



## FORMULACION ELASTOPLASTICA PARA EL ANALISIS COMPUTACIONAL DE PORTICOS PLANOS DE HORMIGON ARMADO

Oscar Müller<sup>(1)</sup>, Marcelo Rubinstein<sup>(1)</sup>, Guillermo Etsé<sup>(2)</sup>

- (1) Instituto de Mecánica Aplicada y Estructuras (IMAE), Universidad Nacional de Rosario. Riobamba y Berutti, 2000 Rosario, Argentina.  
(2) Laboratorio de Estructuras, Universidad Nacional de Tucumán, CC 134, Correo Central, 4000 Tucumán.

### RESUMEN

Se presenta una formulación de endurecimiento - ablandamiento en términos de resultantes de tensiones y desplazamientos, para aplicar la teoría de elastoplasticidad a elementos de barra. Los factores se calibran con respecto a relaciones momento curvatura de las secciones obtenidas a partir de ecuaciones constitutivas realistas del hormigón confinado y del acero.

Ejemplos muestran la capacidad del modelo y la importancia del ablandamiento en la respuesta estructural hasta los estados límites considerados.

### ABSTRACT

A formulation of hardening and softening is presented in terms of tension resultants and displacements, to apply the elastic-plastic theory to bar elements. The factors are adjusted with regard to moment curvature relations of sections obtained from realistic constitutive equations of confined concrete and steel.

Examples shown the model capacity and the importance of softening in the structural response up to the limit states considered.

### INTRODUCCION

Para el análisis de la respuesta no lineal de pórticos planos de hormigón armado sismorresistentes es necesario formular modelos matemáticos que establezcan una adecuada relación entre simplicidad y realismo.

La simplicidad del modelo es condición necesaria para su aplicación a estructuras, de uso corriente en la práctica, compuestas por numerosas barras, en donde se debe garantizar la convergencia de los procesos iterativos en un número razonablemente acotado de pasos.

El realismo es también una condición necesaria y esta cualidad debe ser incorporada al modelo, estableciendo una adecuada relación entre la respuesta de la barra y las ecuaciones constitutivas de los materiales que la componen.

Así por ejemplo un modelo de barra con plasticidad concentrada en los extremos y comportamiento elasto-plástico ideal resulta simple pero no realista ya que, al no tener en cuenta efectos de endurecimiento, será capaz de seguir, de manera aproximada, el comportamiento del pórtico sólo hasta la formación de un mecanismo de colapso.

El modelo de barra que se propone en este trabajo, para aplicación del método de elementos finitos en desplazamientos, cumple con los dos requisitos mencionados. Se incorpora el endurecimiento y

ablandamiento al modelo elastoplástico ideal utilizado en [1], con una ley isotropa que gobierna la evolución del criterio de fluencia definido en términos de sollicitaciones de sección  $M$  y  $N$ . A partir de las pendientes de endurecimiento ó ablandamiento de las relaciones momento-curvatura de las secciones extremas del elemento, y con adecuados factores de calibración, se deducen los términos a incluir en la matriz de rigidez elastoplástica de la barra.

La ley momento-curvatura se construye por el método clásico, teniendo en cuenta relaciones  $\sigma-\epsilon$  realistas para el acero y el hormigón [2], e incluyendo la posibilidad de considerar procesos cíclicos. El colapso se manifiesta cuando se alcanza un valor límite para la curvatura asociado con la ocurrencia de uno de los estados límites establecidos.

Se presentan dos ejemplos para realizar una primera calibración de los factores de endurecimiento y ablandamiento del modelo propuesto, y que pusieron de manifiesto la eficacia del mismo para representar la sobrerresistencia de la estructura, registrando la respuesta más allá de la entrada en el campo plástico de una cantidad de secciones suficientes para la formación de un mecanismo, y para tener en cuenta efectos de localización de deformaciones por ablandamiento derivados, en este caso, de armaduras comprimidas y confinamiento insuficientes.

