Mecánica Computacional Vol. XVII
compilado por G. Etse y B. Luccioni
Tucumán, Septiembre de 1996

PANDEO DE PLACAS ANULARES DE ESPESOR CONSTANTE

Ings. Irene Elisabet Rivas, Patricia Mónica Ciancio y Jorge Aníbal Reyes

Dpto. Construcciones - Facultad de Ingeniería
Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires
Av. Del Valle 5737- C.P.: 7400 - Olavarría.

RESUMEN

En este trabajo se propone una solución aproximada para el problema del pandeo elástico de placas anulares con espesor constante, borde externo empotrado e interno libre, que resultan de interés en diversas ramas de la ingeniería estructural.

La propuesta consiste en aplicar el método optimizado de Rayleigh-Ritz, para calcular el parámetro exponencial de las funciones de Ritz de modo de hacer mínimo el factor λ para determinar las cargas críticas.

Los resultados obtenidos fueron contrastados con valores teóricos y mostraron una adecuada aproximación.

ABSTRACT

This paper proposes a aproximated solution for the problem of elastic buckling of radially loaded annular plates with constant thick and external clamped supports.

The proposal consist in applying a optimized method to obtain the Ritz's functions exponential parameter, to minimize the λ factor that allows the determination of the critical load.

The results were compared with theoretical values and they have shown a suitable approximation.

INTRODUCCION.

La determinación de cargas críticas en placas anulares es tratada regularmente en conjunto con el estudio de vibraciones libres [1], [2], el diseño y cálculo de estos elementos utilizados en sistemas de ingeniería civil, industrial, naval, aeronáutica y nuclear resultan de interés.

El tema ha sido abordado por diversos autores, recurriendo generalmente al método de Rayleigh-Ritz. Una buena fuente de utilización del mismo en problemas de la física matemática puede encontrarse en la referencia [3], que detalla la introducción de un exponente que permite una minimización de la expresión de la carga crítica, obteniéndose una buena aproximación. Por otra parte, varios autores [4] recurren a una técnica para la obtención de la función aproximante, denominada por sus autores como pb-2, que si bien proporciona generalidad, resulta en una pérdida de la simplicidad del método de Rayleigh-Ritz optimizado.

En el presente trabajo se analiza el valor de N_{cr} (carga crítica) para diversas placas anulares sometidas a presión interna y externa, utilizando funciones aproximantes aplicando el método de Rayleigh-Ritz optimizado.

APLICACION DEL METODO DE RAYLEIGH-RITZ OPTIMIZADO.

Partiendo de la expresión de la energía de deformación de una placa anular:

$$U = \frac{1}{2}\iint D\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2 - \frac{2.(1-\mu)}{r}\cdot\frac{\partial w}{\partial r}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}\right] r.dr.d\theta + \frac{1}{2}\iint N_r\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2 .r.dr.d\theta \qquad (1)$$

Siendo:

- D : rigidez de la placa a flexión.
- Nr: esfuerzo radial.
- w : amplitud del desplazamiento.
- r, θ : coordenadas polares.

Por simetría radial:

$$w = w(r) \qquad (2)$$

$$r = b\,.\,x \qquad (3)$$

$$\frac{dw}{dr} = \frac{1}{b}\cdot\frac{dw}{dx} \qquad (4)$$

La expresión del funcional de energía para una placa anular de espesor constante y con simetría radial es:

