

LITOTRIPSIA: ESTUDIO DE LA RUPTURA DE CALCULOS RENALES MEDIANTE ULTRASONIDO

Gabriela F. Puente, Fabián Bonetto, Claudio Padra
Instituto Balseiro – Centro Atómico Bariloche - Argentina

RESUMEN

En este trabajo se estudian algunos aspectos que describen al moderno tratamiento utilizado para la ruptura de los cálculos renales conocido como Litotripsia. Durante este tratamiento intensos pulsos de ultrasonido son utilizados para romper el cálculo en pequeñas piezas suficientes como para que cada una de ellas pueda ser liberada naturalmente.

Se desarrolló una teoría a cerca del comportamiento de un cálculo renal cuando se impone como condición de contorno el pulso de Litotripsia.

Para estudiar la respuesta de un fluido en presencia de fuertes ondas de choque como ocurre en este caso, se utilizó un algoritmo recientemente desarrollado que consiste básicamente de dos pasos: un paso de integración que se basa en resolver las ecuaciones de conservación en forma Lagrangiana con un esquema de diferencias finitas que utiliza los valores promediados con la masa en una grilla desplazada. En el segundo paso se utilizan las soluciones obtenidas por el primer paso, procesándolas con correcciones que conservan la cantidad de momento total para eliminar las oscilaciones espurias cerca de las ondas de choque.

Se desarrolló un método que superpone instante a instante los rayos que, mediante las reflexiones que se producen debido al cambio de impedancia entre el material del reflector y el fluido en su interior, llegan al segundo foco

INTRODUCCION

El proceso utilizado es Litotripsia extracorporea mediante el cual ondas de choque acústicas, generadas fuera del cuerpo, son enfocadas hacia el cálculo, causando su fragmentación. En este procedimiento intensos pulsos de ultrasonido (entre 200 y 1000 atmósferas en el pico, durante algunos microsegundos), son utilizados para romper la piedra en fragmentos suficientemente pequeños para poder ser liberados en forma natural.

El paciente es sumergido en un tanque de agua el cual contiene un generador de pulsos más un disruptor y un reflector elipsoidal. El generador es colocado en uno de los focos del reflector y el paciente en el otro. Una onda de choque esférica expansiva, iniciada en el generador, es convertida por reflexión en una onda de choque que converge en el cálculo renal. [1]

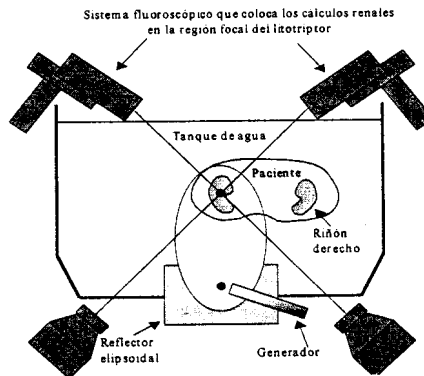


Figura 1 - Disposición del generador de ondas de choque y el paciente en el reflector elipsoidal durante el tratamiento.

Una desventaja que aparece con la utilización de este tratamiento es la inducción de cavitación. Entre los posibles perjuicios que puede provocar una burbuja de aire dentro del organismo de una persona, los más importantes a tener en cuenta son: daño por erosión, que se produce cuando una burbuja colapsa cerca de una superficie sólida como puede ser la pared de un órgano vital, tomando la forma de un jet [2]; por otro lado si la burbuja se introduce en el torrente sanguíneo, dependiendo del radio que ésta tenga, puede causar la muerte del paciente.

La forma de la onda del pulso de Litotripsia es modelada como una oscilación modulada por una exponencial [1].

RUPTURA DE UN CALCULO RENAL

Ecuación de movimiento

Para desarrollar una teoría que se aproximara a la realidad se supuso una piedra totalmente esférica con un hueco concéntrico de radio variable y de un material que sigue las leyes de la elasticidad lineal (Ecuación de Navier).

