

## UN NUEVO ENFOQUE PARA LA OPTIMIZACIÓN DE ABSORBEDORES DINÁMICOS POR EL MÉTODO DE SIMULATED ANNEALING

M. Febbo, S. A. Vera

CONICET e Instituto de Mecánica Aplicada (IMA), Departamento de Física  
Universidad Nacional del Sur  
Avda. Alem 1253, 8000, Bahía Blanca, ARGENTINA  
email: mfebbo@uns.edu.ar, web page: <http://www.uns.edu.ar>

**Key Words:** Optimización, Absorbedores dinámicos, Simulated annealing.

**Abstract.** *El control global de vibraciones de sistemas estructurales por medio de absorbedores dinámicos, a través de la minimización de la energía cinética total, ha sido objeto de recientes estudios (ver por ejemplo Brennan y Dayou en Journal of Sound and Vibration, Vol 232(3), 585-600, 2000). Este es debido, principalmente, a su excelente desempeño comparable al obtenido mediante control activo. Los sistemas sobre los cuales estos absorbedores actúan son, por lo general, estructuras tipo viga pero su aplicabilidad también se extiende a placas u otros sistemas de interés (cáscaras, maquinarias, etc).*

*Por otra parte, en el control local, es decir el control de la amplitud de desplazamiento en un determinado punto, el uso de absorbedores dinámicos es empleado desde hace casi más de un siglo debido a su versatilidad y confiabilidad (ver Pennestri, Journal of Sound and Vibration, Vol 217, 757-765, 1998). Si bien en este caso su actuación no es comparable a la del control activo, su performance es lo suficientemente adecuada a los fines prácticos.*

*En este trabajo se propone un nuevo enfoque para el problema del control de vibraciones de una viga con absorbedores dinámicos, teniendo en cuenta aspectos de minimización globales y locales. Se obtendrán los parámetros óptimos de los absorbedores mediante la técnica de "simulated annealing" y se comparará esta solución con cada una de las correspondientes obtenidas al realizar un control puramente global o puramente local, de forma de observar las ventajas y desventajas en contemplar este nuevo enfoque.*

## 1 INTRODUCCIÓN

El absorbedor dinámico de vibraciones (ADV) resulta ser un dispositivo de control de vibraciones mecánicas que aprovecha la dinámica de los sistemas acoplados elásticamente con el fin de reducir los niveles de vibración en una parte del mismo a costa de aumentarla en otra. Seguramente por esta razón algunos autores lo denominan neutralizador de vibraciones,<sup>1</sup> ya que las vibraciones no son absorbidas sino relocalizadas.

El ADV actúa a una frecuencia determinada por sus parámetros característicos, como son su constante elástica  $k$ , de amortiguamiento  $c$  y masa  $m$ , es decir que la reducción se produce en un cierto rango de frecuencias alrededor de la frecuencia de interés. Debido a este comportamiento se elige cuidadosamente la frecuencia a la que se sintoniza. En muchos casos se trata de alguna de las primeras frecuencias de resonancia del sistema principal, dado que suelen ser las que más problemas ocasionan debido su gran amplitud.

La optimización de los parámetros del ADV, con el objeto de obtener una reducción en la amplitud de vibración, es una tarea de gran interés dentro del campo de las vibraciones mecánicas como lo demuestra la gran cantidad de trabajos publicados en el tema.<sup>2-5</sup> Desde el punto de vista teórico, la optimización de sus parámetros característicos se trata de un problema con diversas complejidades. Por un lado, el problema posee un gran número de parámetros a optimizar: constante elástica  $k$ , constante de amortiguamiento  $c$ , masa  $m$  y posición del absorbedor; por el otro surge un problema de estabilidad de la solución encontrada. Esto sucede cuando se halla un mínimo a la frecuencia deseada pero a valores de frecuencia próximos se produce un aumento en la amplitud de vibración. Esta solución matemática del problema no es robusta, ya que si se introducen pequeños cambios en los parámetros del ADV se puede producir un aumento en el nivel de vibraciones.

La complejidad del problema ha llevado a que en la literatura de control de vibraciones hayan aparecido mayoritariamente soluciones “ad hoc” para tratar el tema que satisfacen ciertos requerimientos específicos, y no otros, de acuerdo al objetivo particular propuesto.<sup>4-6</sup>

En particular, desde el punto de vista de las aplicaciones, existen dos opciones que abarcan la mayoría de los casos: el control local y el global. Se entiende por control local al caso en que se desea reducir las vibraciones en un entorno específico del sistema, sin importar que suceda en el resto de la estructura. En el caso global, en cambio, se busca una reducción promedio en toda la estructura.

El objetivo de este trabajo es presentar un criterio de optimización que controle las vibraciones en forma local, pero que tenga en cuenta aspectos de control global. Esto puede ser de utilidad en aquellos casos, muy comunes en ingeniería, en que se necesita una solución de compromiso entre ambos. El trabajo comienza con una descripción, en forma abreviada, del modelo con que se describe la dinámica del sistema combinado, utilizando las ecuaciones de Lagrange. En segundo término, se presentan las diferentes funciones objetivo que se utilizan para lograr la minimización de las vibraciones mediante una tarea de optimización. Luego, se presenta un resumen de la técnica de “simulated annealing”, que se utiliza para minimizar las funciones objetivo. A continuación se muestran y comparan los resultados de los cálculos realizados y

finalmente las conclusiones a que las que se ha arribado.

## 2 MODELO MATEMÁTICO

En esta sección se describen las vibraciones forzadas de una viga simplemente apoyada con  $r$  sistemas de 1 gdl acoplados a la misma, siendo la viga excitada con una fuerza puntual del tipo armónica en el tiempo de la forma  $F e^{j\omega t} \delta(x - x_f)$ , donde  $j$  es la unidad imaginaria ( $j = \sqrt{-1}$ ),  $\omega$  es la frecuencia de excitación y  $\delta(x)$  es la llamada función distribución de Dirac que denota que la excitación es en el punto  $x = x_f$ . Se emplea el *método de los multiplicadores de Lagrange* para resolver el problema.<sup>7</sup> Para hallar la amplitud de vibración, que se utiliza para armar la función objetivo, se emplean las *ecuaciones de Lagrange*. Para modelar las vibraciones transversales de la viga se propone a la función desplazamiento como una suma de modos asumidos multiplicados por coordenadas generalizadas.<sup>8</sup> Las coordenadas que describen a los sistemas discretos son los extremos de los resortes  $z_{0r}$  y  $z_r$ . Para acoplarlos a la viga se utilizan los *multiplicadores de Lagrange*