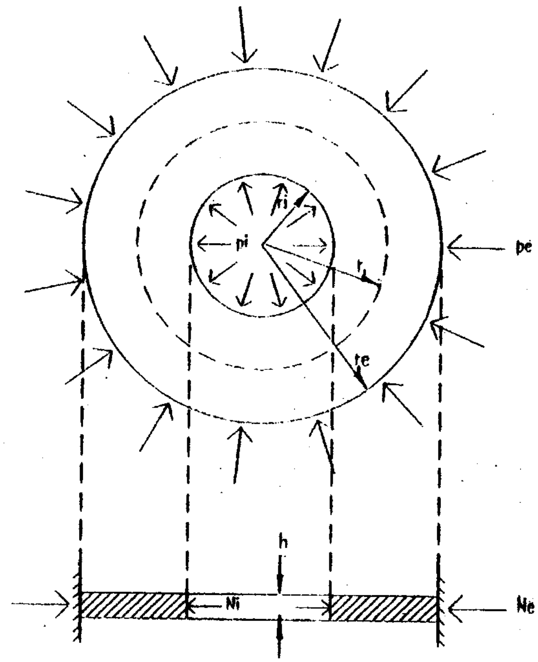
$$U = \frac{\pi}{b^2}\left\{\int D\left[\left(\frac{d^2w}{dx^2} + \frac{1}{x}\cdot\frac{dw}{dx}\right)^2 - \frac{2.(1-\mu)}{x}\cdot\frac{dw}{dx}\cdot\frac{dw^2}{dx^2}\right].x.dx + b^2\int N_r\left(\frac{dw}{dx}\right)^2 .x\,dx\right\} \qquad (5)$$

El desplazamiento de la superficie transversal puede escribirse:

$$w \cong Wa(r) = \sum_{j=0}^{j} A_j \,.\, (\alpha_j \,.\, x^{\gamma} + \beta_j \,.\, x^2 + 1) \,.\, x^{2j} \quad \text{.....(6)}$$

Donde A_j es un coeficiente desconocido, mientras que el producto de los dos factores restantes representan la función de Ritz.

Se analizan placas anulares de espesor constante, radialmente cargadas y con su borde externo empotrado y borde interno libre, como aparece en el siguiente esquema.



De acuerdo a las condiciones de borde empotrado el término $\frac{2.(1-\mu)}{x} \,.\, \frac{dw}{dx} \,.\, \frac{d^2w}{d^2x}$ de la expresión (5) se anula.

Llamando w_j a la función de Ritz:

$$w_j = (\alpha_j \,.\, x^{\gamma} + \beta_j \,.\, x^2 + 1) \,.\, x^{2.j} \quad \text{.....(7)}$$

la expresión (6) se puede escribir:

$$w_a(r) = \sum_{j=0}^{j} A_j \,.\, w_j \quad \text{.....(8)}$$

Aplicando las condiciones de borde se obtienen:

$$\alpha_j = \frac{2}{\gamma - 2} \quad ; \quad \beta_j = \frac{-\gamma}{\gamma - 2} \qquad \text{(9)}$$

Considerando:

$$Ne = p_e \,.\, h \quad ; \quad N_i = p_i \,.\, h \quad ; \quad \frac{r}{r_e} = x \quad ; \quad \frac{r_i}{r} = \frac{k}{x} \quad ; \quad \frac{r_i}{r_e} = k \quad ; \quad \frac{p_i}{p_e} = \frac{Ni}{Ne} = t \qquad \text{(10)}$$

Los esfuerzos Nr resultan:

$$Nr = \frac{Ne}{1-k^2}\left[1 - \left(\frac{k}{x}\right)^2 - t\,.\,k^2\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)\right] \qquad \text{(11)}$$

Por lo anterior el funcional de energía se expresaría:

$$\frac{b^2}{\pi.D}\,U(W_a) = \int_k^1 \left(W_a'' + \frac{1}{x}\,.\,W_a'\right)^2 .\, x\,dx - \frac{\lambda}{(1-k^2)}\int_k^1 \left[1 - \left(\frac{k}{x}\right)^2 - t.k^2.\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)\right](W_a')^2 .x\,dx \qquad \text{(12)}$$

donde λ es:

$$\lambda = \frac{Ne\,.\,b^2}{D} \qquad \text{(13)}$$

Tomando un solo término de la ecuacuón (8) e introduciendo las derivadas respectivas de la función aproximante (7) en la expresión (12); por condición de minimización se procede a derivar el funcional de energía de deformación con respecto a la constante A_i obteniendo una ecuación homogénea de la forma:

$$A_1\,.\left(B_1 - \frac{\lambda}{1-k^2}\,.\,B_2\right) = 0 \qquad \text{(14)}$$