Para resolver la ecuación que gobierna el movimiento del material se discretizó la dependencia espacial con el método de Elementos Finitos y para la resolución del problema temporal se utilizó el algoritmo de Newmark.

La ecuación que rige el movimiento de un sólido elástico ideal, en ausencia de fuerzas de volumen, para pequeñas deformaciones [9].

$$\rho_s \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial t^2} = \nabla \sigma(\bar{w}) \quad \text{en } \Omega_s \quad (1)$$

donde ρ_s es la densidad del sólido, \bar{w} es el desplazamiento, t es el tiempo, σ es el tensor de tensiones Ω_s es el dominio ocupado por el sólido elástico.

El tensor de tensiones para el caso particular de pequeñas deformaciones es una matriz simétrica, que depende solamente del vector desplazamiento y de los parámetros del material.

Discretización espacial (Formulación variacional)

Multiplicando la Ecuación (1) por un desplazamiento virtual \bar{v} e integrando sobre todo el dominio que ocupa el sólido, se obtiene la formulación variacional del problema.

Para la resolución de la dependencia espacial a través Elementos Finitos se utilizó como funciones de forma, funciones lineales. Proponiendo como solución discreta de la Ecuación (1) una combinación lineal de estas funciones de forma y reemplazándolos en la ecuación discreta, se obtiene:

$$M \cdot \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial t^2} = -K \cdot \bar{W} + \bar{F} \quad (2)$$

Se estudió en particular el comportamiento de un sólido elástico ideal esférico de radio exterior R y radio interior r , en respuesta al pulso de ultrasonido como condición de contorno externa para distintas amplitudes (A) iniciales del pulso y como condición de contorno interna, se supuso en todo momento que la presión era la atmosférica.

Discretización temporal

Para discretizar en la variable se utilizó la derivada segunda centrada en el tiempo para resolver el sistema discreto, pero en lugar de evaluar el término de la derecha de la Ecuación (2) a tiempo t_n , como se hace usualmente, para calcular el desplazamiento a tiempo t_{n+1} , se hizo un promedio pesado evaluando este término en los tiempos t_{n-1} , t_n y t_{n+1} utilizando el algoritmo de Newmark [10]:

$$M \cdot \left[\frac{W^{n+1} + 2W^n + W^{n-1}}{\Delta t^2} \right] + K \cdot \left[\theta \cdot W^{n+1} + \left(\frac{1}{2} + \delta - 2\theta \right) W^n + \left(\frac{1}{2} - \delta + \theta \right) W^{n-1} \right] = \left[\theta \cdot F^{n+1} + \left(\frac{1}{2} + \delta - 2\theta \right) F^n + \left(\frac{1}{2} - \delta + \theta \right) F^{n-1} \right] \quad (3)$$

donde θ y δ son parámetros ajustables, Δt es el paso temporal y el supra - índice n , $n-1$ y $n+1$ significa que la función está evaluada en los instantes t_n , t_{n-1} y t_{n+1} , respectivamente y M y K son las matrices de masa y rigidez respectivamente.

En la Figura 2 se observa una comparación entre las tensiones que se producen en el nodo de la frontera externa y en la frontera interna, para el caso en particular en que el radio interno es igual a $0.1 \cdot R$.

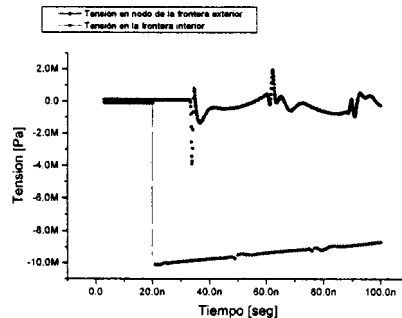


Figura 2 – Tensión en función del tiempo para el primer y último nodos de la piedra para el caso particular en que el radio interno de la misma es $0.1 \cdot R$.