Los absorbedores de 1gdl poseen, además de masa y elasticidad propias, un amortiguamiento del tipo viscoso proporcional a la velocidad  $c_r$ , representado por un amortiguador conectado en forma paralela al resorte, siendo su disposición de la forma que se puede ver en la figura 1

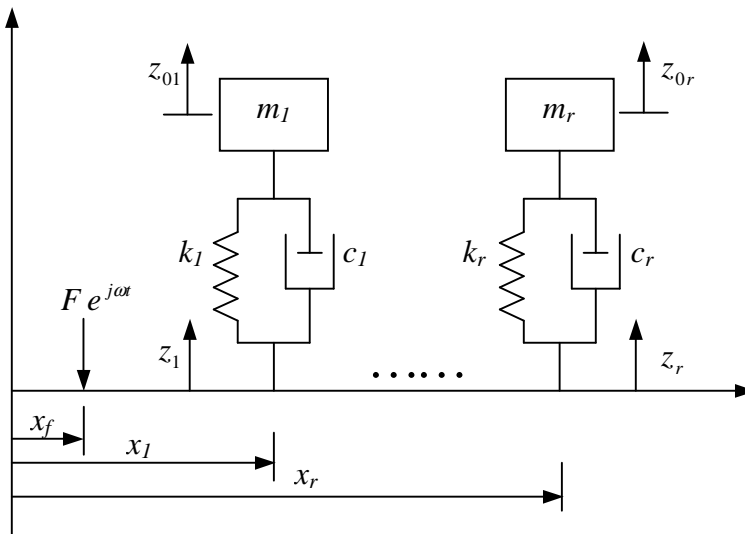


Figure 1: Diagrama de los  $r$  absorbedores acoplados a una viga

El desplazamiento de la viga, se supone dado por

$$w(x, t) = \sum_{i=1}^n \phi_i(x) q_i(t) \quad (1)$$

donde  $\phi_i(x)$  son las formas modales de una viga simplemente apoyada y  $q_i(t)$  las coordenadas generalizadas dependientes del tiempo que van a describir el sistema (la elección de las condiciones de borde es totalmente arbitraria y bien se podrían suponer distintas, sin afectar la formulación del problema).

En este caso la energía cinética  $T$  y potencial  $V$ , así como la función disipación de Rayleigh  $D$  están dadas por:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n M_i \dot{q}_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^r m_\nu \dot{z}_\nu^2 \quad (2)$$

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \omega_i^2 q_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^r k_\nu (z_\nu - z_{0\nu})^2 \quad (3)$$

$$D = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n c_{vi} \dot{q}_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^r c_\nu (z_\nu - z_{0\nu})^2 \quad (4)$$

Donde  $M_i$  es

$$\rho A \int_0^L \phi_i(x)^2 dx = M_i \quad (5)$$

y  $c_{vi}$  son las constantes de amortiguamiento de la viga, cuyo amortiguamiento se supone del tipo viscoso y  $\omega_i$  son sus frecuencias naturales;  $k_\nu$ ,  $c_\nu$  y  $m_\nu$  son las constantes elásticas, de amortiguamiento y masa de los sistemas de 1 gdl respectivamente. Las ecuaciones de Lagrange resultan, en este caso

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{s}_k} \right) - \frac{\partial D}{\partial \dot{s}_k} + \frac{\partial V}{\partial s_k} = Q_k + \sum_{\nu=1}^r \lambda_\nu \frac{\partial g_\nu}{\partial s_k} \quad k = 1, \dots, n + 2r \quad (6)$$

donde los  $\lambda_\nu$  son los multiplicadores de Lagrange,  $Q_k$  es la fuerza generalizada que viene dada por  $Q_k = F e^{j\omega t} \phi_k(x_f)$  y  $g_\nu$  las ecuaciones que representan las restricciones

$$g_\nu = \sum_{i=1}^n \phi_i(x_\nu) q_i(t) - z_{0\nu} = 0 \quad (7)$$

Si se reemplazan las expresiones de  $T$ ,  $V$ ,  $D$  y  $Q_k$  en (6), y se suponen todas las variables armónicas, es decir:  $q_i = \bar{q}_i e^{j\omega t}$ ,  $z_\nu = \bar{z}_\nu e^{j\omega t}$  y  $z_{0\nu} = \bar{z}_{0\nu} e^{j\omega t}$  se obtiene finalmente

$$\begin{aligned} M_i(\omega_i^2 - \omega^2 + 2j\xi_i\omega\omega_i)\bar{q}_i &= F\phi_i(x_f) + \sum_{\nu=1}^r \lambda_\nu \phi_i(x_\nu) \quad i = 1, \dots, n; \\ -\omega^2 m_\nu \bar{z}_\nu + (k_\nu + j\omega c_\nu)(\bar{z}_\nu - \bar{z}_{0\nu}) &= 0 \quad \nu = 1, \dots, r \\ (k_\nu + j\omega c_\nu)(\bar{z}_\nu - \bar{z}_{0\nu}) &= \lambda_\nu \quad \nu = 1, \dots, r \end{aligned} \quad (8)$$

En la expresión anterior  $\xi_i = \frac{c_{vi}}{2M_i\omega_i}$  es el amortiguamiento modal de la viga. Por lo tanto, reemplazando la expresión de  $\lambda_\nu$  en la primera de las ecuaciones (8) y sabiendo que

$$\bar{z}_{0\nu} = \sum_{\nu=1}^r \phi_i(x_\nu) \bar{q}_i$$

la expresión final es

$$\begin{aligned} M_i(\omega_i^2 - \omega^2 + 2j\xi_i\omega\omega_i)\bar{q}_i - \sum_{\nu=1}^r k_\nu^* \bar{z}_\nu \phi_i(x_\nu) + \sum_{\nu=1}^r k_\nu^* \left( \sum_{k=1}^n \phi_k(x_\nu) \bar{q}_k \right) \phi_i(x_\nu) = F\phi_i(x_f) \quad i = 1, \dots, n; \\ -\omega^2 m_\nu \bar{z}_\nu + k_\nu^* \bar{z}_\nu - k_\nu^* \sum_{k=1}^n \phi_k(x_\nu) = 0 \quad \nu = 1, \dots, r \end{aligned} \quad (9)$$

donde  $k_\nu^* = k_\nu + j\omega c_\nu$ . Expresando el sistema de ecuaciones (9) en forma matricial, resulta

$$\begin{pmatrix} [A] & [R] \\ [R]^T & [\alpha] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [\bar{q}] \\ [\bar{z}] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F\phi(x_f) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (10)$$

