \right] = (\mu - \mu_c) \frac{\partial v}{\partial x} + (\mu + \mu_c) \frac{\partial u}{\partial y} + 2\mu_c \phi_z \quad (18)$$

$$m_{xx} = \beta_c^2 \kappa_{xx} = \beta_c^2 \frac{\partial \phi_z}{\partial x} \quad (19)$$

$$m_{yz} = \beta_c^2 \kappa_{yz} = \beta_c^2 \frac{\partial \phi_z}{\partial y} \quad (20)$$

Reemplazando estas expresiones en las ecuaciones de equilibrio nos queda

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \lambda \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + (\mu - \mu_c) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + (\mu + \mu_c) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2\mu_c \frac{\partial \phi_z}{\partial y} = 0 \quad (21)$$

$$\lambda \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + (\mu + \mu_c) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (\mu - \mu_c) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 2\mu_c \frac{\partial \phi_z}{\partial x} = 0 \quad (22)$$

$$\beta_c^2 \frac{\partial^3 \phi_z}{\partial x^2} + (\mu + \mu_c) \frac{\partial \phi_z}{\partial x} + (\mu - \mu_c) \frac{\partial \phi_z}{\partial y} - 2\mu_c \phi_z + \beta_c^2 \frac{\partial^3 \phi_z}{\partial y^2} - (\mu - \mu_c) \frac{\partial \phi_z}{\partial x} - (\mu + \mu_c) \frac{\partial \phi_z}{\partial y} - 2\mu_c \phi_z \quad (23)$$

Derivando las ecuaciones (21) y (22) respecto de  $y$  y de  $x$  respectivamente y sumandolas obtenemos una expresión para el Laplaciano  $\nabla^2 \phi_{z,xx}$ . Esta la igualamos con

$$\frac{\partial^2 \phi_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_z}{\partial y^2} = \frac{(2\mu_c)}{\beta_c^2} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{(2\mu_c)}{\beta_c^2} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{4\mu_c}{\beta_c^2} \phi_z \quad (24)$$

la obtenida de la (23). Así obtenemos finalmente una relación entre el giro y los desplazamientos dada por

$$\phi_z = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \left( \frac{\mu + \mu_c}{(2\mu_c)^2} \right) \frac{\beta_c^2}{2} \left[ \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} - \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \right] \quad (25)$$

**3.-PROBLEMAS DE VALORES DE BORDE****3.1.-FLEXION SIMPLE ELASTICA LINEAL**

El caso particular de la flexión de vigas de pequeño porte podemos enmarcarlo dentro del criterio de conservación de la linealidad de las secciones de acuerdo a la hipótesis de Bernoulli. El valor del corrimiento en el sentido del eje longitudinal de la pieza es en este caso

$$u = -y \frac{\partial v}{\partial x}$$

el giro  $\phi_z$  se reduce entonces a:

$$\phi_z = \frac{\partial v}{\partial x} \quad (26)$$

Las tensiones y momentos en el caso de flexión simple donde se desprecia la incidencia del esfuerzo de corte, resultan

$$\sigma_{xx} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \epsilon}{\partial x} = -EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (27)$$

$$m_{xx} = \beta I_c^2 \kappa_{xx} = \beta I_c^2 \frac{\partial \phi_z}{\partial x} = -\beta I_c^2 \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} \quad (28)$$

Nota: la hipótesis de Bernoulli, secciones planas luego de la deformación, condiciona el rango de variación de  $l_c$ , de acuerdo a  $h \leq l_c$ , siendo  $h$  la altura de la pieza.

**3.2.-METODO DE LAS DIFERENCIAS FINITAS:**

De las expresiones definidas en la sección anterior pueden deducirse una ecuación diferencial de equilibrio cuya solución la encontramos con el Método de las Diferencias Finitas.

El momento externo que actúa sobre la pieza se obtiene sumando los momentos producidos por estos esfuerzos internos de acuerdo a

$$M = -\int_0^l \sigma_{xx} b y dy - m_{xx} b h = -EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \beta I_c^2 b h \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} = -(EI + \beta I_c^2 b h) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

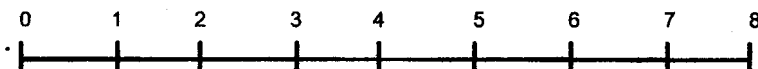
Si llamamos:

$$C = -(EI + \beta I_c^2 b h)$$

la ecuación diferencial queda de la forma:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{M}{C}$$

Para aplicar el Método de las Diferencias Finitas, dividimos la viga en ocho tramos de la siguiente manera:



las condiciones de borde para este problema son:

$$\text{para } x=0 \quad v_0=0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0 = \frac{1}{2a}(v_0 - v_1) \Rightarrow v_1 = v_0$$

