

UNA ECUACIÓN ENTRE LOS TÉRMINOS DE LOS GRADOS DE LIBERTAD ORTOGONALES DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ DE UN ELEMENTO FINITO PLANO DE 8 NODOS.

Juan C. Osorio¹, Iris J. Lozada¹, D. Vaughan Griffiths², Miguel Cerrolaza³

1: Decanato de Ingeniería Civil, Universidad Centroccidental Lisandro Alvarado, Venezuela
e-mail: Juan_CarlosOsorio@hotmail.com, Irislozada121@hotmail.com

2: Departamento of Engineering, Colorado School of Mines. Goleen, Colorado 80401 USA
e-mail: g.v.griffiths@mines.edu

3: IMME, Facultad de Ingeniería, Universidad Central de Venezuela, Venezuela 50.361
e-mail: mcerrola@reacciun.ve

Palabras clave: Matriz de Rigidez, grados de libertad ortogonales.

Resumen. *En este trabajo se presenta una ecuación lineal, donde dado un término de la matriz de Rigidez que corresponde a los grados de libertad ortogonales entre diversos nodos que usted puede calcular directamente el otro término de la matriz de Rigidez que corresponde a los otros dos grados de libertad ortogonales de estos nodos. Esta ecuación relaciona un total de 28 pares de términos y mantiene la precisión del método que se utiliza en el cálculo de los primeros términos.*

1. INTRODUCCIÓN

El método de los elementos finitos es una de las opciones principales que tienen los ingenieros para encontrar soluciones numéricas a una amplia gama de los problemas de la ingeniería. Su uso requiere el cálculo de la matriz de rigidez que implica la integración de una función racional, por lo cual los tiempos de CPU son muy grandes, ya que la integral a resolver es una función racional donde el denominador es el jacobiano de la transformación a utilizar.

2. FORMULACION

Sea la siguiente configuración de nodos, numerados en sentido anti-horario y con dos grados de libertad por nodo, figura 1.

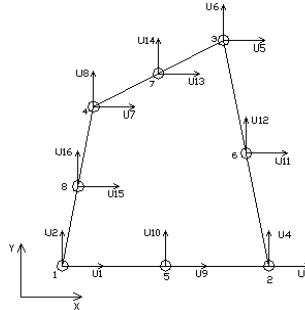


Figura 1: Numeración de nodos y grados de libertad.

Recuérdese que la relación esfuerzo-deformación es dada por:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (1)$$

Donde;

$$\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z]^t \quad (2)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z]^t \quad (3)$$

Para un material isotropico, la matriz deformación-desplazamiento es:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} E_1 & E_2 & \mathbf{0} \\ E_2 & E_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & G \end{bmatrix} \quad (4)$$

Para el esfuerzo plano,

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{E}{1 - \nu^2} \\ E_2 &= \nu E_1 \end{aligned} \quad (5)$$

y en deformación plana,

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{E(1 - \nu)}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \\ E_2 &= \frac{\nu E_1}{(1 - \nu)} \end{aligned} \quad (6)$$

En estas E y ν denotan el modulo de Young y el coeficiente de Poisson respectivamente y el modulo de corte G está dado por $E/2(1 + \nu)$.

Mediante una transformación de coordenadas T , el elemento real en el plano XY , es enviado en un cuadrilátero con lados paralelos a los ejes coordenados de vértices $(-1,-1)$, $(-1,1)$, $(1,-1)$, $(1,1)$, el cual se muestra en la figura 2 y donde muchos resultados resultan más prácticos de trabajar.

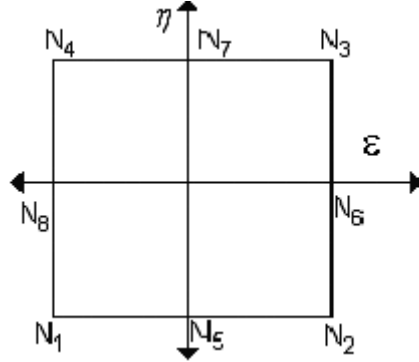


Figura 2. Elemento Finito en el plano Gaussiano

Para interpolar el campo de desplazamiento, la geometría y la deformación en cada nodo se utilizan las funciones de forma:

