

MECÁNICA DE VIGAS CURVAS DE PAREDES DELGADAS CONSTRUIDAS CON MATERIALES COMPUESTOS

V. H. Cortínez, M. T. Piován

Grupo Análisis de Sistemas Mecánicos, Universidad Tecnológica Nacional, F.R.B.B
11 de Abril 461, 8000 Bahía Blanca, Argentina. Te. (54291)-4555220 Fax (54291)-4555311.
Email. vcortine@frbb.utn.edu.ar

R.E. Rossi

Departamento de Ingeniería, Universidad Nacional del Sur,
Avda. Alem 1253, 8000 Bahía Blanca, Argentina

RESUMEN

En este trabajo se presenta un modelo teórico para el análisis estructural de vigas curvas de pared delgada construidas con materiales laminados. El modelo incorpora de manera completa la flexibilidad de corte. Asimismo es válido tanto para secciones abiertas como cerradas. Se obtiene una solución numérica de las ecuaciones desarrolladas mediante el método de elementos finitos. Se presentan algunos ejemplos que ponen de manifiesto la importancia de los efectos considerados.

INTRODUCCIÓN

Las vigas de pared delgada son frecuentemente utilizadas en estructuras civiles, mecánicas y aeroespaciales por sus excelentes propiedades de rigidez y resistencia en relación con su peso. Estas cualidades resultan incrementadas con el uso de materiales compuestos laminados. Consecuentemente, en los últimos años se ha visto intensificada la investigación tendiente al desarrollo de modelos teóricos y computacionales confiables para predecir el comportamiento estructural de los mencionados elementos.

Bauld y Tzeng [1] desarrollaron un modelo matemático de vigas rectas de paredes delgadas extendiendo la Teoría de Vlasov para materiales laminados compuestos. Tales teorías no consideran la deformabilidad por corte. Por otro lado Song y Librescu [2] estudiaron algunos aspectos de la influencia de la deformabilidad por corte en la dinámica de vigas rectas de paredes delgadas con sección cerrada construidas con materiales compuestos laminados. Sin embargo su modelo matemático, no tiene en cuenta el efecto de flexibilidad de corte por alabeo torsional no uniforme, que en algunos casos reviste importancia decisiva. Cortínez y Rossi [3] presentaron una nueva teoría que incluye los mencionados efectos aunque para vigas rectas isótropas.

Aparentemente para el caso de vigas curvas de paredes delgadas construidas con materiales isótropos, los artículos de Gendy y Saleeb [4] y Cortínez et al [5,6] son los únicos que consideran la deformabilidad por corte en forma completa.

Por otro lado, Palani y Rajasekaran [7] han desarrollado un análisis de estabilidad para vigas curvas de pared delgada construidas con materiales laminados, pero despreciando efectos de corte. De todas maneras muy pocos trabajos [8] han considerado la mecánica de vigas curvas de pared delgada construidas con materiales compuestos teniendo en cuenta la flexibilidad por corte de alabeo además del corte flexional.

En este trabajo se presenta una solución por elementos finitos basada en un modelo desarrollado previamente por los autores [8], que considera la deformabilidad por corte en forma completa en vigas curvas de paredes delgadas construidas con materiales compuestos. Tal modelo es válido para secciones cerradas y abiertas y estrictamente válido para laminados balanceados simétricos o bien especialmente ortótropos. Asimismo, se efectúa un análisis paramétrico para evaluar la influencia del efecto de la flexibilidad de corte sobre el comportamiento mecánico de tales estructuras. En este artículo se presenta solamente la mecánica fuera del plano de los elementos estructurales considerados.

DESARROLLO TEÓRICO

Hipótesis y expresiones cinemáticas

Se considera una viga compuesta de pared delgada de eje curvo. Los puntos del elemento estructural están definidos mediante un sistema de coordenadas curvilineas (x,y,z) (Figura 1), donde x es tangente al eje de la viga, mientras que y y z son los ejes principales de inercia de la sección. Las coordenadas centroidales con respecto al centro de corte se expresan como y_0 y z_0 . Las coordenadas correspondientes a la línea media de la sección se denotan mediante letras mayúsculas.