Donde  $[A]$  es una matriz cuadrada de orden  $n$  de la forma

$$[A] = \text{diag}(M_i(\omega_i^2 - \omega^2 + 2j\xi_i\omega\omega_i)) + \sum_{\nu=1}^r k_\nu^* \phi(x_\nu) \phi(x_\nu)^T \quad (11)$$

y  $[\bar{q}] = [\bar{q}_1 \bar{q}_2 \dots \bar{q}_n]^T$  y  $[\bar{z}] = [\bar{z}_1 \bar{z}_2 \dots \bar{z}_r]^T$  son vectores columna,  $T$  denota la traspuesta de la matriz respectiva y  $[\alpha]$  es una matriz cuadrada de orden  $r$  que viene dada por

$$[\alpha] = [k^*] - \omega^2 [m] \quad (12)$$

donde  $[m]$  y  $[k^*]$  son matrices diagonales de  $r \times r$  cuyos elementos vienen dados por  $m_\nu$  y  $k_\nu$  que son la masa y rigidez (compleja) de cada uno de los absorbedores considerados. Los vectores  $\phi(x_\nu)$  y  $\phi(x_f)$  están formados por cada una de las autofunciones  $\phi_i(x)$  de la estructura de base (viga), evaluadas en los puntos  $x = x_\nu$  y  $x = x_f$  respectivamente.

$$\phi(x_\nu) = [\phi_1(x_\nu) \phi_2(x_\nu) \dots \phi_n(x_\nu)]^T \quad (13)$$

$$\phi(x_f) = [\phi_1(x_f) \phi_2(x_f) \dots \phi_n(x_f)]^T \quad (14)$$

y la matriz  $[R]$  de  $n \times r$  está dada por

$$[R] = [-k_1^* \phi(x_1) \dots -k_\nu^* \phi(x_\nu) \dots -k_r^* \phi(x_r)] \quad (15)$$

El vector de amplitudes modales  $[\bar{q}]$  se obtiene de la ecuación (10); después de una larga manipulación algebraica finalmente resulta

$$[\bar{q}] = ([A] - [R][\alpha]^{-1}[R]^T)^{-1}F\phi(x_f) \quad (16)$$

La ecuación anterior es la que expresa la amplitud modal del desplazamiento en función de la fuerza de excitación puntual armónica y de la excitación producida por los  $r$  sistemas de 1 gdl. Si se desea obtener la amplitud de desplazamiento en un punto genérico  $x = x_a$ , la expresión a evaluar es la siguiente, usando la ecuación (1),

$$W(x_a) = \sum_{i=1}^n \phi_i(x_a)\bar{q}_i \quad (17)$$

con los  $[\bar{q}]$  dados por (16). Finalmente, la energía cinética del sistema total está dada por la siguiente expresión

$$E = \frac{m_b\omega^2}{4}[\bar{q}]^H[\bar{q}] \quad (18)$$

donde  $m_b = \rho AL$  es la masa total de la viga y el superíndice  $H$  denota el vector traspuesto conjugado.

### 3 OPTIMIZACIÓN

El objetivo final buscado es minimizar las vibraciones de la viga en el punto de observación  $x_a$  para un rango de frecuencias centrado en la primer frecuencia de resonancia de la viga desnuda. Para alcanzarlo se debe plantear una función objetivo y buscar un mínimo de la misma.

#### 3.1 Control local

La primer función objetivo que se podría utilizar es

$$f_1(k_1, c_1) = \sum_{i=1}^N |W(\omega = \omega_i, k_1, c_1)| \quad (19)$$

esta función es la suma de las amplitudes de vibración en  $x_a$  para  $N$  frecuencias en el entorno de la primera de resonancia. En la figura 2 se muestra un resultado típico. Como se puede observar aquí se cumple con el requerimiento de obtener un mínimo a la frecuencia  $\omega_1$  pero no con el de robustez, ya que a frecuencias cercanas se produce un aumento considerable de la amplitud de desplazamiento de aprox. 5 dB.

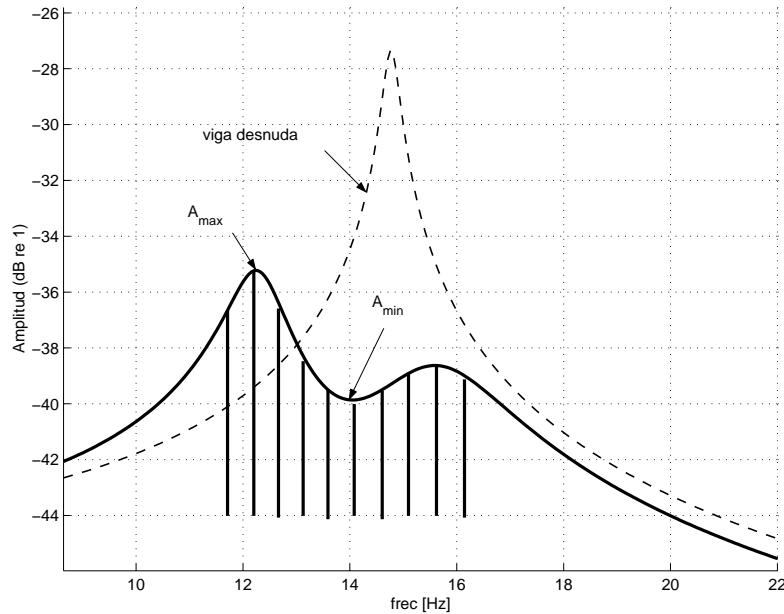


Figure 2: Primera optimización de 1 absorbedor de 1 gdl motando sobre una viga.

De esta optimización se obtienen dos valores  $k_1^0$  y  $c_1^0$  que serán valores intermedios para determinar otra función objetivo que arroje una respuesta más plana. Con estos valores se calcula la amplitud promedio entre el valor máximo  $A_{max}$  y el mínimo  $A_{min}$  para las  $N$  frecuencias, barras vericales en la figura 2, que se denotará como  $A_1$ . Luego se define la función  $f_2$

$$f_2(k_1, c_1) = \sum_{i=1}^N ||W(\omega = \omega_i, k_1, c_1)| - A_1| \quad (20)$$

esta representa la “distancia” entre la amplitud de desplazamiento a una dada frecuencia  $\omega_i$  y el valor promedio  $A_1$ .