$$\begin{aligned}
 N_1 &= \frac{-1}{4} (1-\eta)(1-\varepsilon)(1+\varepsilon+\eta) & N_2 &= \frac{-1}{4} (1-\eta)(1+\varepsilon)(1-\varepsilon+\eta) \\
 N_3 &= \frac{-1}{4} (1+\eta)(1+\varepsilon)(1-\varepsilon-\eta) & N_4 &= \frac{-1}{4} (1+\eta)(1-\varepsilon)(1+\varepsilon-\eta) \\
 N_5 &= \frac{1}{2} (1-\eta)(1-\varepsilon^2) & N_6 &= \frac{1}{2} (1-\eta^2)(1+\varepsilon) \\
 N_7 &= \frac{1}{2} (1+\eta)(1-\varepsilon^2) & N_8 &= \frac{1}{2} (1-\eta^2)(1-\varepsilon)
 \end{aligned} \quad (7)$$

La transformación de coordenadas que relaciona el plano XY con el plano $\varepsilon\eta$ está dada por

$$\begin{aligned}
 x &= \sum_{i=1}^8 N_i(\varepsilon, \eta) x_i \\
 y &= \sum_{i=1}^8 N_i(\varepsilon, \eta) y_i
 \end{aligned} \quad (8)$$

Los elementos de la matriz de rigidez de un elemento cualquiera, se obtiene al calcular la integral:

$$K_{ij} = \int_A B_i^t D B_j dx dy \quad (9)$$

Con

$$B_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (10)$$

Mediante el cambio de variable la integral anterior es equivalente a

$$K_{ij} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 B_i^t(\varepsilon, \eta) D B(\varepsilon, \eta) |J| d\varepsilon d\eta \quad (11)$$

Donde, el escalar $|J|$ es el determinante de la matriz Jacobiano con,

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \varepsilon} & \frac{\partial y}{\partial \varepsilon} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (12)$$

Utilizando la notación:

$$T_i = \frac{\partial N_i}{\partial x} \quad (13)$$

$$S_i = \frac{\partial N_i}{\partial y}$$

al desarrollar el integrando, se obtiene

$$B_i^t D B_j |J| = \begin{bmatrix} E_1 T_i T_j + G S_i S_j & E_2 T_i S_j + G S_i T_j \\ E_2 S_i T_j + G T_i S_j & E_1 S_i S_j + G T_i T_j \end{bmatrix} |J| \quad (14)$$

Por lo tanto, las entradas de cada bloque de la matriz de rigidez de un elemento cuadrilatero isoparametrico de ocho nodos en el plano Gaussiano estan dada por

$$\begin{bmatrix} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 |J| (E_1 T_i T_j + G S_i S_j) d\varepsilon d\eta & \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 |J| (E_2 T_i S_j + G S_i T_j) d\varepsilon d\eta \\ \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 |J| (E_2 S_i T_j + G T_i S_j) d\varepsilon d\eta & \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 |J| (E_1 S_i S_j + G T_i T_j) d\varepsilon d\eta \end{bmatrix} \quad (15)$$

Por otro lado, los términos de la matriz de Rigidez se clasifican en diez grupos según el análisis de incidencia de los grados de libertad de cada nodo con todos los grado de libertad (GDL) del elemento como se muestra en la siguiente tabla.