El sistema de ecuaciones en función de las incógnitas  $v_i$  resulta

$$\frac{1}{a^2}(v_9 - 2v_0 + v_1) = \frac{1}{a^2}(2v_1 - 2v_0) = \frac{1}{a^2}(2v_1) = \frac{M_9}{C} = \frac{Pl}{C}$$

$$\frac{1}{a^2}(v_0 - 2v_1 + v_2) = \frac{M_1}{C} = \frac{7Pl}{8C}$$

$$\frac{1}{a^2}(v_1 - 2v_2 + v_3) = \frac{M_2}{C} = \frac{3Pl}{4C}$$

$$\frac{1}{a^2}(v_2 - 2v_3 + v_4) = \frac{M_{13}}{C} = \frac{5Pl}{8C}$$

$$\frac{1}{a^2}(v_3 - 2v_4 + v_5) = \frac{M_4}{C} = \frac{Pl}{2C}$$

$$\frac{1}{a^2}(v_4 - 2v_5 + v_6) = \frac{M_5}{C} = \frac{3Pl}{8C}$$

$$\frac{1}{a^2}(v_5 - 2v_6 + v_7) = \frac{M_7}{C} = \frac{Pl}{4C}$$

$$\frac{1}{a^2}(v_6 - 2v_7 + v_8) = \frac{M_7}{C} = \frac{Pl}{8C}$$

Si consideramos los siguientes valores datos

$$P := 3 \quad l := 40 \quad E := 30000 \quad b := 10 \quad h := 10 \quad \beta := \frac{E}{12}$$

$$l_c := h \quad i := 0..7 \quad j := 0..7$$

$$\text{Resulta } C := -b \cdot h \cdot \left( \frac{E \cdot h^2}{12} + \beta \cdot l_c^2 \right) \quad C = -5 \cdot 10^7$$

La matriz A de los coeficientes del sistema de ecuaciones es

$$A := \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1.5 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2.5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3.5 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

El vector de los momentos debidos al esfuerzo exterior P es:

$$M = \left( P \cdot l, \frac{7 \cdot P \cdot l}{8}, \frac{3 \cdot P \cdot l}{4}, \frac{5 \cdot P \cdot l}{8}, \frac{P \cdot l}{2}, \frac{3 \cdot P \cdot l}{8}, \frac{P \cdot l}{4}, \frac{P \cdot l}{8} \right) \cdot \frac{l^2}{64 \cdot C}$$

con lo que el vector de las deflexiones resulta

$$v = (-3 \cdot 10^{-5}, -1.125 \cdot 10^{-4}, -2.4 \cdot 10^{-4}, -4.05 \cdot 10^{-4}, -6 \cdot 10^{-4}, -8.175 \cdot 10^{-4}, -0.001, -0.001)$$

En el caso que  $l_c = 2 \cdot h$ , el vector de las deflexiones resulta

$$l_c := 2 \cdot h \quad C := -b \cdot h \cdot \left( \frac{E \cdot h^2}{12} + \beta \cdot l_c^2 \right) \quad C = -1.25 \cdot 10^8$$

Finalmente si  $I_c=0$  obtenemos la misma solución del continuo clásico

$$I_c = 0 \quad C = -b \cdot h \cdot \left( \frac{E \cdot h^2}{12} + \beta \cdot I_c^2 \right) \quad C = -2.5 \cdot 10^7$$

Los resultados se muestran en las figuras 1, 3, 4 y 5.

### 3.3.-METODO DE RAYLEIGH - RITZ

En el caso de flexión en un continuo micropolar el potencial de la energía viene dado de la forma

$$\pi = \frac{1}{2} \int_0^l EI \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l \beta I_c^2 b h \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^2 dx - P v \Big|_0^l$$

con las condiciones de borde

$$x=0 \quad v_0=0 \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

Consideramos para el campo de desplazamientos verticales una ecuación polinómica de la forma:

$$v = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3$$

donde los gradientes serán entonces

$$\frac{\partial v}{\partial x} = a_2 + 2a_3 x + 3a_4 x^2$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 2a_3 + 6a_4 x$$

De las condiciones de borde resulta  $a_1 = 0$  y  $a_2 = 0$

Reemplazando estos valores en la ecuación polinómica y sus gradientes y luego en la expresión de  $\pi$  obtenemos

$$\pi = \frac{1}{2} EI \int_0^l (2a_3 + 6a_4 x)^2 dx + \frac{\beta I_c^2 b h}{2} \int_0^l (2a_3 + 6a_4 x)^2 dx - P(a_3 x^2 + a_4 x^3) \Big|_0^l$$

$$\pi = \frac{1}{2} EI (4a_3^2 l + 12a_3 a_4 l^2 + 12a_4^2 l^3) + \frac{\beta I_c^2 b h}{2} (4a_3^2 l + 12a_3 a_4 l^2 + 12a_4^2 l^3) - Pa_3 l^2 - Pa_4 l^3$$