Dentro del compromiso entre eficiencia y precisión de este modelo, aparecen como limitaciones, para un futuro perfeccionamiento, que la ley momento-curvatura se deduce para un valor fijo del esfuerzo normal y que el modelo no tiene en cuenta la rotación concentrada en la interfase barra-nudo por deslizamiento de las armaduras.

#### TEORIA DE ELASTOPLASTICIDAD APLICADA A ELEMENTOS DE BARRA

La fig.1 presenta el elemento de barra, con sus grados de libertad y variación de esfuerzos internos considerados.

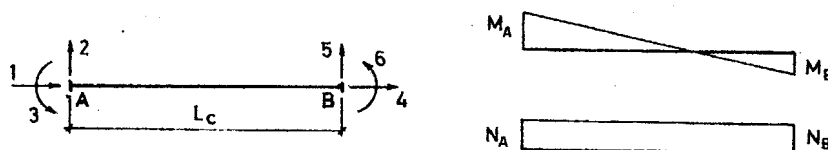


Figura 1: Elemento de barra

La relación entre incrementos de fuerzas  $\Delta F$  y de desplazamientos  $\Delta u$  en las secciones extremas del elemento A y B, se obtiene aplicando la teoría general de elastoplasticidad [1,3,4]:

$$\Delta F = K_{ep} \Delta u \quad (1)$$

$$\text{donde} \quad \Delta u = \Delta u^e + \Delta u^p = K^{-1} \Delta F + \frac{\partial Y}{\partial F} \Delta \Lambda \quad (2)$$

$\Delta u^e$  es el incremento de desplazamientos elásticos, en el cual  $K = K_L + K_{NL}$  con  $K_L$  matriz de rigidez lineal elástica [1],  $K_{NL}$  matriz de rigidez no lineal [1],  $\Delta u^p$  es el incremento de desplazamientos plásticos, con  $\partial Y / \partial F$  matriz gradiente de la superficie de fluencia y  $\Delta \Lambda^T = [\Delta \lambda_A, \Delta \lambda_B]$  contiene los multiplicadores plásticos.

Los incrementos de fuerzas internas son  $\Delta F^T = [\Delta N_A, \Delta Q_A, \Delta M_A, \Delta N_B, \Delta Q_B, \Delta M_B]$ .

A partir de la relación elástica

$$\Delta F = K \Delta u^e = K (\Delta u - \Delta u^p) = K (\Delta u - \frac{\partial Y}{\partial F} \Delta \Lambda) \quad (3)$$

y la condición de consistencia

$$Y(F, \kappa) = 0 \rightarrow \Delta Y = \frac{\partial Y}{\partial F} \Delta F + \frac{\partial Y}{\partial \kappa} \Delta \kappa = 0 \quad (4)$$

resulta :

$$\Delta \Lambda = E^{-1} \frac{\partial Y^T}{\partial F} K \Delta u \quad (6)$$

con  $E = A + \frac{\partial Y^T}{\partial F} K \frac{\partial Y}{\partial F} \quad \Lambda = \begin{bmatrix} \Lambda_A \\ \Lambda_B \end{bmatrix}, \quad A_1 = -\frac{1}{\Delta \lambda_1} \frac{\partial Y^T}{\partial \kappa_1} \Delta \kappa_1 \quad (6)$

Reemplazando (6) en (3) y reordenando se obtiene :

$$\Delta F = \left[ K - K \frac{\partial Y}{\partial F} E^{-1} \frac{\partial Y^T}{\partial F} K \right] \Delta u = K_{ep} \Delta u \quad (7)$$

donde  $K_{ep}$  es la matriz de rigidez elastoplástica .

En este trabajo se propone como función de fluencia , para sección rectangular , la siguiente expresión :

$$Y(F, \kappa)_i = \frac{|M|}{M_p(\kappa_M)} + \left( \frac{N}{N_p(\kappa_N)} \right)^2 - 1 = 0 \quad (8)$$

donde  $M_p = \sigma_y Z$  es el momento plástico , con  $\sigma_y$  tensión de fluencia del material y  $Z$  el módulo plástico de la sección ;  $N_p = \sigma_y A$  es el esfuerzo normal plástico ;  $\kappa_M, \kappa_N$  son los parámetros de endurecimiento ó ablandamiento .