### 3.2 Control Global

En este tipo de control se pretende minimizar la energía cinética de toda la estructura, que es una magnitud global. Seguidamente se presentan los resultados de los trabajos de Brennan<sup>1</sup> y Dayou.<sup>9</sup>

De la referencia<sup>1</sup> puede obtenerse que la relación óptima de  $\mu_a/\xi_a$  que minimiza la energía cinética para la primer frecuencia natural de la viga,  $\omega_1$ , es la siguiente

$$\frac{\mu_a}{\xi_{a\ opt}} = \frac{\xi_1}{\phi(x_1)^2 M_1 \sqrt{r q_{min}(\omega_1)}} \quad (21)$$

donde  $\mu_a$  es la relación entre la masa del absorbedor y la masa de la viga,  $\xi_a$  es el amortiguamiento modal del absorbedor,  $\xi_1$  el amortiguamiento modal de la viga para la primer fre-

cuencia,  $\phi_1(x_1)$  es la amplitud modal de la viga en la posición del absorbedor y  $rq_{min}(\omega_1) = [\bar{q}]_{min}^H(\omega_1)[\bar{q}]_{min}(\omega_1)$ , donde  $[\bar{q}]_{min}$  es la amplitud modal que minimiza la energía cinética de la viga evaluada para el primer modo y la primera frecuencia  $\omega_1$

$$[\bar{q}]_{min} = A \left[ \phi(x_f) - \phi(x_\nu) \frac{\alpha_{nf}}{\alpha_{n\nu}} \right] F \quad (22)$$

A es una matriz de  $n \times n$

$$[A]_{n \times n} = \text{diag} \left[ \frac{1}{(\omega_n^2 - \omega^2 + 2j\xi_n\omega\omega_n)} \right] \quad (23)$$

y

$$\alpha_{nf} = \sum_{i=1}^n A_i \phi_i^2(x_f); \quad \alpha_{n\nu} = \sum_{i=1}^n A_i \phi_i^2(x_\nu) \quad (24)$$

### 3.3 Control híbrido

Como ya se ha puntualizado las estrategias que cubren la mayor parte de los problemas de vibraciones mecánicas son el control local y global. En esta sección se describe una nueva estrategia que contempla ambos aspectos y se denomina control híbrido. Esta propuesta tiene en cuenta que tanto los parámetros óptimos como la respuesta del sistema son diferentes de acuerdo a que estrategia se elija. Al combinar ambas se logra una solución intermedia que sería de utilidad en casos en que las otras estrategias no arrojen una solución satisfactoria.

El enfoque que se propone es del tipo de control local pero tiene en cuenta la amplitud hallada en el control global. La idea es construir una función similar a  $f_2$

$$f_3 = \sum_{i=1}^N ||W(\omega_i) - A_p|^2 \quad (25)$$

donde  $A_p$  es el promedio de la amplitud  $\bar{q}_{min}$  que logra minimizar la energía cinética para la primera frecuencia de la viga teniendo en cuenta solo el primer modo y el valor  $A$ , obtenido mediante la minimización local; es decir  $A_p = \frac{A + \bar{q}_{min}}{2}$ . Nuevamente la suma se toma para valores de frecuencia cercanos a la primera frecuencia de resonancia de la viga.

### 3.4 Múltiples absorbedores

Se puntualizará el análisis para el caso de 2 absorbedores; la extensión para más absorbedores no reviste mayor dificultad y se deja para un trabajo posterior. Los absorbedores se sintonizarán ambos a la primera frecuencia de resonancia de la viga, de forma de disminuir la amplitud de vibración en frecuencias cercanas a esta resonancia, pero se colocan en distintas posiciones.

En este caso la optimización también consiste en dos etapas. La primera etapa radica en encontrar las constantes elásticas  $k_1$  y  $k_2$  que se obtienen siguiendo el criterio planteado por los autores<sup>13</sup> y se resume en los siguientes puntos



- se evalúa la expresión de la amplitud en función de la frecuencia para el sistema total en forma numérica para el caso en que  $c_1 = c_2 = 0$  y  $c_1 = c_2 \rightarrow \infty$ .
- se encuentran los puntos en donde se cruzan las curvas anteriores llamados *puntos de cruce*,<sup>13</sup> próximos a la primer frecuencia natural de la viga, a los que se denominará  $\omega_{11}^*$  y  $\omega_{12}^*$ .
- se buscan numéricamente los valores de sintonía,  $\alpha_1 = \frac{\omega_{a1}}{\omega_1}$  y  $\alpha_2 = \frac{\omega_{a2}}{\omega_1}$  para los cuales las respectivas amplitudes de los puntos de cruce sean iguales;  $\omega_{a1}$  y  $\omega_{a2}$  son las frecuencias naturales de los ADV de 1gdl y  $\omega_1$  la primer frecuencia natural de la viga respectivamente.

Al obtener los valores de las constantes  $k_1$  y  $k_2$  se reduce a la mitad el número de variables a optimizar y se consigue que el problema de minimización sea reducido, quedando únicamente por obtener las constantes  $c_1$  y  $c_2$ . En este sentido, la optimización numérica se ve simplificada notablemente debido a que la función a optimizar tiene la mitad de variables que las propuestas al inicio.

Para hallar las constantes  $c_1$  y  $c_2$  se proponen nuevamente dos optimizaciones. Para la primera optimización se plantea la siguiente función objetivo.

$$f_1(c_1, c_2) = \sum_{i=1}^N |W_1(\omega = \omega_i, c_1, c_2)| \quad (26)$$

En la ecuación anterior, la primer suma debe incluir valores de amplitud  $W(\omega, c_1, c_2)$  calculados para las frecuencias  $\omega_{11}^*$  y  $\omega_{12}^*$ , como así también amplitudes en valores de frecuencias intermedios. Como fuera demostrado gráficamente para el caso de 1 absorbedor la respuesta no es necesariamente plana en la zona de interés, es por eso que se obtiene, con el valor del máximo de los picos y su respectivo mínimo un promedio que llamaremos  $A$ . Una vez obtenido este promedio, se realiza la segunda minimización en la cual se plantea una nueva función objetivo, que tiene en cuenta el valor promedio obtenido, de la siguiente forma

$$f_2(c_1, c_2) = \sum_{i=1}^N ||W(\omega = \omega_i, c_1, c_2)| - A| \quad (27)$$

Nuevamente la suma debe extenderse para los valores de frecuencias  $\omega_{11}^*$  y  $\omega_{12}^*$  y valores intermedios. De esta forma se han obtenido los valores óptimos buscados.