Las siguientes suposiciones básicas han sido realizadas con el propósito de desarrollar las ecuaciones gobernantes de la estructura considerada: (1) la sección transversal es rígida en su plano, (2) la distribución de alabeo torsional sobre la sección se expresa mediante la función de Saint Venant para vigas isotropas rectas, (3) se desprecian todas las componentes tensionales excepto σ_x y τ_{xz} , (4) se desprecia la variación de la deformación longitudinal ϵ_x a través del espesor de la pared, (5) no se considera la variación de curvatura sobre la sección, (6) la secuencia de laminación es simétrica y balanceada o especialmente ortótropa.

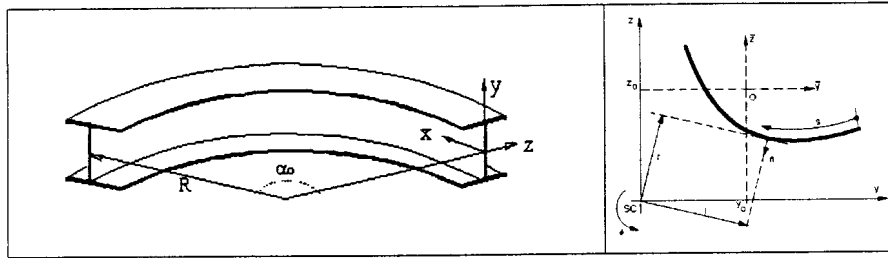


Figura 1. Sistema de coordenadas y disposición del elemento estructural

De acuerdo a las anteriores consideraciones es posible expresar el campo de desplazamientos en la forma [5]:

$$u_x = -\theta_z(x,t)(y - y_0) + \omega(s) \left(\theta(x,t) + \frac{\theta_z(x,t)}{R} \right) + \xi(y,z) \left(\frac{\partial \phi(x,t)}{\partial x} + \frac{\theta_z(x,t)}{R} \right) \quad (1 a)$$

$$u_y = v_s(x,t) - \phi(x,t) z, \quad u_z = y \phi(x,t) \quad (1 b, c)$$

donde v_s es el desplazamiento transversal correspondiente al centro de corte, ϕ es la rotación torsional, θ_z es la rotación flexional con respecto a z , θ es una función para la medida de la intensidad del alabeo torsional, R es el radio correspondiente al centroide, $\omega(s)$ es la función de alabeo en la línea media de la sección [5], $\xi(y,z)$ es la función de alabeo relativa a la línea media [5]. Las expresiones (1) difieren de las de la teoría de Vlasov ya aquí no se consideran las restricciones $\theta_z = \partial v_s / \partial x$ y $\theta = \partial \phi / \partial x$. Esto implica que las deformaciones angulares en la línea media no son nulas.

Expresión Unidimensional del Principio de Trabajos Virtuales

Reemplazando las expresiones (1) en la ecuación general de trabajos virtuales [5], e integrando sobre la sección, tomando en cuenta las hipótesis preestablecidas, se llega a

$$L_K + L_P = 0 \quad (2)$$

donde

$$L_K = \int_0^L -M_z \delta \left(\frac{\partial \theta_z}{\partial x} - \frac{\phi}{R} \right) + B \delta \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial \theta_z}{\partial x} \right) + Q_y \delta \left(\frac{\partial v_s}{\partial x} - \theta_z \right) + T_w \delta \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} - \theta \right) + T_{sv} \delta \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\theta_z}{R} \right) dx \quad (3 a)$$

$$L_P = - \int_0^L \left[q_y \delta v_s - \left(m_z - \frac{b}{R} \right) \delta \theta_z + b \delta \theta + m_x \delta \phi \right] dx + \left[\bar{Q}_y \delta v_s - \left(\bar{M}_z - \frac{\bar{B}}{R} \right) \delta \theta_z + \bar{B} \delta \theta + \bar{M}_x \delta \phi \right]_{x=0}^{x=L} \quad (3 b)$$

En estas expresiones se han realizado las siguientes definiciones de las resultantes de tensi3n sobre la secci3n

$$(N, M_z, B) = \int_A \sigma_x(l, \bar{Y}, \omega) dA \quad ; \quad (Q_y, T_w, T_{sv}) = \int_A \tau_{xs} \left(\frac{dY}{ds}, -\frac{d\omega}{ds}, \bar{\gamma} \right) dA \quad (4 a-f)$$

con

$$\bar{\gamma} = \begin{cases} 2\psi, & \text{para secciones abiertas} \\ \psi, & \text{para secciones cerradas} \end{cases} \quad (5)$$

ψ representa la deformaci3n angular en la l3nea media de acuerdo a la teor3a de Saint Venant. Tamb3en se ha definido q_y , m_z , b , m_x : cargas externas por unidad de longitud (fuerza, momento, bimomento y momento torsor), mientras que las resultantes de tensi3n externas aplicadas en los extremos se indican como Q_y , M_z , B , y $M_x = T_w + T_{sv}$.