La matriz gradiente a la superficie de fluencia resulta :

$$\frac{\partial Y^T}{\partial F} = \begin{bmatrix} \frac{2 N_A}{N_p^2} & 0 & \frac{\text{Sig} M_A}{M_p A} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2 N_B}{N_p^2} & 0 & \frac{\text{Sig} M_B}{M_p B} \end{bmatrix} \quad (9)$$

Los términos de endurecimiento se definen :

$$\Delta \kappa^T = \left[ \Delta \kappa_A^T, \Delta \kappa_B^T \right], \text{ con}$$

$$\Delta \kappa_1 = \begin{bmatrix} \Delta \kappa_N \\ \Delta \kappa_M \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} N \Delta(\Delta l)_p \\ M \Delta \theta_p \end{bmatrix}_i = \Delta \lambda_1 \begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix}_i \begin{bmatrix} 2N/N_p^2 \\ \text{Sig} M/M_p \end{bmatrix}_i \quad (10)$$

$$\frac{\partial Y^T}{\partial \kappa} = \begin{bmatrix} \left( \frac{\partial Y}{\partial \kappa_N} \right)_A & \left( \frac{\partial Y}{\partial \kappa_M} \right)_A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left( \frac{\partial Y}{\partial \kappa_N} \right)_B & \left( \frac{\partial Y}{\partial \kappa_M} \right)_B \end{bmatrix} \quad (11)$$

con  $\frac{\partial Y}{\partial \kappa_N} = \frac{\partial Y}{\partial N_p} \frac{dN_p}{d\kappa_N} = -2 \frac{N}{N_p^3} H'_N, \quad H'_N = \frac{dN_p}{d\Delta l_p}$

$$\frac{\partial Y}{\partial \kappa_M} = \frac{\partial Y}{\partial M_p} \frac{dM_p}{d\kappa_M} = -\frac{\text{Sig} M}{M_p^2} H'_M, \quad H'_M = \frac{dM_p}{d\theta_p} \quad (12)$$

Reemplazando (10), (11) y (12) en (6) se obtiene :

$$A_1 = \frac{4 N^3}{N_p^3} H'_N + \frac{M}{M_p^2} H'_M \quad (13)$$

Los factores  $H'_N, H'_M$  deben estar relacionados entre sí y con la tensión de fluencia del material ; se propone :

$$\Delta N_p = A \Delta \sigma_y$$

$$\Delta M_p = Z \Delta \sigma_y = \frac{Z}{A} \Delta N_p = \frac{h}{4} \Delta N_p \quad (14)$$

donde  $h$  es la altura de la sección rectangular .

$$\begin{aligned} \text{Además: } \quad \Delta N_p &= H'_N \Delta(\Delta l)_p = H'_N \Delta \lambda 2N/N_p^2 \\ \Delta M_p &= H'_M \Delta \theta_p = H'_M \Delta \lambda \text{Sig}M/M_p = \frac{h}{4} H'_N \Delta \lambda 2N/N_p^2 \end{aligned} \quad (15)$$

$$\text{Luego: } \quad \frac{H'_M}{H'_N} = \frac{h^2}{8} \frac{N}{\text{Sig}M N_p} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \text{Se define: } \quad H'_M &= f_M \frac{4EI}{L} \text{Sig}M \\ H'_N &= f_N \frac{EA}{L} \end{aligned} \quad (17)$$

El factor  $f_M$  se obtendrá de un proceso de calibración, representando endurecimiento con valores positivos, y ablandamiento con valores negativos. Reemplazando (17) en (16) resulta:

$$f_N = f_M \frac{8}{3} \frac{N_p}{N} \quad (18)$$

$$\text{Para } N=0 \Rightarrow f_N \rightarrow \infty, \Delta(\Delta l) \rightarrow 0 \quad \text{luego } \Delta N_p = \frac{4}{2} \Delta M_p \quad (19)$$