Para el control global con múltiples absorbedores, a diferencia de lo que sucede con uno, no existe una expresión analítica para obtener la relación óptima  $\mu_{ai}/\xi_{ai}$  y en cambio Dayou y Brennan proponen un procedimiento “ad hoc” para encontrar dichos valores en forma numérica,<sup>9</sup> este es:

1. Empotrar la estructura en la posición del 2<sup>do</sup> absorbedor; esto se logra haciendo el cociente  $\mu_{a2}/\xi_{a2}$  muy grande

2. Calcular la energía cinética como función de  $\mu_{a1}/\xi_{a1}$ ; el valor óptimo es aquel para el cual la energía cinética de la estructura converge a un mínimo<sup>1</sup>
3. Establecer el cociente del primer absorbedor óptimo  $\mu_{a1}/\xi_{a1}$  y luego calcular el valor de la energía cinética de la estructura en función de  $\mu_{a2}/\xi_{a2}$ . Nuevamente el valor óptimo de  $\mu_{a2}/\xi_{a2}$  es aquel para el cual la energía cinética converge a un mínimo.

En el caso de control híbrido se procede análogamente a lo descrito en la sección 3.3 solo que  $\bar{q}_{min}$  debe hallarse numéricamente una vez encontrados  $\mu_{a1}/\xi_{a1}$  y  $\mu_{a2}/\xi_{a2}$ .

## 4 MÉTODO DE SIMULATED ANNEALING

El método de minimización de *simulated annealing*<sup>10,11</sup> se ha elegido por ser el que mejor se adapta para problemas llamados de gran escala, especialmente aquellos en los que el extremo global buscado está “escondido” entre muchos otros extremos locales. No obstante su gran eficiencia, la implementación del algoritmo es relativamente simple.

### 4.1 Descripción del problema matemático y el algoritmo de resolución

Una minimización global puede describirse matemáticamente como un par  $(S, f)$ , donde  $S \subset R^n$  es un subconjunto de  $R^n$  y  $f : S \rightarrow R$  una función real  $n$  dimensional.

El problema consiste, entonces, en encontrar un mínimo  $x_{min} \in S$  tal que  $f(x_{min})$  es un mínimo global en  $S$ . En síntesis se requiere que  $x_{min} \in S$  y

$$\forall x \in S : f(x_{min}) \leq f(x) \quad (28)$$

El algoritmo se inicializa generando una solución  $x_0$  al azar. Luego se calcula una nueva solución  $y$  al azar a partir de la corriente  $x$ , con el objeto de simular la evolución del algoritmo de *simulated annealing*. Si el cambio en energía  $E$  (o la función objetivo) es negativo, quiere decir que el punto seleccionado  $y$  es mejor desde el punto de vista de la minimización (menor) y es aceptado como la nueva solución comenzando nuevamente el algoritmo. De otra forma,  $y$  solo será aceptado con probabilidad

$$prob(\Delta f) \sim e^{-(f(y)-f(x))/kT} \quad (29)$$

si dicha  $prob(\Delta f)$  es mayor que un número al azar entre 0 y 1. Este procedimiento se repite iterativamente perturbando la nueva solución y comparando el cambio en la función objetivo. Cada nuevo reemplazo es acompañado de un descenso en la temperatura  $T$  a partir de un factor que se conoce como tasa de enfriamiento  $t_e$ . El algoritmo finaliza una vez que se ha alcanzado cierto número de iteraciones máximo ( $Iter_{max}$ ) obedeciendo el criterio del programador.

## 4.2 Detalles de la implementación

La rutina de minimización por *simulated annealing* requiere un ajuste de los parámetros intervinientes en el algoritmo como son:

- la temperatura inicial  $T_0$ .
- la tasa de enfriamiento  $t_e$ .
- la constante  $k$  que interviene como constante de Boltzmann (en analogía con la estadística).
- el número de iteraciones máximo  $Iter_{max}$ .

Todas estas constantes se ajustan para el problema que se aborda, previo ensayo con distintos valores de las mismas, con el criterio de obtener una convergencia hacia la solución lo más veloz posible.

## 4.3 Generación de un punto $y_n$ a partir de una semilla $x_n$

Para generar el punto  $y_n$  a partir de otro  $x_n$  es necesario contar con una rutina capaz de generar los puntos de forma que se garantice una correcta elección de los mismos. Para ello existe un gran número de posibilidades, de la que se ha elegido la siguiente <sup>1</sup>.

Supongase que se quiere minimizar una función de dos variables  $f(x_1, x_2)$ . Primero, se genera un vector  $\mathbf{x} = x_1, x_2$  cuyos valores iniciales  $x_1^0, x_2^0$  toman la mitad del valor extremo del intervalo en el cual dichas variables pueden variar. Una vez inicializado  $\mathbf{x}$ , se crea un vector  $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$  que tomará los siguientes valores.

$$y_i = \begin{cases} x_i + \gamma\Psi(k_s, AR - x_i) & \text{si } r_d \text{ (número al azar)} > 0.5 \\ x_i - \gamma\Psi(k_s, x_i - AL) & \text{si } r_d < 0.5 \end{cases} \quad i = 1, 2 \quad (30)$$

donde  $AR$  es el borde derecho del intervalo elegido para las variables  $x_1, x_2$  (puede haber un valor de  $AR$  para cada variable),  $AL$  el borde izquierdo;  $k_s$  denota las sucesivas reducciones de temperatura y  $\gamma$  es un número al azar entre 0 y 1. La función  $\Psi(k_s, x)$  es una función que da un valor entre  $(0, x_i)$  que tiende a cero a medida que  $k_s$  crece. Esta propiedad causa que el espacio de posibles valores de  $x_1, x_2$  se recorra primero uniformemente y muy localmente a medida que se va reduciendo la temperatura  $T$ . Explícitamente  $\Psi(k_s, x)$  vale

$$\Psi(k_s, x) = [e^{\frac{-k_s}{p}\lambda}]x \quad (31)$$

donde  $\lambda$  un parámetro de descenso y  $p$  es el peso asignado al nivel de descenso de la función  $\Psi(k_s, x)$ . Los valores que se han elegido serán presentados en la sección 5 ya que dependen, en general del tipo de problema que se quiere abordar.

<sup>1</sup>Esta rutina es una modificación de la propuesta por Yong *et al*<sup>12</sup>

## 5 RESULTADOS

Como se estableció anteriormente, el resultado de la optimización de los parámetros del absorbedor y de la respuesta del sistema dependen del tipo de función objetivo a minimizar. Para realizar la comparación en forma clara se presentan los resultados clasificados en:

- Caso 1: 1 absorbedor de 1 gdl montado sobre una viga
- Caso 1: 2 absorbedores de 1 gdl montados sobre una viga

La viga que será utilizada en las simulaciones posee las siguientes constantes que definen sus parámetros físicos:

Table 1: Constantes físicas de la viga

$\rho [kg/m^3]$ densidad	$L [m]$ longitud	$E [N/m^2]$ módulo de Young	$h [m]$ espesor	$b [m]$ ancho	$I [m^4]$ momento de inercia	$m_b [kg]$ masa	$\xi [adim]$ amort.
$7.86 \times 10^3$	1	$208 \times 10^9$	0.00635	0.0381	$8.1295 \times 10^{-10}$	1.9016	0.01

### 5.1 Caso 1

#### 5.1.1 Detalles de la implementación

Dado que la técnica de *simulated annealing* posee distintos parámetros que requieren ajustarse para su funcionamiento y optimización del tiempo de cómputo, a continuación se presentan los que fueron utilizados en la implementación de la misma, tabla 2.