La condición para que el sistema tenga solución distinta de la trivial será que el factor que acompaña a la constante A_i sea nulo (15).

$$2.\gamma\left[\frac{(\gamma-2)^2}{(\gamma-1)} - \frac{\gamma^2.k^{2(\gamma-1)}}{(\gamma-1)} + 8.k^\gamma - 4.k^2\right] - \frac{\lambda}{1-k^2}\,.\left[(1-t.k^2)\,.\left(\frac{(\gamma-2)^2}{(\gamma+2)} - 2.k^{2.\gamma} + \frac{8.\gamma.k^{\gamma+2}}{(\gamma+2)} - \gamma.k^4\right) -\right.$$

$$\left. - 2.k^2\,.\,(1-t)\,.\left(\frac{(\gamma-2)^2}{(\gamma-1)} - \frac{\gamma.k^{2.(\gamma-1)}}{(\gamma-1)} + 4.k^\gamma - \gamma.k^2\right)\right] = 0 \qquad \text{(15)}$$

Esta condición permite obtener una expresión para $\lambda = \lambda(\gamma, k, t)$.

CASOS ANALIZADOS Y RESULTADOS OBTENIDOS.

Se analizaron placas anulares con distintas relaciones entre radio interior y exterior, las cuales están representadas por el parámetro adimensional **k**, y variando también el parámetro **t** que identifica la relación entre la presión interior y exterior.

Primeramente se asignaron para t valores positivos, o sea se consideró a la placa sometida tanto a presión interior como exterior, y posteriormente valores negativos, o sea presión exterior y succión interior.

Para distintas combinaciones de k y t se buscó el γ óptimo, es decir aquel para el cual λ resultó mínimo, los distintos puntos obtenidos se representan en los gráficos 1 y 2.

Gráfico 1.

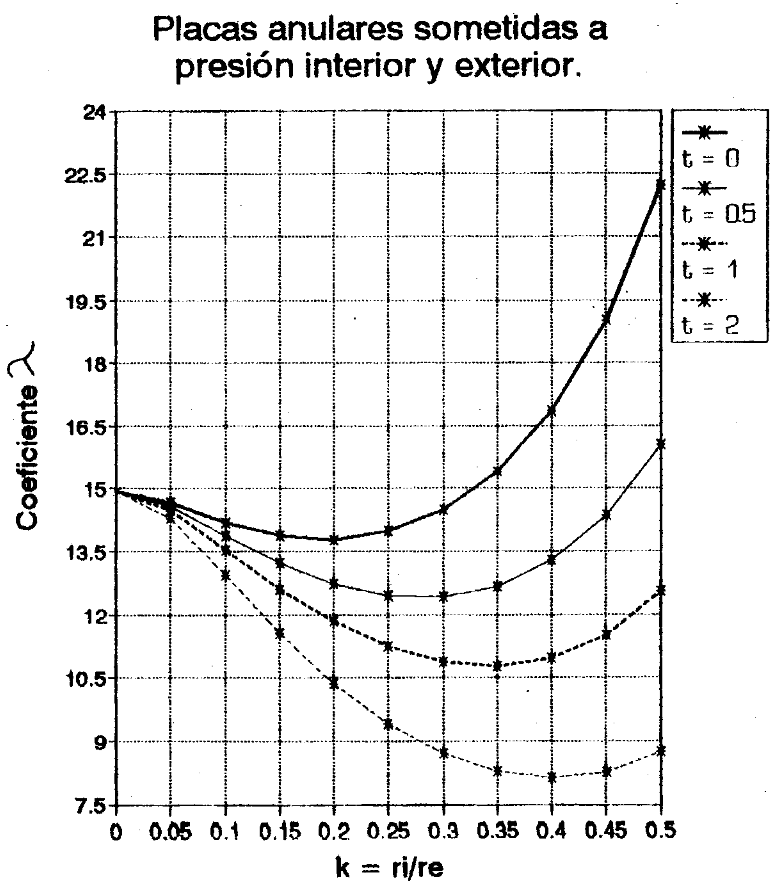
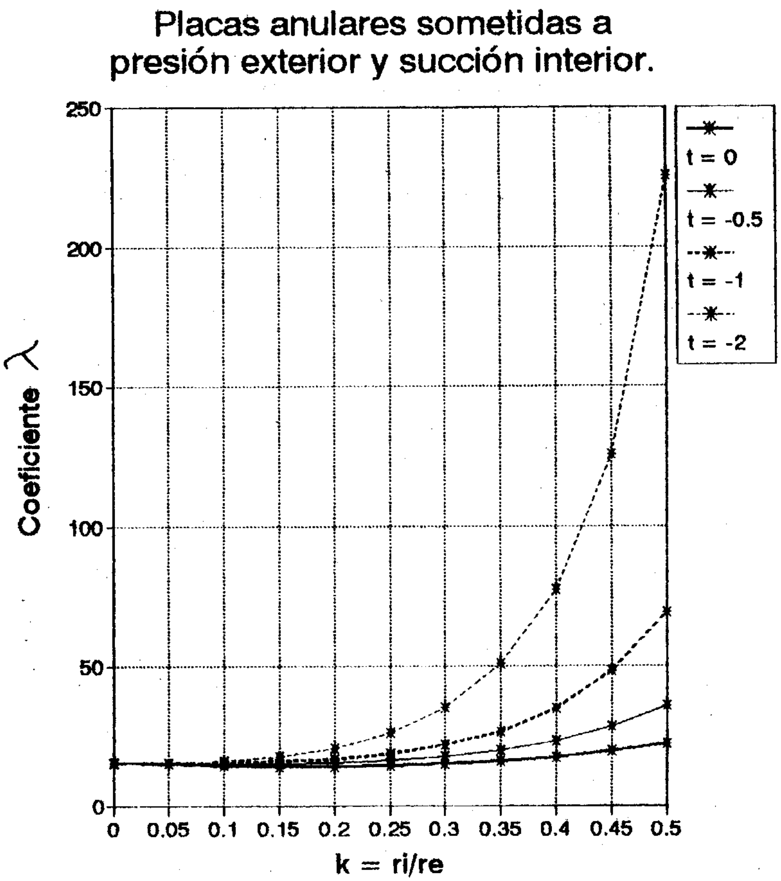