El momento plástico y el esfuerzo normal plástico se actualizan, para cada sección extrema de la barra, con

$$\begin{bmatrix} N_p \\ M_p \end{bmatrix}_i^{u+1} = \begin{bmatrix} N_p \\ M_p \end{bmatrix}_i^u + \Delta \lambda_i \begin{bmatrix} H'_N \\ H'_M \end{bmatrix}_i \begin{bmatrix} 2N/N_p^2 \\ \text{Sig}M/M_p \end{bmatrix}_i \quad (20)$$

Con el incremento de desplazamientos  $\Delta u$ , obtenido del proceso incremental iterativo de Newton-Raphson, se encuentran, por relaciones geométricas, los incrementos de giros en las secciones A y B:  $\Delta \theta_A$ ,  $\Delta \theta_B$ , y el incremento de alargamiento  $\Delta(\Delta l)$ . Con ellos se obtienen  $\Delta N_A$ ,  $\Delta N_B = -\Delta N_A$ ,  $\Delta M_A$ ,  $\Delta M_B$ ,  $\Delta \lambda_A$ ,  $\Delta \lambda_B$ ,  $\Delta \theta_{pA}$ ,  $\Delta \theta_{pB}$ ,  $\Delta(\Delta l)_p$  de acuerdo a [1] y teniendo cuenta (13).

El ajuste final a la superficie de fluencia se realiza con el método de la rigidez tangente y corrección radial [3].

Los incrementos de esfuerzos de corte se calculan por equilibrio  $\Delta Q_A = -\Delta Q_B = (\Delta M_A + \Delta M_B) / L$ .

Esta metodología fué implementada en el programa de computación DINLI para análisis estático y dinámico de estructuras, con no linealidad física y geométrica, utilizando el método de elementos finitos con formulación en desplazamientos [1].

#### RELACION MOMENTO-CURVATURA, PARAMETROS DE ENDURECIMIENTO - ABLANDAMIENTO, ESTADOS LIMITES ULTIMOS

Se construye la relación momento-curvatura para la sección rectangular de hormigón armado, con un esfuerzo normal constante dado, a partir de las siguientes hipótesis:

- Ecuación de compatibilidad de deformaciones: validez de la hipótesis de Bernoulli, es decir la sección se mantiene plana.

- Ecuaciones constitutivas del hormigón confinado y acero: modelos propuestos por Mander et al [2].

- Equilibrio entre esfuerzo normal interno y externo: obtenido por iteraciones para cada incremento de curvatura, luego se evalúa el momento flector asociado a cada curvatura.

El proceso está implementado en un programa de computación MPHI [5], y se puede hacer un análisis monótono creciente, ó cíclico. Para este último caso la curva monótona creciente es una buena aproximación de la envolvente. Dicha curva se puede rectificar, ver ejemplos, obteniéndose el momento plástico inicial  $M_{p0}$ , la rigidez (EI), curvatura de fluencia  $\phi_y$ , endurecimiento  $h(EI)$ , ablandamiento  $s(EI)$ , momento máximo  $M_{pmax}$ , y curvatura última  $\phi_u$ , como se muestra en la fig.2.

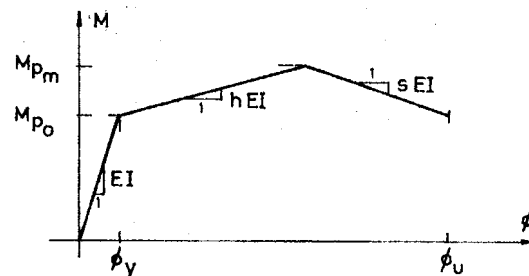


Figura 2 : Parámetros de la relación momento-curvatura

Con las pendientes de endurecimiento  $h$ , ablandamiento  $s$ , y adecuado factor de calibración se obtiene el parámetro  $f_M$  (17) que define el endurecimiento ó ablandamiento en el elemento de barra .