Ecuaciones Constitutivas para las Resultantes de Tensi3n

El espesor de la viga est3 constituido por un n3mero finito de l3minas perfectamente adheridas entre s3. El material de cada l3mina constituyente es el3stico y ort3tropo de manera tal que las ecuaciones constitutivas para las tensiones no nulas pueden expresarse en la forma

$$\sigma_{xx} = \bar{Q}'_{11} \varepsilon_{xx} + \bar{Q}'_{16} \gamma_{xs} \quad ; \quad \tau_{xs} = \bar{Q}'_{16} \varepsilon_{xx} + \bar{Q}'_{66} \gamma_{xs} \quad (6 a,b)$$

Las expresiones para los coeficientes el3sticos Q'_{ij} pueden ser consultados en la referencia [8]. Reemplazando (6) en (4) y considerando la hip3tesis No 6, se obtienen las siguientes relaciones constitutivas para las resultantes de tensi3n

$$M_z = -E^* I_z \left(\frac{\partial \theta_z}{\partial x} - \frac{\phi}{R} \right) \quad ; \quad B = E^* C_w \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial \theta_z}{\partial x} \right)$$

$$Q_y = G^* \left[S_{yy} \left(\frac{\partial v_s}{\partial x} - \theta_z \right) + S_{yx} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} - \theta \right) \right] \quad ; \quad T_w = G^* \left[S_{yx} \left(\frac{\partial v_s}{\partial x} - \theta_z \right) + S_{xx} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} - \theta \right) \right]$$

$$T_{sv} = G^{**} J \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\theta_z}{R} \right) \quad (7 a-e)$$

donde

$$E^* = \frac{1}{t} \int_{-t/2}^{t/2} \bar{Q}'_{11} dn \quad ; \quad G^* = \frac{1}{t} \int_{-t/2}^{t/2} \bar{Q}'_{66} dn \quad (8 \text{ a,b})$$

$$G^{**} = \begin{cases} G^* & \text{para secciones cerradas} \\ \frac{12}{t^3} \int_{-t/2}^{t/2} n^2 \bar{Q}'_{66} dn & \text{para secciones abiertas} \end{cases} \quad (8 \text{ c})$$

En las expresiones anteriores E^* , G^* y G^{**} son módulos equivalentes de elasticidad, I_z es el momento de inercia de la sección con respecto a z , C_w es la constante de alabeo, J es la constante de torsión, y los S_{ij} son coeficientes de rigidez por corte que pueden ser expresados en la forma [8]:

$$S_{ig} = \int_A \frac{df}{ds} \frac{dg}{ds} dA, \quad \{f, g\} = \{Y, \omega\} \quad (9)$$

En la Ref. [8] se ha obtenido también una expresión mejorada para S_{ig} que resulta equivalente a la utilización de los factores de corrección por corte de la teoría de Timoshenko. Las expresiones (2), (3) y (7) constituyen las ecuaciones variacionales gobernantes del problema.