Table 2: Valores de las constantes para función  $\Psi(k_s, x)$

$\lambda$	$\gamma$	$p$	$A_{1R}$	$A_{1L}$	$A_{2R}$	$A_{2L}$	$T_0$	$t_e$	$k$	$Iter_{max}$
2	$rand(0, 1)$	750	1000	0	50	0	0.2	0.99	$10^{-1}$	1100

Las constantes  $\lambda$  y  $p$  fueron elegidas para explorar el intervalo en el que varían  $k_1$  y  $c_1$ , en forma uniforme y son valores que se utilizan usualmente;  $A_{1R}$  y  $A_{1L}$  son los extremos derecho e izquierdo del intervalo en el que varía  $k_1$ , y  $A_{2R}$  y  $A_{2L}$  son los intervalos en donde varía  $c_1$ .

La temperatura inicial  $T_0$  y la constante  $k$  se eligieron de forma de tener una probabilidad  $prob(\Delta f)$ , cercana a 1 para la primer iteración de forma tal de que en las primeras iteraciones el algoritmo pueda explorar direcciones tanto de descenso (menor valor de la función entre iteraciones sucesivas) como de ascenso (mayor valor de la función entre iteraciones sucesivas);  $t_e = 0.99$  es un valor frecuentemente usado en la implementación del método<sup>12</sup> e  $Iter_{max} = 1100$  es una cantidad de iteraciones suficiente para lograr una buena convergencia.

### 5.1.2 Resultados de la simulación

Los resultados de la simulación para el caso de 1 absorbedor de 1 gdl se presentan en la tabla 3. Allí se muestran los valores de  $k_1$  y  $\xi_{a1} = \frac{c_1}{2m_1\omega_{a1}}$  obtenidos de la minimización. La minimización de la función  $f_1$  se denomina *absoluta*, la de  $f_2$  *relativa al promedio (relat. prom.)*, la de  $f_3$  *híbrida* y la correspondiente al control global, simplemente *global*.

En la tabla 3 se pueden ver el número de iteraciones  $Iter_{max}$ , la cantidad de veces que se evalúa la función objetivo respectiva  $num$ , el valor de la función a minimizar en su respectivo mínimo,  $f$  y demás cantidades relativas al algoritmo de optimización. En la columna *tipo* se presentan los resultados para el caso de utilizar la función objetivo  $f_1$ , minimización *absoluta*, y la función  $f_2$ , llamada *relat. prom.*. El valor de  $A_1$  es el que figura en la ecuación (20). Para la minimización llamada *híbrida* el valor de  $A$  es el que figura como  $A_p$  en la ecuación 25. Para la minimización llamada *global*, el valor de  $k_1$  es el que corresponde a sintonizar al sistema de 1 gdl a la primer frecuencia natural de la viga y  $\xi_{a1}$  el que resulta de resolver la ecuación (21); el valor de  $A$  es el de  $q_{min}$  que se obtiene de (22).

Table 3: Valores de optimización *local*, *híbrida* y *global* para 1 absorbedor.

<i>Minim.</i>	$k_1$	$\xi_{a1}$	$A$	$f$	$Iter_{max}$	$num$
<i>absoluta</i>	728.58	0.091	0	$1.3626 \times 10^{-3}$	1100	29449
<i>relat.prom.</i>	670.54	0.200	$1.55 \times 10^{-4}$	$5.72 \times 10^{-5}$	1100	279583
<i>híbrida</i>	730.29	0.095	$0.77 \times 10^{-4}$	$5.92 \times 10^{-4}$	1100	52939
<i>global</i>	823.73	$5.7 \times 10^{-3}$	$8 \times 10^{-7}$	-	-	-

En la figura 3 se representa el algoritmo de *simulated annealing* para el caso de la segunda fila en la tabla 3; allí es posible observar que en las primeras iteraciones el algoritmo explora todo el dominio de la variable a optimizar y a medida que aumentan las iteraciones la búsqueda se va *enfriando*, es decir la exploración se realiza en un dominio menor hasta que converge a la solución.

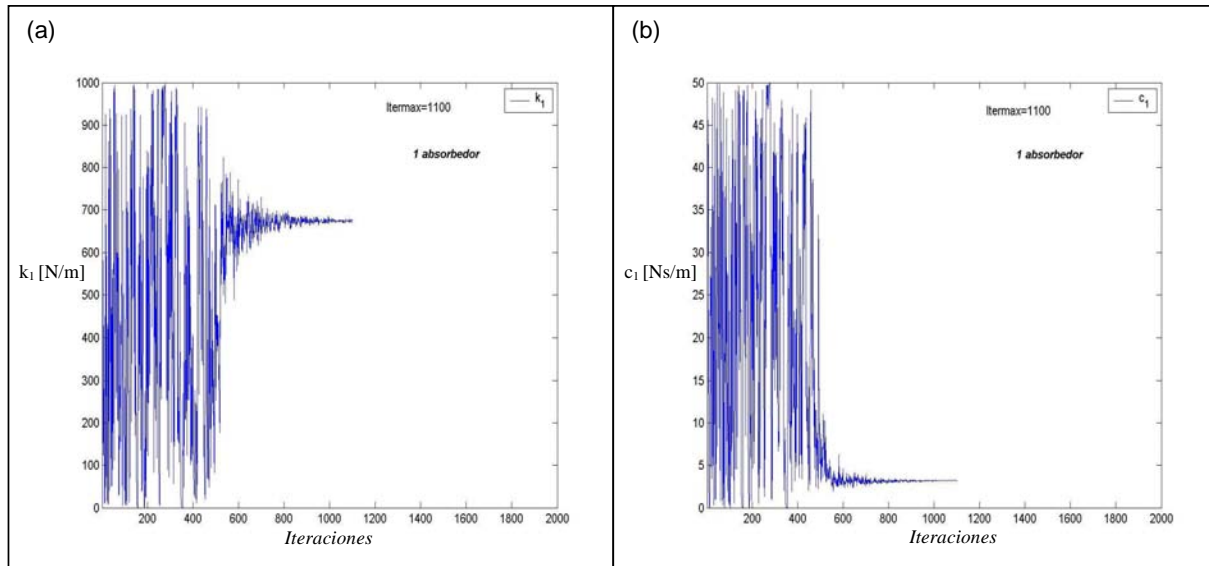


Figure 3: Representación gráfica del algoritmo de *simulated annealing* para 1100 iteraciones con 1 *absorbedor*; (a) resultados para  $k_1$ ; (b) idem  $c_1$

## 5.2 Caso 2

### 5.2.1 Detalles de la implementación

Para la minimización de 2 *absorbedores* las variables a optimizar son  $c_1$  y  $c_2$ . Para la implementación del algoritmo de *simulated annealing* se utilizaron los mismos valores que los presentados en la tabla 2 para la función  $\Psi$ , excepto en el caso de  $A_{1R}$  cuyo valor fue de 50.