Para definir la curvatura última  $\phi_u$  se analizan varios estados límites :

- Degradación del momento resistente en un 20% con relación al momento máximo alcanzado .
- Capacidad de absorber energía por parte de los estribos de confinamiento . A partir del balance energético de la sección se puede estimar la deformación última a compresión en el hormigón [6] .
- Deformación última de las barras de armadura , a tracción y a compresión (pandeo) .

### EJEMPLOS

#### EJEMPLO 1

Se trata de una viga ménsula , sismorresistente , de hormigón armado , de la estructura de un balcón ,  $V_1^V$  o  $V_2^V$  de la fig.3 . Está diseñada con la carga estática según el reglamento INPRES-CIRSOC 103 con los siguientes datos : zona sísmica 3 , suelo tipo II , destino : edificio privado de habitación , materiales : hormigón H-17 , acero ADN-420 , carga permanente  $0.415 \text{ t/m}^2$  y sobrecarga  $0.5 \text{ t/m}^2$  . También se indica la sección y armaduras resultantes .

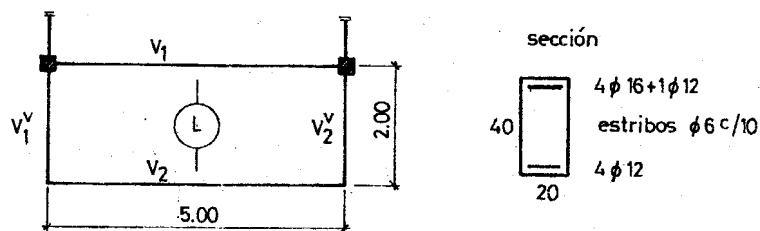


Figura 3 : Ménsula - datos y diseño s/INPRES-CIRSOC 103

En la fig.4 se muestra la ley momento-curvatura de la sección de empotramiento para análisis monótono creciente , se indican los estados límites , y los datos que surgen para el modelo de la barra , como se presentó en la fig.2 . Se destaca que los valores de  $h(EI)$  y  $s(EI)$  pueden ser ambos positivos , como en este caso , correspondiente a dos pendientes de endurecimiento , ó con valores negativos para ablandamiento .

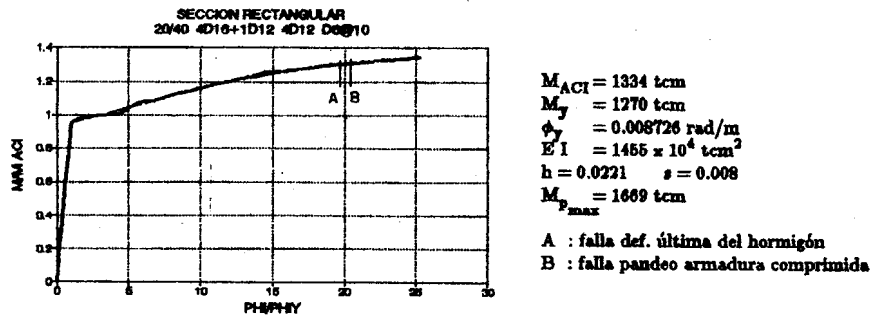


Figura 4 : Sección de la ménsula con armaduras s/INPRES-CIRSOC 103

Se ha considerado el caso de un diseño de armaduras indebido, a partir de la sollicitación determinante pero sin tener en cuenta condiciones reglamentarias de armadura comprimida mínima y estribos de confinamiento. Resulta una armadura inferior 2φ6 y estribos φ6c/14, manteniéndose la armadura superior en 4φ16+1φ12.

En la fig.5 se observa la relación momento-curvatura mostrando un breve periodo de endurecimiento y luego ablandamiento al prevalecer la caída de resistencia en el hormigón poco confinado frente al endurecimiento de la escasa armadura comprimida. Se indica también los estados límites alcanzados.