En la figura anterior podemos apreciar que la tensión que se produce en el nodo interno no supera la tensión impuesta como condición de contorno en el nodo exterior. Una peculiaridad que se observa en la tensión que se produce en el nodo interno es la repetitividad de pulsos, que a simple vista se puede observar que la distancia entre uno y su consecutivo es la misma. Este hecho se debe al cambio de impedancia que hay entre la piedra y el medio externo, produciéndose reflexiones de menor amplitud, (en este caso las reflexiones que se observan son provenientes del borde externo ya que estamos analizando en particular el nodo de la frontera interna), del pulso que inicialmente fue generado en el borde exterior. La razón por la cual la distancia entre dos pulsos consecutivos es la misma es porque la velocidad del sonido en ese medio es un parámetro constante.

En la Figura 3 se puede observar las tensiones máximas que se producen en algunas posiciones del interior del sólido, para diferentes radios internos.

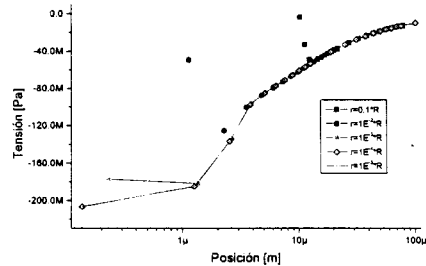


Figura 3 – Tensión máxima en algunos nodos en función de su posición para distintos radios internos.

Podemos apreciar en la figura anterior que a medida que el radio interior disminuye ocurren dos fenómenos: en primer lugar el valor absoluto de la tensión máxima aumenta y en segundo lugar, la posición en la cual se produce esa tensión máxima, se acerca cada vez más al origen. Los dos efectos se producen hasta un radio interior mínimo, a partir del cual, por más que el radio interno siga disminuyendo, la curva no tiene cambios significativos. Si tenemos en cuenta estos últimos resultados, podemos concluir que para una esfera sólida o con un radio interior pequeño la posibilidad de falla por ruptura es grande, y ocurre en el centro de la misma.

METODO DE CORRECCION DE MOMENTO

En este trabajo se presenta un método numérico recientemente desarrollado que puede ser utilizado para cualquier problema general de fluidodinámica.

Este método consiste en resolver las leyes de conservación desarrollado en geometría plana, cilíndrica o esférica utilizando una grilla desplazada, manteniendo la cantidad de masa entre dos nodos consecutivos como una constante. Para no obtener una solución oscilatoria, la cantidad corregida toma unos pocos puntos cerca de la discontinuidad para suprimir las oscilaciones espurias o de Gibbs. Para ello se utilizó un algoritmo que detecta las oscilaciones [6].

Ecuaciones de movimiento para el fluido

Basándonos en las cantidades promediadas con la masa, nos queda el siguiente sistema de ecuaciones ordinarias:

$$\frac{Dv_{j-1/2}}{Dt} = \frac{r_j^\alpha \cdot u_j - r_{j-1}^\alpha \cdot u_{j-1}}{\Delta m_{j-1/2}} \quad (4)$$

$$\frac{Du_j}{Dt} = -v_j \cdot \left[\frac{p_{j+1/2} - p_{j-1/2}}{r_{j+1/2} - r_{j-1/2}} \right] \quad (5)$$

$$\frac{De_{j-1/2}}{Dt} = -p_{j-1/2} \cdot \frac{Dv_{j-1/2}}{Dt} \quad (6)$$

$$\frac{dr_j}{dt} = u_j \quad (7)$$

Para obtener una solución simultánea de todas las cantidades, se utilizó como integración numérica en el tiempo el método de Runge Kutta Merson.

Como la cantidad de masa entre dos nodos consecutivos se mantiene constante, el volumen específico promediado con la masa, puede ser directamente determinado sin tener que recurrir a la integración, usando directamente los valores r_j^m y r_{j-1}^m , obtenidos de la integración de la velocidad u_j .

El método descrito anteriormente, sin un paso correctivo, produce oscilaciones espurias cerca de las discontinuidades.

Como se puede ver en las Ecuaciones (6), (7) y (8), el volumen específico, la energía interna específica, la presión y la variable espacial independiente r_i sólo dependen de la velocidad u_i , por lo cual es la cantidad más importante a resolver en el tiempo.