RESULTADOS NUMÉRICOS

Las ecuaciones (2,3,7) se han resuelto mediante el método de los elementos finitos empleando un elemento uniforme de dos nodos con cuatro grados de libertad en cada nodo, correspondientes a los desplazamientos generalizados del problema. Se pueden consultar los detalles del elemento en la Ref.[5]. Se ha probado la precisión del método mediante una serie de estudios comparativos con resultados disponibles en la literatura que son casos particulares del presente modelo. Por razones de espacio aquí se muestran solo dos de estas comparaciones. En primer lugar se estudia una viga curva de acero con sección I, ($I_z = 6018.6 \text{ pulg}^4$, $C_w = 77432 \text{ pulg}^6$, $J = 16.08 \text{ pulg}^4$) cuyo radio es de 240 pulgadas y con una abertura de 80° , estando sus extremos empotrados. El elemento estructural se encuentra solicitado por una carga puntual de 1Lb actuando en una sección ubicada a 30° de uno de sus extremos desplazada 4 pulgadas del centroide de la sección hacia el centro de curvatura. Este caso fue analizado por El-Amin y Brotton [9] mediante un elemento finito basado en la teoría de Vlasov. En la Figura 2 se muestran los valores del desplazamiento transversal v_z , determinados mediante el presente enfoque (discretizando con ocho elementos) así como los valores de El-Amin. Como puede observarse la concordancia es excelente. Para reproducir valores de la teoría de Vlasov con el presente elemento se han utilizado valores muy grandes del módulo de elasticidad transversal equivalente G^* .

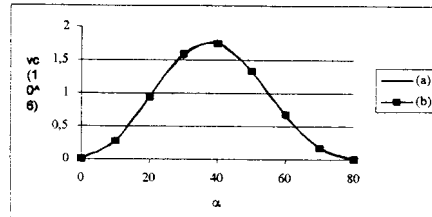


Figura 2. Ejemplo de El-Amin y Brotton. (a) Referencia [9], (b) Presente elemento.

Como segundo ejemplo, se considera un viga semicircular bi-empotrada solicitada por una carga distribuida uniforme, normal al plano de curvatura, de 1000 N/m . Las características de la estructura son las siguientes: radio de curvatura $R = 1 \text{ m}$; sección transversal sólida cuadrada de 10 cm . de lado; módulo de elasticidad $E = 0.20 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$; coeficiente de Poisson $\mu=0.15$. Este caso fue analizado previamente por Sengupta y Dasgupta [10]. Se calcularon los desplazamientos en el centro del arco (v_s), así como también los momentos flectores en los empotramientos (M_e) y en el centro del arco (M_c). En la Tabla 1 se muestra una comparación entre los presentes resultados con los obtenidos por los mencionados autores, apreciándose una concordancia muy buena.

N° Elem	v_s (1)	v_s (2)	M_c (1)	M_c (2)	M_e (1)	M_e (2)
8	0,2353	0,2413	291,96	273,27	-1000,25	-1000,26
20	0,2380	0,2413	273,95	273,24	-997,40	-1000,02
Análítico	0,2396	0,2396	273,24	273,24	-1000,00	-1000,00

Tabla 1: Ejemplo de Sengupta-Dasgupta

w_c : desplazamientos; M_c , M_e : momentos flectores. (1) Presente Elemento (2) Referencia [10]

A los efectos de estudiar la importancia del efecto de corte sobre este tipo de estructuras se ha considerado en primer lugar una viga de sección I (Fig.1) simplemente apoyada, de 12 m . de radio sometida a una carga puntual, perpendicular al plano de curvatura, de 100 N aplicada en el centroide de la sección media. Se han efectuado cálculos para cuatro materiales diferentes: a) Acero, b) Grafito-Epoxy (G-E) AS4/3501-6 con una secuencia de laminación (45/-45/-45/45), c) G-E (0/90/90/0), d) G-E (0/0/0/0).

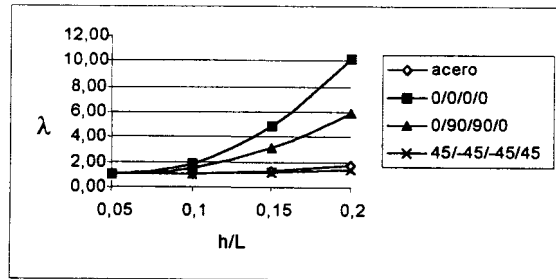


Figura 3: Estudio del efecto de corte para una viga I simplemente apoyada

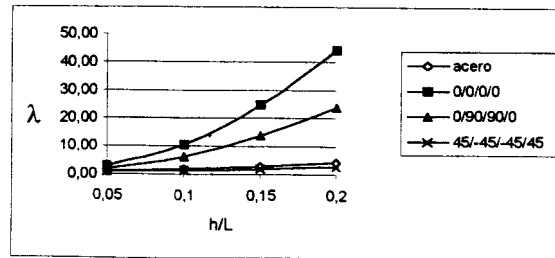


Figura 4: Estudio del efecto de corte para una viga I bi-empotrada

En la Figura 3 se muestra el cociente $\lambda = v_s(1)/v_s(2)$, donde $v_s(1)$ es el desplazamiento máximo determinado mediante la presente teoría (considerando el efecto de corte) mientras que $v_s(2)$ es el desplazamiento correspondiente obtenido mediante un modelo del tipo Vlasov (despreciando el efecto de