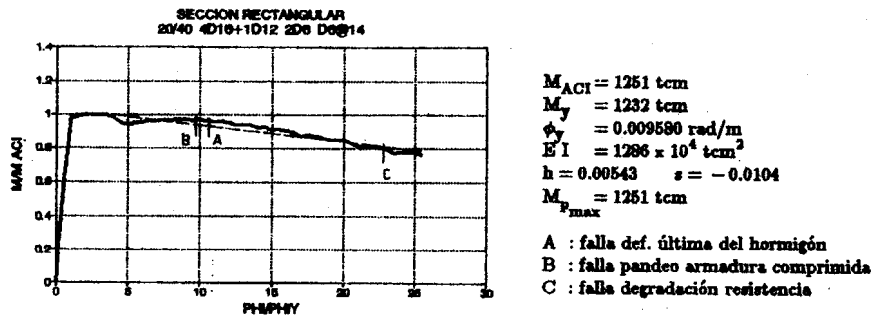


Figura 5 : Sección de la ménsula con armaduras convencionales

La respuesta estructural no lineal se obtiene imponiendo incrementos de desplazamientos verticales en el extremo libre de la ménsula. Los resultados se presentan en la fig.6 para los dos casos de armaduras : s/INPRES-CIRSOC 103 y convencionales.

La calibración del parámetro de endurecimiento  $f_M$  de la ecuación (17) se realiza igualando puntos  $M-\phi$  obtenidos para la sección de empotramiento en la respuesta estructural fig.6, y en el preprocesamiento de la sección fig.4 y fig.5. Resulta :

$$f_M = 1.7 h \quad , \quad f_M = 1.7 s \quad (21)$$

donde  $h(EI)$ ,  $s(EI)$  representan las pendientes de endurecimiento, ablandamiento de la relación momento-curvatura del análisis de la sección.

De la respuesta estructural se obtiene el momento  $M = PL$ , y la curvatura  $\phi = \phi_e + \phi_p$   
 $= M/EI + \theta_p/l_p$ , donde  $\theta_p$  es la rotación plástica en el extremo empotrado de la barra, y  $l_p = 0.75 d$  es la longitud de rótula plástica equivalente referida a la altura  $d$  de la sección.

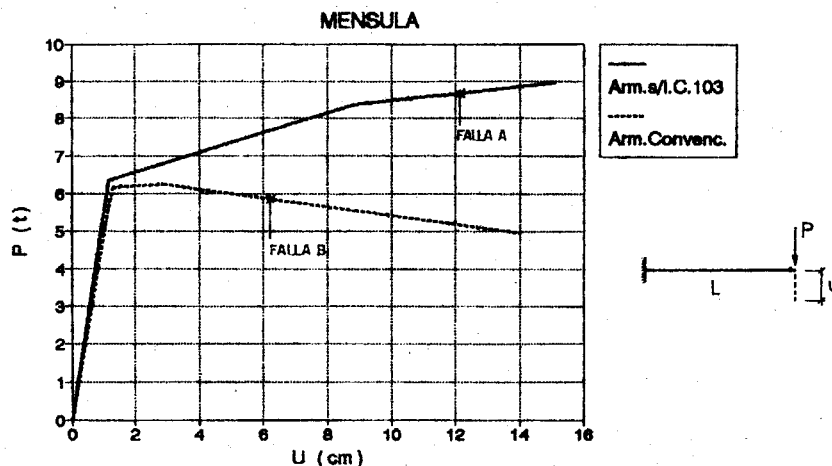


Figura 6 : Respuesta de la ménsula : fuerza-desplazamiento vertical

Este coeficiente 1.7 se mantiene constante para los dos casos analizados de endurecimiento y ablandamiento de la sección, y mientras la longitud  $L$  de la ecuación (17), corresponda a la distancia desde la sección crítica al punto de inflexión, como en este caso ya que la ménsula fué discretizada con un sólo elemento. Este valor 1.7 es algo inferior que el factor 2 recomendado en [7].