Si pudiéramos obtener el campo de velocidades en forma exacta, no se necesitaría hacer ningún tipo de corrección.

En la Ecuación de conservación de momento (7) se observa que el lado derecho consiste de dos componentes: la densidad promediada con la masa y el gradiente de presión. Debido al uso de una densidad promediada con la masa y un gradiente de presión constante en cada zona de la grilla desplazada, el perfil de aceleración resultante en el intervalo entre $r_{j+1/2}$ y $r_{j-1/2}$, es constante. La velocidad que aparece en el lado izquierdo, induce a una velocidad constante en el mismo intervalo. Esta clase de diferencia da

como resultado un movimiento de cuerpo rígido, cuyo resultado es un momento atrasado causado en un nodo compresible (resultado propio de utilizar como método de discretización Diferencias Finitas). El momento sobre – estimado es puesto en el nodo compresible, para conservar la cantidad total de momento. En otras palabras, la corrección del momento no es más que un proceso para recuperar el movimiento real del fluido.

Sean \tilde{u}_j^{n+1} y \tilde{e}_j^{n+1} la velocidad y la energía específica obtenida justo después de la integración, respectivamente. Se puede ver que el momento en los dos nodos, $\rho_j^n \cdot \tilde{u}_j^{n+1}$ y $\rho_{j+1}^n \cdot \tilde{u}_{j+1}^{n+1}$ son solapados, o mezclados en el sentido de un fluido continuo, en la región de compresión. La cantidad de momento transfiriendo del j-ésimo al j+1 –ésimo nodo en el proceso de recalcular los valores de los promedios pesados con la masa para el siguiente paso está determinado por:

$$\Delta \tilde{M}_{j+1/2}^{n+1} = \Delta V_{j+1/2,c}^{n+1} \cdot \rho_{j+1/2}^n \cdot (\tilde{u}_j^{n+1} - \tilde{u}_{j+1}^{n+1}) \quad (8)$$

si el volumen comprimido $\Delta V_{j+1/2,c}^{n+1} > 0$. En el caso en que es negativo, no hay región de mezcla, entonces no hay corrección. El resultado del momento promediado con la masa después es:

$$M_{j,r}^{n+1} = \tilde{M}_{j,r}^{n+1} - \Delta \tilde{M}_{j+1/2}^{n+1} \quad (9)$$

$$M_{j+l,l}^{n+1} = \tilde{M}_{j+l,l}^{n+1} + \Delta \tilde{M}_{j+1/2}^{n+1}$$

(correcciones para el lado derecho del j-ésimo nodo y el lado izquierdo del j+1 –ésimo nodo respectivamente).

Como se puede ver en las ecuaciones anteriores, la cantidad de momento total se conserva durante el proceso de corrección. De igual manera corrigiendo del otro lado, la velocidad final corregida en el j –ésimo nodo es:

$$u_j^{n+1} = \frac{M_{j,l}^{n+1} + M_{j,r}^{n+1}}{\Delta m_j} \quad (10)$$

Las oscilaciones son producidas principalmente debido a la sobre – estimación de la velocidad cerca de la onda de choque con las ecuaciones de Diferencias Finitas, y pueden ser controladas intensificando la transferencia de momento en la región donde se detectan las oscilaciones. El método de detección de oscilaciones sigue el siguiente procedimiento:

Sean Δ_r y Δ_l las derivadas primeras por adelante y por atraso, respectivamente, si la siguiente condición se satisface en cada nodo:

$$\left\{ (\Delta_r p_{j+1/2}) (\Delta_l p_{j+1/2}) < 0 \right\} \& \left\{ \left((\Delta_r u_j) (\Delta_l u_j) < 0 \right) \text{ or } \left((\Delta_r u_{j+1}) (\Delta_l u_{j+1}) < 0 \right) \right\} \& \text{noadmissible}(j+1/2, p^n, p^{n+1}) \quad (11)$$

la solución obtenida en ese paso de integración no está físicamente acorde con la propiedad de conservar cada cantidad.