GRUPO	TERMINOS	DESCRIPCION
A	$K_{11}, K_{22}, K_{33}, K_{44}, K_{55}, K_{66}, K_{77}, K_{88}, K_{99}, K_{1010}, K_{1111}, K_{1212}, K_{1313}, K_{1414}, K_{1515}, K_{1616}$	GDL paralelos en el mismo nodo.
B	$K_{12}, K_{34}, K_{56}, K_{78}, K_{910}, K_{1112}, K_{1314}, K_{1516}$	GDL ortogonales en el mismo nodo
C	$K_{13}, K_{35}, K_{57}, K_{17}, K_{911}, K_{1113}, K_{1315}, K_{915}, K_{24}, K_{46}, K_{68}, K_{28}, K_{1012}, K_{1214}, K_{1416}, K_{1016}$	GDL paralelos de nodos separados por un nodo.
D	$K_{23}, K_{36}, K_{67}, K_{27}, K_{1011}, K_{1114}, K_{1415}, K_{1015}, K_{45}, K_{58}, K_{18}, K_{14}, K_{1213}, K_{1316}, K_{916}, K_{912}$	GDL ortogonales de nodos separados por un nodo.
E	$K_{15}, K_{913}, K_{37}, K_{1115}, K_{26}, K_{48}, K_{1014}, K_{1216}$	GDL paralelos en nodos opuestos.
F	$K_{16}, K_{914}, K_{38}, K_{1116}, K_{25}, K_{1013}, K_{47}, K_{1215}$	GDL perpendiculares en nodos opuestos
G	$K_{19}, K_{39}, K_{311}, K_{511}, K_{513}, K_{713}, K_{715}, K_{115}, K_{210}, K_{410}, K_{412}, K_{612}, K_{614}, K_{814}, K_{816}, K_{216}$	GDL paralelos de nodos adyacentes
H	$K_{110}, K_{310}, K_{312}, K_{512}, K_{514}, K_{714}, K_{716}, K_{116}, K_{29}, K_{49}, K_{411}, K_{611}, K_{613}, K_{813}, K_{815}, K_{215}$	GDL perpendiculares de nodos adyacentes
I	$K_{111}, K_{711}, K_{79}, K_{59}, K_{515}, K_{315}, K_{313}, K_{113}, K_{212}, K_{812}, K_{810}, K_{610}, K_{616}, K_{416}, K_{414}, K_{214}$	GDL paralelos de nodos separados por dos nodos.
J	$K_{211}, K_{811}, K_{89}, K_{69}, K_{615}, K_{415}, K_{413}, K_{213}, K_{112}, K_{712}, K_{710}, K_{510}, K_{516}, K_{316}, K_{314}, K_{114}$	GDL paralelos de nodos separados por dos nodos.

Tabla 1. Clasificación de los Términos de la matriz de rigidez

3. ALCANCES

Dados

$$\alpha_1 = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 |J| (E_2 T_i S_j + G S_i T_j) d\epsilon d\eta \quad (16)$$

$$\alpha_2 = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 |J| (E_2 S_i T_j + G T_i S_j) d\epsilon d\eta$$

Lema 1 Se cumple para todo $1 \leq i, j \leq 8$ que

$$\frac{\partial N_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial y} - \frac{\partial N_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial x} = \frac{1}{|J|} \left(\frac{\partial N_i}{\partial \epsilon} \frac{\partial N_j}{\partial \eta} - \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \frac{\partial N_j}{\partial \epsilon} \right) \quad (17)$$

Prueba Se tiene que

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \varepsilon} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \varepsilon} & \frac{\partial y}{\partial \varepsilon} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (18)$$

entonces

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{pmatrix} = \frac{1}{|J|} \begin{pmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial y}{\partial \varepsilon} \\ -\frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \varepsilon} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \varepsilon} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{pmatrix} = \frac{1}{|J|} \begin{pmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial \varepsilon} - \frac{\partial y}{\partial \varepsilon} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \\ -\frac{\partial x}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial x}{\partial \varepsilon} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{pmatrix} \quad (19)$$

por otro lado,

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial y} - \frac{\partial N_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial x} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial N_j}{\partial y} \\ -\frac{\partial N_j}{\partial x} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{|J|^2} \begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \varepsilon} & \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial x}{\partial \eta} \\ -\frac{\partial y}{\partial \varepsilon} & \frac{\partial x}{\partial \varepsilon} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \varepsilon} \\ \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \varepsilon} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial N_j}{\partial \varepsilon} \\ \frac{\partial N_j}{\partial \eta} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{|J|^2} \begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \varepsilon} & \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \varepsilon} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \varepsilon} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \varepsilon} \\ -\frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \varepsilon} & -\frac{\partial x}{\partial \varepsilon} \frac{\partial y}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial x}{\partial \varepsilon} \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial N_j}{\partial \varepsilon} \\ \frac{\partial N_j}{\partial \eta} \end{pmatrix} \\ &= \frac{|J|}{|J|^2} \begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \varepsilon} & \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial N_j}{\partial \varepsilon} \\ \frac{\partial N_j}{\partial \eta} \end{pmatrix} \quad (20) \\ &= \frac{1}{|J|} \left(\frac{\partial N_i}{\partial \varepsilon} \frac{\partial N_j}{\partial \eta} - \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \frac{\partial N_j}{\partial \varepsilon} \right) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

El siguiente teorema nos da la relación entre los términos de la diagonal secundaria de cada uno de los bloques de la matriz de rigidez identificado en (15).