### 5.2.2 Resultados de la simulación

A continuación se muestran, en la tabla 4 los resultados obtenidos de las simulaciones con 2 *absorbedores* para la optimización *absoluta*, *relat. prom*, *híbrida* y *global*.

Las constantes  $k_1$  y  $k_2$  elegidas para las minimizaciones *absoluta*, *relat. prom* e *híbrida* son las que resultan de aplicar el criterio presentado en la subsección 3.4, siendo sus valores  $k_1 = k_2 = 600$  N/m.

Para la minimización *global*, los valores de  $k_1$  y  $k_2$  son los que se obtienen al sintonizar a los sistemas de 1 gdl a la primer frecuencia natural de la viga y fueron de  $k_1 = k_2 = 823.7$  N/m. Los valores de  $\xi_{a1} = \frac{c_1}{2m_1\omega_{a1}}$  y  $\xi_{a2} = \frac{c_2}{2m_2\omega_{a2}}$  se calculan aplicando el procedimiento descrito anteriormente.

Table 4: Valores de optimización *local*, *híbrida* y *global* para 2 absorbedores.

<i>Minim.</i>	$\xi_1$	$\xi_2$	$A$	$f$	$Iter_{max}$	$num$
<i>absoluta</i>	0.171	0.129	0	$9.806 \times 10^{-4}$	1100	9561
<i>relat.prom.</i>	0.235	0.23	$1.01 \times 10^{-4}$	$7.53 \times 10^{-5}$	1100	36305
<i>híbrida</i>	0.188	0.142	$5 \times 10^{-4}$	$4.767 \times 10^{-4}$	1100	9245
<i>global</i>	$1 \times 10^{-4}$	$1 \times 10^{-4}$	$1 \times 10^{-7}$	-	-	-

### 5.2.3 Comparación de resultados

En la figura 4 se muestran la amplitud de desplazamiento de la viga en función de la frecuencia de excitación, para el caso de 1 absorbedor. Sus parámetros se muestran en la tabla 3. Para este caso, la posición de la excitación es  $x_f = 0.1L$ ; la posición del absorbedor es  $x_1 = 0.45L$  y el punto de observación se situó en  $x_a = 0.45L$ . La masa del sistema de 1 gdl es de  $m_1 = 0.05m_b$ . A partir del gráfico es posible observar que, si bien la minimización *relat. prom.* posee una respuesta plana en cercanías de la primer resonancia de la viga, la minimización *híbrida* posee una respuesta menor en un rango bastante amplio de frecuencias que incluyen la propia frecuencia de resonancia de la viga en donde la reducción es mayor a  $3dB$ . La minimización *global*, que brinda una considerable reducción a la frecuencia de resonancia de la viga, tiene dos picos de notable amplitud a ambos lados de dicha resonancia, y eso la convierte en no deseable. Cabe notar que los picos aparecen debido a que se agrega a la viga 1 gdl adicional por la presencia del absorbedor.<sup>13</sup>

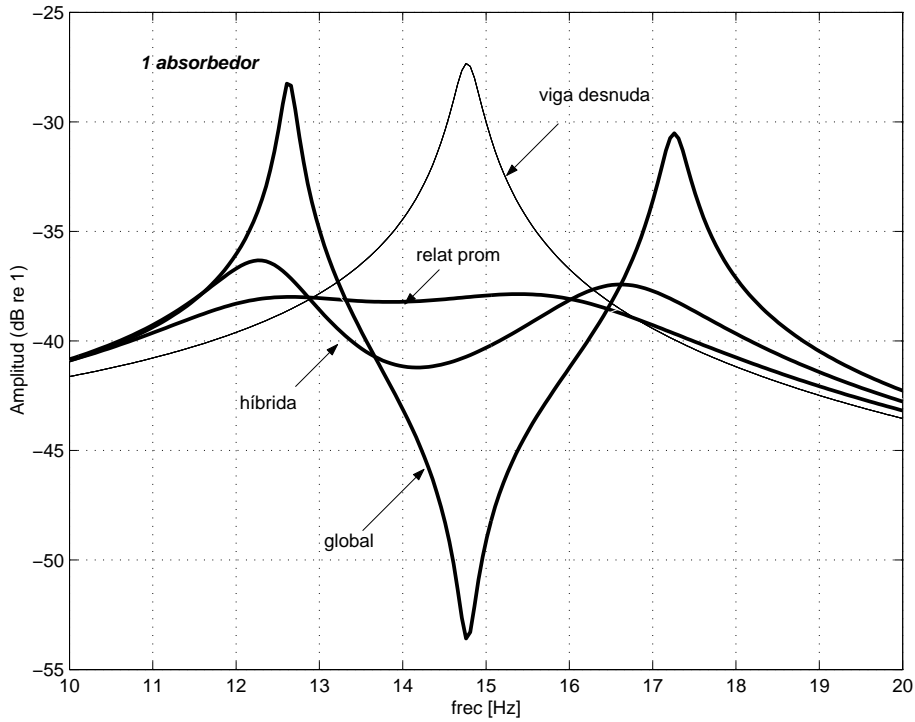


Figure 4: Distintas minimizaciones para 1 absorbedor montado a una viga

La figura 5 muestra el resultado de las optimizaciones para 2 absorbedores. La posición de la excitación es  $x_f = 0.1L$ , los absorbedores se ubicaron en  $x_1 = L/2$  y  $x_2 = L/3$  y el punto de observación se situó en  $x_a = L/3$ . Las masas de cada uno de los sistemas de 1 gdl se fijaron en  $m_1 = 0.05m_b$  y  $m_2 = 0.05m_b$ .