La función *admissible*(j + 1/2, pⁿ, pⁿ⁺¹) retorna verdadero si:

$$\min(p_{j-1/2}^n, p_{j+1/2}^n, p_{j+3/2}^n) < p_j^{n+1} < \max(p_{j-1/2}^n, p_{j+1/2}^n, p_{j+3/2}^n) \quad (12)$$

Sustituyendo la ecuación de corrección en la ecuación de conservación de energía, se puede determinar la cantidad de energía específica corregida.

La densidad en el procedimiento de corrección es automáticamente ajustada en el paso de integración debido al momento y energía corregida.

Pulso de Litotripsia

Para resolver este problema, se tomaron en particular que P0 es 1 atm y A 100. En la Figura 4 se observa la velocidad del liquido en función de la posición a distintos tiempos, en una esfera de radio 0.025 m. A medida que el pulso se acerca al origen va aumentando su amplitud, siguiendo la ley 1/r ya que se trata de una onda que se propaga esféricamente.

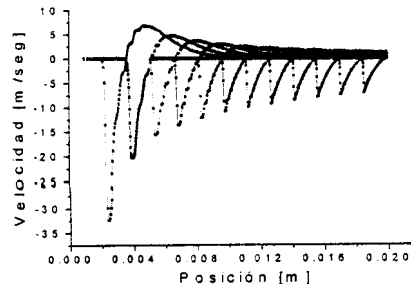


Figura 4 – Velocidad del fluido en función de la posición.

En la Figura 4 se observa la velocidad que adquiere el agua en función de la posición al centro de la esfera que define el dominio, cuyo radio es de 0.025 m, cuando se impone como condición de contorno un pulso de Litotripsia. Los pasos temporales entre dos curvas consecutivas son iguales, y a simple vista se puede observar que la distancia entre ellas también es prácticamente igual, lo que significa que la velocidad con que se propaga la onda de choque es constante e igual a la velocidad del sonido en ese medio, resultado esperado, ya que la compresibilidad del fluido se mantiene constante a lo largo del proceso.

METODO DE SUPERPOSICION

Se estudió el fenómeno de reflexión de una onda esférica generada por un litotriptor, cuya onda se propaga en agua y sufre un cambio de impedancia al reflejarse en un segundo medio (vidrio).

El objetivo de este método es calcular en forma numérica la intensidad del pulso que llega al segundo foco, para lo cual se consideró que el litotriptor generaba un pulso en forma isotrópica.

Para los cálculos se realizaron las siguientes aproximaciones: en primer lugar, se consideró que las paredes del elipsoide de revolución son superficies planas. Si bien las ondas generadas por el litotriptor son esféricas, se tomó como coeficiente de reflexión el correspondiente a ondas planas que se reflejan sobre superficies planas. Estas suposiciones están sustentadas por una discretización angular suficiente que permite aproximar linealmente la superficie de reflexión.

Consideremos una onda esférica que se genera en el foco 1 del elipsoide con una cierta amplitud P_1 . La distancia que recorre un pulso en particular, antes de la reflexión, depende de la dirección de propagación:

$$x(\alpha) = \frac{b^2}{(a + f \cdot \cos \alpha)} \quad (13)$$

donde α es el ángulo medido con respecto al eje horizontal, a es el semi-eje mayor, b es el semi-eje menor y f es el foco del elipsoide.

Por lo tanto, la amplitud con que el pulso generado en el primer foco llega a la superficie de la elipse, antes de la reflexión es $P_1 \cdot F(x(\alpha))$, donde la función F es la correspondiente a la solución de propagación de una onda esférica, que en este caso decae como la inversa de la distancia recorrida $x(\alpha)$. Al reflejarse, como el coeficiente de reflexión es menor que la unidad, la amplitud decae aún más a $P_1 \cdot R(\theta(\alpha)) \cdot F(x(\alpha))$.

Mediante la utilización de relaciones de trigonometría, se puede obtener la relación entre el ángulo que forma el rayo que parte del primer foco con la horizontal (α), y el ángulo que forma este mismo con la normal a la tangente de la superficie de la elipse en el punto de incidencia (θ).