Para encontrar las constantes

$$\pi = \frac{1}{2} EI \int_0^l (2a_3 + 6a_4 x)^2 dx + \frac{\beta I_c^2 b h}{2} \int_0^l (2a_3 + 6a_4 x)^2 dx - P(a_3 x^2 + a_4 x^3) \Big|_0^l$$

$$\pi = \frac{1}{2} EI (4a_3^2 l + 12a_3 a_4 l^2 + 12a_4^2 l^3) + \frac{\beta I_c^2 b h}{2} (4a_3^2 l + 12a_3 a_4 l^2 + 12a_4^2 l^3) - Pa_3 l^2 - Pa_4 l^3$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial a_3} = \frac{1}{2} EI (8a_3 l + 12a_4 l^2) + \frac{\beta I_c^2 b h}{2} (8a_3 l + 12a_4 l^2) - Pl^2$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial a_4} = \frac{1}{2} EI (12a_3 l^2 + 24a_4 l^3) + \frac{\beta I_c^2 b h}{2} (12a_3 l^2 + 24a_4 l^3) - Pl^3$$

$$I_c = l^2 b h$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial a_3} = 4EI a_3 l + 6EI a_4 l^2 + 4\beta I_c a_3 l + 6\beta I_c a_4 l^2 - Pl^2 = 0$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial a_4} = 6EI a_3 l^2 + 12EI a_4 l^3 + 6\beta I_c a_3 l^2 + 12\beta I_c a_4 l^3 - Pl^3 = 0$$

A partir de este sistema obtenemos los valores de  $a_3$  y  $a_4$ :

$$4(EI + \beta I_c) a_3 l + 6(EI + \beta I_c) a_4 l^2 = Pl^2$$

$$4(EI + \beta I_c) a_3 l^2 + 6(EI + \beta I_c) a_4 l^3 = Pl^3$$

Los valores de las constantes son:

$$a_3 = \frac{Pl}{2C}$$

$$a_4 = -\frac{P}{6C}$$

De esta forma la ecuación de los descensos verticales de la viga para el estado de cargas planteado es:

$$v = \frac{P}{2C} \left(1 - \frac{x}{3}\right) x^2$$

El mismo ejemplo numérico desarrollado por el método de las diferencias finitas, se calcula con Rayleigh Ritz, y arroja los siguientes resultados, para  $lc=h$

$$lc = h \quad C := -b \cdot h \cdot \left( \frac{E \cdot h^2}{12} + \beta \cdot l_c^2 \right) \quad C = -5 \cdot 10^7 \quad x := 5$$

$$V_i := \frac{P}{2 \cdot C} \cdot \left(1 - \frac{x \cdot i}{3}\right) \cdot (x \cdot i)^2$$

Tomando  $lc=2 \cdot h$ :

$$lc = 2 \cdot h \quad C := -b \cdot h \cdot \left( \frac{E \cdot h^2}{12} + \beta \cdot l_c^2 \right) \quad C = -1.25 \cdot 10^8 \quad x := 5$$

$$V_i := \frac{P}{2 \cdot C} \cdot \left(1 - \frac{x \cdot i}{3}\right) \cdot (x \cdot i)^2$$

En el caso de que  $lc$  sea 0, estamos en el caso del modelo clásico:

$$lc = 0 \quad C := -b \cdot h \cdot \left( \frac{E \cdot h^2}{12} + \beta \cdot l_c^2 \right) \quad C = -2.5 \cdot 10^7 \quad x := 5$$

$$V_i := \frac{P}{2 \cdot C} \cdot \left(1 - \frac{x \cdot i}{3}\right) \cdot (x \cdot i)^2$$

Los resultados se muestran en las figuras 2, 3, 4 y 5.

#### 4.- CONCLUSIONES:

En este trabajo se analizaron las particularidades de la flexión plana de sólidos micropolares elásticos lineales. La influencia de la longitud característica en la ductilidad del continuo se mostró por medio de las soluciones de Diferencias Finitas y de Rayleigh Ritz. Se observa que en el caso límite, cuando  $lc$  tiende a cero, la solución del continuo micropolar reproduce el campo de desplazamientos de la teoría clásica, si bien en este caso la longitud de característica es menor que la altura de la viga. La flexión del sólido micropolar no satisface la hipótesis de Bernoulli.

#### REFERENCIAS:

- (1) Cosserat, E. y F.: *Théorie des corps déformable*. París (1909)
- (2) Guenther, W.: *Zur Statik und Kinematik des Cosserat'schen Kontinuums*, Abh. Braunschweig. Wiss. Ges (1958)
- (3) Mindlin, R.D.: *Influence of couple-stress on stress concentration*. Exp. Mech.3 (1963)
- (4) Toupin, R.A.: *Theories of Elasticity with Couple-stress*, Arch. Rat. Mech. Analysis 17 (1964)



- (5) Schaefer, H.: Das Cosserat-Continuum, ZAMM 47 (1967)
- (6) Eringen, A.C.: Theory of Micropolar Elasticity, in Fracture and Advanced Treatise, Academic Press (1968)
- (7) Muehlhaus, H.B.: Application of Cosserat-theory in numerical solutions of limit load problems, Ing.-Archiv. 59 (1989)
- (8) de Borst, R.: Simulation of localisation using Cosserat theory, Pineridge Press, Swansea (1990)
- (9) Steinman, P., Willam, K.: Localization in micropolar continua, Report CU/SR-94/7 (1994)