Teorema 1 (Osorio-Lozada) Los términos de la matriz de rigidez de un elemento finito de elasticidad plana de 8 nodos, correspondiente a los grados de libertad ortogonales satisfacen la siguiente ecuación lineal

$$\alpha_1 - \alpha_2 = \frac{E}{2(1-\nu^2)} (3\nu - 1) \left(\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\partial N_i}{\partial \varepsilon} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial \eta} d\varepsilon d\eta - \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial \varepsilon} d\varepsilon d\eta \right) \quad (21)$$

Prueba

Denotemos por $A^* = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial y} |J| dA$ y $B^* = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial x} |J| dA$, del hecho que $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$

y $E_2 = \frac{\nu E}{1-\nu^2}$, tenemos de (15) que

$$\begin{aligned} \alpha_1 - \alpha_2 &= \frac{E}{2(1-\nu^2)} [2\nu A^* + (1-\nu)B^* - 2\nu B^* + (1-\nu)A^*] \\ &= \frac{E}{2(1-\nu^2)} [(2\nu - 1 + \nu) A^* + (-2\nu + 1 - \nu)B^*] \\ &= \frac{E}{2(1-\nu^2)} (3\nu - 1) (A^* - B^*) \end{aligned} \quad (22)$$

Por el lema 1, se tiene que

$$\frac{\partial N_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial y} - \frac{\partial N_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial x} = \frac{1}{|J|} \left(\frac{\partial N_i}{\partial \varepsilon} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial \eta} - \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial \varepsilon} \right)$$

Sustituyendo en (19), obtenemos

$$\begin{aligned} \alpha_1 - \alpha_2 &= \left(\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial y} - \frac{\partial N_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial x} \right) |J| dA \right) (3\nu - 1) \\ &= \frac{E}{2(1-\nu^2)} (3\nu - 1) \left(\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{1}{|J|} \left(\frac{\partial N_i}{\partial \varepsilon} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial \eta} - \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial \varepsilon} \right) |J| dA \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{E}{2(1-\nu^2)} (3\nu-1) \left(\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\partial N_i}{\partial \varepsilon} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial \eta} dA - \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial \varepsilon} dA \right) \quad (23)$$

En conclusión, la ecuación (21) es satisfecha.

Observación: Para la deformación plana, solo cambia la constante

$$\alpha_1 - \alpha_2 = \frac{E}{2(1+\nu)(1-2\nu)} (4\nu-1) \left(\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\partial N_i}{\partial \varepsilon} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial \eta} d\varepsilon d\eta - \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial \varepsilon} d\varepsilon d\eta \right) \quad (24)$$

En la tabla 2, se muestran los valores de $A = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\partial N_i}{\partial \varepsilon} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial \eta} dA$ y $B = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial \varepsilon} dA$, obtenidos de los nodos i y j con $1 \leq i \leq 8$ y $i+1 \leq j \leq 8$.

j \ i	1	2	3	4	5	6	7	8
1		A=-0.08333 B=0.08333	A=1.9444 B=1.9444	A=0.08333 B=-0.08333	A=0.1111 B=-0.5555	A=-0.1111 B=-0.1111	A=-0.1111 B=-0.1111	A=-0.5555 B=0.1111
2			A=-0.08333 B=0.08333	A=-1.9444 B=-1.9444	A=-0.1111 B=0.5555	A=0.5555 B=-0.1111	A=0.1111 B=0.1111	A=0.1111 B=0.1111
3				A=-0.08333 B=0.08333	A=-0.1111 B=-0.1111	A=-0.5555 B=0.1111	A=0.1111 B=-0.5555	A=-0.1111 B=-0.1111
4					A=0.1111 B=0.1111	A=0.1111 B=0.1111	A=-0.1111 B=0.5555	A=0.5555 B=-0.1111
5						A=-0.4444 B=-0.4444	A=0 B=0	A=0.4444 B=0.4444
6							A=0.4444 B=0.4444	A=0 B=0
7								A=-0.4444 B=-0.4444
8								

Tabla 2. Valores de A y B para los diversos pares de nodos

A continuación, los términos de la Matriz de Rigidez para los cuales se obtiene la igualdad y los grupos a los cuales pertenecen.

Del Grupo F, están los términos $k_{1,6}=k_{2,5}$ y $k_{3,8}=k_{4,7}$ (figura 3.a). Además de los términos

$k_{9,14}=k_{10,13}$ y $k_{11,16}=k_{12,15}$ (figura 3.b).