Según la ley de la reflexión de una onda esférica sobre una superficie plana, la onda reflejada también es una onda esférica cuyo centro es simétrico al punto donde fue generada la onda, respecto de la superficie, tangente al punto en donde la onda se refleja.

Es como tener una onda esférica que provino del punto f' con una amplitud $P_1 \cdot R(\theta(\alpha))$, y que al llegar al punto f_2 la amplitud de ese rayo en particular es $P_1 \cdot R(\theta(\alpha)) \cdot F(2a)$.

Si sumamos la contribución de todos los rayos que se reflejan por primera vez sobre la superficie total del elipsoide, obtenemos la amplitud total con la cual llega el pulso de presión al segundo foco:

$$P(f_2) = \frac{\int P_1 \cdot R(\theta(\alpha)) \cdot F(2a) \cdot N \cdot dA}{A_T} \quad (14)$$

donde N es una constante de normalización y A_T es la superficie externa del elipsoide. El dA es el diferencial de área correspondiente.

Este cálculo realizado en la Ecuación (14) fue posible ya que todos los rayos llegan al mismo tiempo, recorriendo una distancia de $2a$ a la velocidad del sonido en ese medio, excepto el rayo que se dirige directamente hacia f_2 , que comparativamente no tiene contribución en la integral. Si la reflexión fuera total, la presión que llegaría al segundo foco sería la misma que la generada en f_1 , por lo tanto esa constante de normalización puede ser determinada unívocamente

$$N = \frac{1}{F(2a)}$$

Si reemplazamos la constante de normalización en la expresión (14), podemos ver que la forma que tiene la función de propagación de una onda esférica no es relevante.

P_1 depende del tiempo, y es el pulso de Litotripsia en el instante que corresponde, y que los cálculos realizados tienen sentido ya que no hay deformación en la forma del pulso, debido a que la viscosidad en los cálculos ha sido despreciada.

En el tratamiento de Litotripsia se utiliza por lo general un reflector elipsoidal cuyos ejes mayor y menor son de aproximadamente 24 y 18 cm, respectivamente. Por otro lado sabemos por los análisis realizados en el capítulo 3, que el pulso generado por el litotriptor viaja sin deformarse a la velocidad del sonido en el agua. Por lo tanto, el primer pulso que llega al foco 2, después de la primer reflexión, lo hace a $1.6 \cdot 10^{-4}$ segundos.

Como material del reflector se utilizó vidrio y el fluido que se encuentra en el interior del reflector se consideró agua.

Como primer ejemplo, se consideró la generación de un solo pulso y se observó con qué amplitud llegaba al segundo foco en las múltiples reflexiones, considerando un recinto con las propiedades que se utilizan usualmente para la fabricación del dispositivo para el tratamiento de ruptura de cálculos renales con ultrasonido (24 x 18 cm). La amplitud A del pulso de Litotripsia, en este caso no tiene mucho sentido, ya que sólo hay que saber cuál es la integral de las multiplicaciones de los coeficientes de reflexión y a ese resultado multiplicarlo por la amplitud que tenga el pulso en el tiempo que corresponda. En los cálculos realizados se tomó como caso particular $A = 100$.

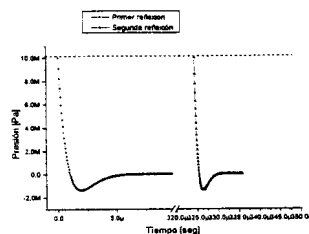


Figura 5— Presión obtenida en segundo foco en función del tiempo.