Nuevamente la minimización *híbrida* posee ventajas respecto de las otras minimizaciones. Comparada con la minimización *relat. prom.*, posee una mayor reducción en una región cercana a la primer resonancia de la viga y en la zona en donde es mayor, el incremento es menor a 1 dB. La minimización *global* es nuevamente más efectiva en la reducción de la amplitud de vibración para la resonancia pero posee dos picos de gran amplitud a ambos lados de la misma lo que la hace inefectiva a esas frecuencias.



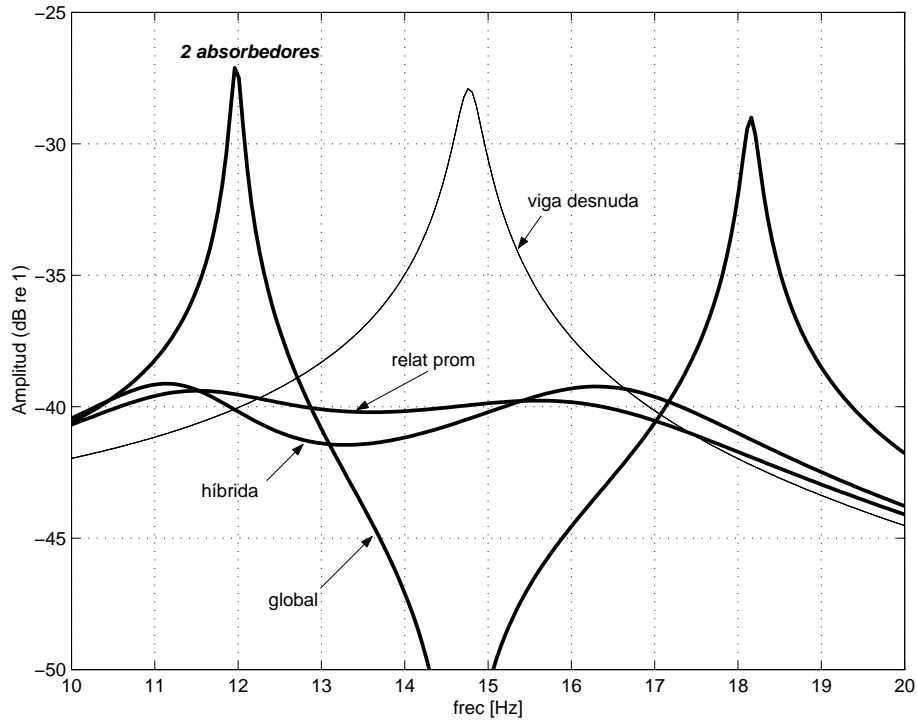


Figure 5: Distintas minimizaciones para 2 absobedores montados a una viga

## 6 CONCLUSIONES

De los resultados presentados se puede concluir lo siguiente

- La técnica de *simulated annealing* ha resultado ser efectiva para el problema de optimización planteado en el trabajo, pero es necesario realizar una elección adecuada de los parámetros del algoritmo para adaptarlo al problema planteado.
- La minimización *híbrida* propuesta posee una mejor reducción de la amplitud de vibración respecto de la optimización *relativa al promedio* en frecuencias cercanas a la primera resonancia de la viga.
- La minimización *híbrida*, respecto de la *global*, posee una mejor reducción de la amplitud de vibración para frecuencias cercanas a los picos que aparecen a ambos lados de la resonancia original.

Por lo tanto, en forma general, se puede concluir que esta nueva estrategia *híbrida* da una función respuesta del sistema, ver figuras 4 y 5, que presenta una mayor reducción a la frecuencia de interés, que la estrategia *relativa promedio*. Adicionalmente no presenta un aumento muy significativo en las frecuencias próximas a la frecuencia de resonancia, como sucede con la estrategia *global*, con lo que se convierte en una opción válida cuando la aplicación particular

requiera una solución de compromiso. Por otro lado, la utilización de 2 ADV de 1 gdl sintonizados a la misma frecuencia no provoca una mayor reducción a la frecuencia de interés, y no resultaría en una ventaja adicional, si se desea emplear esta nueva opción de minimización.

## 7 AGRADECIMIENTOS

El trabajo ha sido financiado parcialmente por ANPCYT (PICT 13-13033, Director: Sergio Vera) y la Secretaría de Ciencia y Técnica de la Universidad Nacional del Sur a través del proyecto 24/F032 (director Dr. Carlos A. Rossit).

## REFERENCES

- [1] M. J. Brennan y J. Dayou 2000. Global control of vibration using a tunable vibration neutralizer. *Journal of Sound and Vibration* 232 (3), 585-600.
- [2] A. G. Thompson 1981. Optimum tuning and damping of a dynamic absorber applied to a force excited and damped primary system. *Journal of Sound and Vibration* 77, 403-415.
- [3] G. B. Warburton 1982 Optimum absorber parameters for various combinations of response and excitation parameters. *Earthquake engineering and structural dynamics* 10, 381-401.
- [4] L. Kitis, B.P.Wang y W. D. Pilkey 1983. Vibration reduction over a frequency range. *Journal of Sound and Vibration* 89, 559-569.
- [5] H. J. Rice 1993. Design of multiple vibration absorber systems using modal data. *Journal of Sound and Vibration* 160, 378-385.
- [6] J. P. Den Hartog 1956, *Mechanical Vibrations*. New York: McGraw-Hill.
- [7] M Febbo y S. A. Vera 2004. Estudio de las vibraciones libres de elementos estructurales con sistemas masa-resorte adosados, utilizando diversas metodologías. *Proceedings del XIII Congreso sobre métodos numéricos y sus aplicaciones (ENIEF)* 971-982.
- [8] L. Meirovich, 1967. *Analytical methods in vibrations*. MacMillan, Co, New York.
- [9] J. Dayou y M. J. Brennan 2002. Global control of structural vibration using multiple-tuned vibration neutralizers. *Journal of Sound and Vibration* 258 (2), 345-357.
- [10] N. Metropolis, A. Rosenbluth, M. Rosenbluth, A. Teller, E. Teller 1953. Equation of state calculations by fast computing machines. *Journal of Chemical Physics* 21 (6), 1087-1092.
- [11] S. Kirkpatrick, C. D. Gelatt, M. P. Vecchi, 1983. Optimization by simulated annealing. *Science* 220 (4598), 671-680.
- [12] L. Yong, K. Lishan and D. J. Evans, 1995. The annealing evolution algorithm as a function optimizer. *Parallel computing* 21 389-400.
- [13] M Febbo, S. A. Vera 2005. Parameter optimization of a two degree of freedom dynamic absorber. *Proceedings del Twelfth International Congress on Sound and Vibration*, 11-14 July, Lisbon, Portugal.