corte). Puede apreciarse en dicha Figura que, como era de esperar, a medida que disminuye la esbeltez de la viga, dada por la relación h/L (h : altura del alma, L : longitud de la viga), el efecto de corte se hace más pronunciado. Si bien para los casos (a) y (b) este efecto no es muy notorio, se torna de importancia crucial en los otros dos casos, especialmente para la laminación (0/0/0/0). Este hecho puede explicarse considerando el cociente entre los módulos de elasticidad equivalentes G^*/E^* de los materiales considerados que adopta los valores 0.38, 0.753, 0.054, 0.029 para los casos (a), (b), (c) y (d) respectivamente. Estos valores indican que las estructuras de material compuesto con secuencias (0/90/90/0) y (0/0/0/0) son marcadamente flexibles al corte. En la Figura 4 se muestra una comparación similar para un arco bi-empotrado. Como se observa en este último caso la influencia de la flexibilidad de corte es aún más crítica que para la viga simplemente apoyada.

CONCLUSIONES

Se ha presentado un nuevo modelo para el análisis estructural de vigas curvas de pared delgada construidas con materiales laminados, que contempla el efecto de corte debido tanto a la flexión como así también al alabeo torsional no uniforme.

Los cálculos numéricos han puesto de manifiesto que la flexibilidad de corte puede tener una influencia determinante sobre la mecánica de este tipo de estructuras, especialmente cuando la dirección de mayor rigidez del material coincide con la directriz de la viga.

Agradecimientos

El presente trabajo ha sido auspiciado por la Secretaría de Ciencia y Tecnología de la Universidad Tecnológica Nacional y por el CONICET.

REFERENCIAS

- [1] N. R. Bauld y L. S. Tzeng, *Vlasov Theory for fiber-reinforced beams with thin walled open sections*, Intl Journal of Solids and Structures 20(3), 1984, págs. 277-297.
- [2] O. Song y L. Librescu, *Free Vibrations of Anisotropic Composite Thin-Walled Beams of Closed Cross Section Contour*, Journal of Sound and Vibration 167(1), 1993, págs. 129-147.
- [3] V. H. Cortínez y R. E. Rossi, *Dynamics of shear deformable thin walled open beams subjected to initial stresses*, Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y diseño en Ingeniería, 14(3), 1998, págs. 293-316.
- [4] A. S. Gendy y A. F. Saleeb, *Vibration of coupled extensional/ flexural / torsional modes of curved beams with arbitrary thin-walled sections*. Journal of Sound and Vibration, 174(2), 1994, págs. 261-274.
- [5] V. H. Cortínez, M. T. Piovan y R. E. Rossi, *Out-of-Plane Vibrations of Thin-Walled Curved Beams considering Shear Flexibility*. Structural Engineering and Mechanics, 8(3), 1999, págs. 257-272.
- [6] M. T. Piovan, V. H. Cortínez y R. E. Rossi, *Vibrations of curved I Beams with allowance for shear deformability*, Proceedings IV World Congress on Computational Mechanics, Buenos Aires, 1998.
- [7] G. S. Palani y S. Rajasekaran, *Finite element analysis of thin walled curved beams made of composites*. Journal of Structural Engineering, 118(8), 1992, págs. 2039-2062.
- [8] V.H.Cortínez y M.T.Piovan, *Out-of-plane vibrations of curved thin-walled beams made of composites*, Publicación GASM 2000 (enviado a publicación).
- [9] F. M. El-Amin y D.M. Brotton, *Horizontally Curved Beam Finite Element Including Warping*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.10, 1976, págs. 1397-1403.
- [10] D. Sengupta y S. Dasgupta, *Static and Dynamic Applications of a Five Noded Horizontally Curved Beam Element with Shear Deformation*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.40, 1997, págs. 1801-1819.