Se pone de manifiesto en la fig.6 la diferencia de resistencia y ductilidad de ambos casos :  $P_u = 8.68 \text{ t}$ ,  $\mu = 12.1/1.21 = 10$  para el diseño s/INPRES-CIRSOC 103, frente a  $P_u = 5.87 \text{ t}$ ,  $\mu = 6.2/1.28 = 4.84$  para el diseño con armaduras convencionales, destacándose la importancia del efecto de localización de deformaciones por ablandamiento.

#### EJEMPLO 2

Es un pórtico simple, sismorresistente, de hormigón armado, de la estructura de un entrespacio interno para depósito de mercadería, mostrado en la fig.7, diseñado con el método estático del reglamento INPRES-CIRSOC 103 con los siguientes datos : zona sísmica 3, suelo tipo II, edificio industrial de baja densidad de ocupación, materiales : hormigón H-17 y acero ADN-420, carga permanente  $0.41 \text{ t/m}^2$  y sobrecarga  $0.8 \text{ t/m}^2$ .

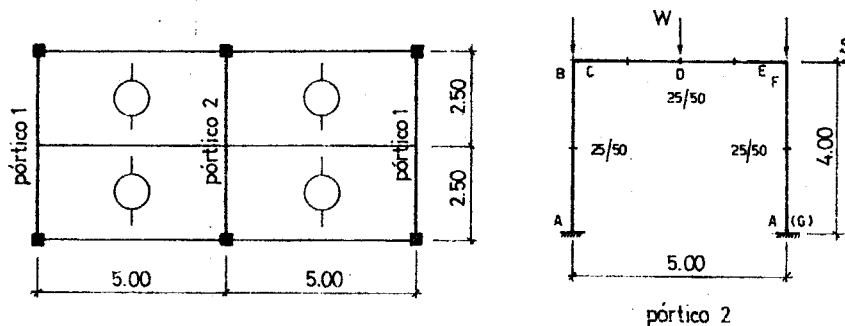


Figura 7 : Pórtico - datos geométricos y discretización

Del análisis de la ley momento-curvatura de las secciones A a G, surgen los siguientes parámetros, de acuerdo a la fig.2, con curvaturas últimas producidas en un análisis con cuatro ciclos completos  $\phi_u$ ,  $-\phi_u$ .

Tabla 1: Parámetros de las secciones del pórtico

Sección 25/50	$M_{P0}$ [tcm]	$\phi_y$ [rad/m]	EI $10^4$ [tcm <sup>2</sup> ]	$\frac{M_{Pmax}}{M_{P0}}$	h	s	$\phi_u$ [rad/m]
A	1836	0.007459	2461	1.304	0.01530	0.00205	0.18368
B	1848	0.007166	2578	1.325	0.01644	0.00174	0.14870
C	2601	0.007277	3575	1.426	0.02166	0.00232	0.18526
D	3041	0.008579	4244	1.185	0.01100	0.00086	0.06729
E	2496	0.007429	3360	1.433	0.02150	0.00221	0.20187
F	2615	0.008281	3157	1.297	0.01536	0.00113	0.14615
G	1584	0.007192	2203	1.019	0.00473	-0.00415	0.07917

Para la columna derecha, sección inferior, se consideró como variante la sección tipo G con insuficiente armadura comprimida (externa) y estribos convencionales, obteniéndose ablandamiento en dicha sección.

La respuesta del pórtico para desplazamientos horizontales impuestos en la viga se presenta en la fig.8. Las dos combinaciones reglamentarias 1.3W+S, 0.85W+S originan respuestas con diferencias pequeñas, y en ambos casos la falla se produce por alcanzarse la curvatura última en la base de las dos columnas, secciones A. En ese instante se verificó el factor de calibración para relacionar las pendientes de endurecimiento y ablandamiento de la relación momento-curvatura de las secciones, con los factores  $f_M$  de la ec.(17). Nuevamente el valor 1.7 origina diferencias menores al 2% en las secciones A,B,C,E y F que incursionan en deformaciones plásticas, asociado a L: longitud hasta el punto de momento nulo, y para la viga discretizada con dos elementos se utilizó entonces:  $f_M = 1.7 h$  y para la viga discretizada con cuatro elementos:  $f_M = 0.85 h$ , es decir reducción proporcional a la longitud del elemento.