Gráfico 2.



CONCLUSIONES

* El valor de la carga crítica que se obtiene para placas anulares al emplear el presente método, para $k = 0$ ($r_i = 0$) se corresponde con el de placa circular que aparece en la bibliografía clásica.

* La carga crítica de placas circulares sometidas a presión exterior resulta menor que la de placas anulares con presión exterior y succión interior, cualquiera sea la relación entre radios r_i y r_e. A medida que aumenta el valor de la succión interior aumenta el valor de la carga crítica.

* En el caso de presión interna y externa, es decir para todos los valores positivos de t analizados sucede lo contrario de lo indicado en el párrafo anterior. Osea, el caso más desfavorable (la menor carga crítica) se presenta cuando la presión interior es el doble de la exterior, y específicamente cuando el radio interior representa el 40% del radio exterior.

REFERENCIAS:

[1]. Bambill, D , Reyes, J, and Laura, P.A.A. . (1996). "A NOTE ON TRANSVERSE AXISYMMETRIC VIBRATIOS OF ANNULAR PLATES OF NON-UNIFORM THICKNESS".
"Journal of Sound and Vibration". 1-6.

[2]. Avalos, D. R, Laura, P. A. A. (1979). "A NOTE ON TRANSVERSE VIBRATIONS OF ANNULAR PLATES ELASTICALLY RESTRAINED AGAINST ROTATION ALONG THE EDGES".
"Journal of Sound and Vibration". 63-67.

[3]. Laura, P. A. A, Ercoli, L, and Gutiérrez. "OPTIMIZED RAYLEIGH-RITZ METHOD".
Monografia. IMA Nº 95.

[4]. Liew, K, and Wang, C. (1992). "ELASTIC BUCKLING OF RECTANGULAR PLATES WITH CURVED INTERNAL SUPPORTS".
"Journal of Structural Engineering", Vol. 118, Nº 6, 1480-1493.