En la Figura 5 se puede observar la amplitud que tienen los pulsos al llegar al segundo foco en función del tiempo. El gráfico correspondiente a primer reflexión es el primer pulso que llega al foco 2, luego de ser generado en el foco 1, o sea el que se reflejó una sola vez en la superficie de separación entre los dos medios, mientras que el que corresponde a la segunda reflexión es el pulso que partió del foco 2, se refleja en la superficie de la elipse, pasa por el foco 1 y se vuelve a reflejar en la superficie, hasta que nuevamente llega al foco 2, es decir, que es el pulso que generado por primera vez por el litotriptor se refleja tres veces en la superficie de la elipse. En línea punteada se puede ver la amplitud que tiene el pulso original, y comparándolo con el pulso reflejado, la amplitud de este último no ha decaído prácticamente nada. Esto se debe al valor que posee el coeficiente de reflexión en función del ángulo.

La amplitud del pulso que llega por segunda vez al foco 2, después de haberse reflejado 3 veces sobre la superficie de separación de los dos medios no ha decaído respecto de la reflexión que llegó por primera vez.

ANÁLISIS Y CONCLUSIONES

El método propuesto para la resolución de las ecuaciones acopladas fue el de corrección de momento, donde se obtuvieron resultados muy precisos, aún donde se producían las ondas de choque o discontinuidades, mientras que otros algoritmos que también reducen la amplitud de las oscilaciones espurias, no capturan estas discontinuidades con la precisión deseada.

Los resultados que se obtienen al aplicar corrección de momento poseen una gran confiabilidad. Esta afirmación se basa en los análisis realizados a partir de problemas con soluciones analíticas conocidas, donde las discontinuidades en las variables eran muy importantes.

El método de corrección de momento es un método conservativo, es decir, mantiene constante la cantidad de momento total, restando una cierta cantidad de momento en el nodo donde se presenta la sobreestimación y sumando la misma cantidad a uno de los nodos vecinos.

Una de las ventajas que presenta el algoritmo de Newmark, es que convierte al sistema de ecuaciones diferenciales en un sistema algebraico, para el cual se puede despejar en forma sencilla y rápida la solución del siguiente paso temporal.

Para un mismo radio interno y externo de la piedra, la tensión era lineal a la condición de frontera externa.

El método de superposición de ondas desarrollado es un método sencillo para obtener una estimación de la presión en el segundo foco. Un hecho que debe ser tomado en cuenta es que para el caso en que el elipsoide sea perfectamente de revolución, no existen prácticamente pérdidas de energía en las reflexiones debido a la composición de los materiales comúnmente utilizados en el tratamiento, donde la diferencia de impedancia entre los dos medios es muy grande.

REFERENCIAS

- [1] L. Howie, D. Schaeffer, M. Shearer y P. Zhong. *Lithotripsy: The treatment of kidney stones with shock waves*. Siam Rev. Vol 2, 356 – 371, (1998).
- [2] W. Lauterborn y H. Bolle. *Experimental investigations of cavitation – bubble collapse in the neighbourhood of a solid boundary*. J. Fluid Mech. Vol 72, 391 – 399, (1975).
- [3] L. Perko. *Differential equations and dynamical systems*. Springer Verlag, (1991).
- [4] W. Press, S. Teukolsky, W. Vetterling y B. Flannery. *Numerical recipes in C*. Cambridge University Press, (1997). (Primera edición 1988).
- [5] B. Engquist, P. Lötstedt y B. Sjögreen. *Nonlinear filters for efficient shock computation*. Mathematics of computation. Vol 52, 509 – 537, (1989).
- [6] S. Bae, R. Lahey, R. Nigmatulin y F. Bonetto. *A momentum correction method for shock computation*.
- [7] G. Whitham. *Linear and nonlinear waves*. John Wiley & Sons, (1974).
- [8] B. Yavorski y A. Dettlaf. *Manual de física*. Editorial Mir (1977).
- [9] F. White. *Mecánica de fluidos*. Mc Graw Hill, (1995).
- [10] R. Aris. *Vector, tensors and the basic equations of fluid mechanics*. Englewood Cliffs, (1992).
- [11] K. Morton. *Numerical solution of convection – diffusion problems*. Chapman & Hall, (1996).
- [12] G. Carey, J. Oden. *Finite elements: An introduction*. Prentice Hall, (1986).
- [13] B. Yavorski, A. Pinski. *Fundamentos de física*. Editorial Mir, (1983).