La respuesta con la sección tipo G en la columna derecha, presenta una caída de resistencia de 26.15 t a 21.0 t, y disminución de ductilidad global de 8.5 a 3.25, pero sin entrar en ablandamiento general del pórtico, ni modificación del mecanismo de plastificación, debido a que sólo una sección fue debilitada.

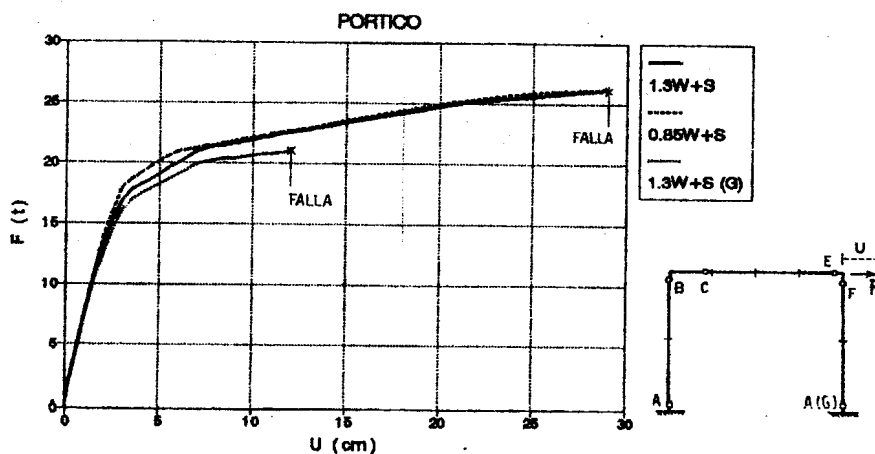


Figura 8: Respuesta del pórtico: fuerza-desplazamiento horizontal



### CONCLUSIONES

Se presentó un modelo de endurecimiento y ablandamiento para utilizar la teoría general de elastoplasticidad en elementos de barra para pórticos planos, donde se relacionan incrementos de esfuerzos internos (resultantes de tensiones) con incrementos de desplazamientos en las secciones extremas del elemento.

La calibración se realizó a partir de relaciones momento-curvatura obtenidas para las secciones, utilizando ecuaciones constitutivas realistas para el hormigón confinado y el acero. Se encontró para los ejemplos analizados, un factor constante igual a 1.7, que relaciona las pendientes de endurecimiento y ablandamiento de la relación momento-curvatura de la sección con el parámetro que representa el endurecimiento y ablandamiento del elemento de barra.

La presencia de secciones con ablandamiento, por ejemplo debido a deficiencias en el diseño, reducen sensiblemente la resistencia y ductilidad estructural.

### REFERENCIAS

1. O. Möller, M. Rubinstein, "Análisis dinámico no lineal físico y geométrico de barras: discusión del campo de aplicación de teorías aproximadas", Revista internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería, España, Vol.11, Nro.2, 151-182 (1995).
2. J.B. Mander, M.J.N Priestley, R. Park, "Seismic Design of Bridge Piers", Department of Civil Engineering, University of Canterbury, New Zealand, Research Report 84-2, (1984).
3. D.R.J. Owen, E. Hinton, Finite Elements in Plasticity: Theory and Practice, Pineridge Press Limited, U.K. (1980).
4. O.C. Zienkiewicz, El Método de los Elementos Finitos, Reverté (1980).
5. O. Möller, "Diseño probabilístico de estructuras para depósitos de agua elevados solicitadas por acción sísmica", Tesis de Magister en Ingeniería Estructural, Universidad Nacional de Rosario, (1989).
6. T. Paulay, M.J.N. Priestley, Seismic Design of Reinforced Concrete and Masonry Buildings, John Wiley & Sons Inc., (1992).
7. F.C. Filippou, A. Issa, "Nonlinear Analysis of Reinforced Concrete Frames Under Cyclic Load Reversals", Report Nro. UCB/EERC-88/12, (1988).