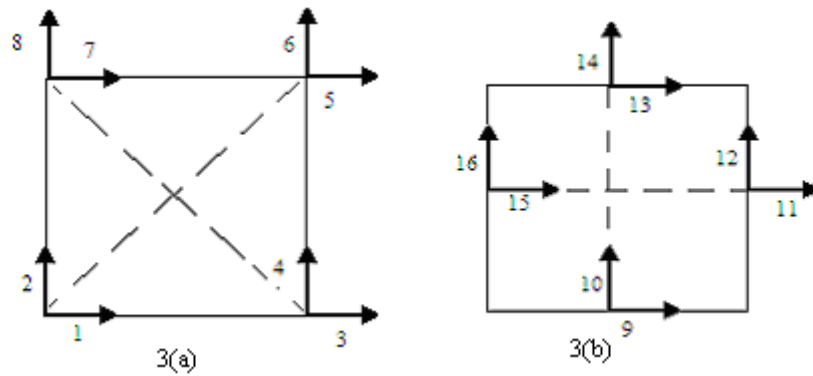


Figura 3

Del Grupo J, los términos $k_{1,12}=k_{2,11}$, $k_{3,14}=k_{4,13}$, $k_{5,16}=k_{6,15}$ y $k_{7,10}=k_{8,9}$ (figura 4.a) aparte de los términos $k_{1,14}=k_{2,13}$, $k_{3,16}=k_{4,15}$, $k_{5,10}=k_{6,9}$ y $k_{7,12}=k_{8,11}$ (figura 4.b).

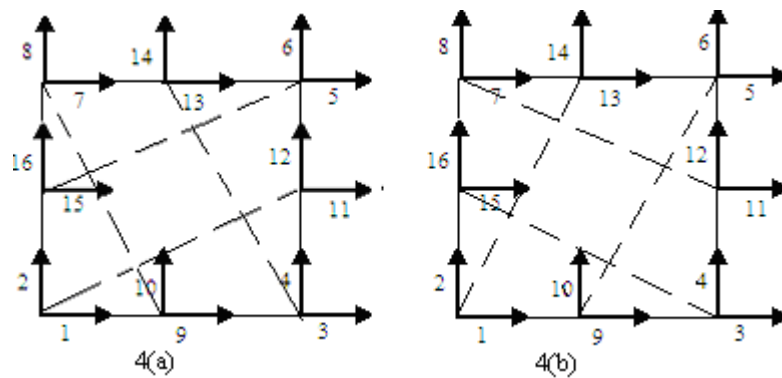


Figura 4

Por último del Grupo D, se tienen las siguientes igualdades entre los términos $k_{9,12}=k_{10,11}$, $k_{11,14}=k_{12,13}$, $k_{13,16}=k_{14,15}$ y $k_{9,16}=k_{10,15}$. Ver figura 5

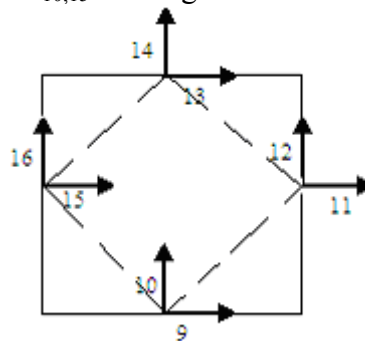


Figura 5

Ahora, para los pares de nodos en los cuales no se obtuvo la igualdad de los escalares A y B,

se tiene que los términos de la diagonal secundaria satisfacen una de las siguientes ecuaciones:

$$\alpha_1 = -0.166666 \frac{E}{2(1-\nu^2)} (3\nu-1) + \alpha_2 \quad (25)$$

$$\alpha_1 = 0.666666 \frac{E}{2(1-\nu^2)} (3\nu-1) + \alpha_2 \quad (26)$$

$$\alpha_1 = -0.666666 \frac{E}{2(1-\nu^2)} (3\nu-1) + \alpha_2 \quad (27)$$

Del grupo D(Nodos Esquinas)

Para Calcular	de	Ecuación
$k_{1,4}$	$k_{2,3}$	(24)
$k_{3,6}$	$k_{4,5}$	(24)
$k_{5,8}$	$k_{6,7}$	(24)
$k_{2,7}$	$k_{1,8}$	(24)

Tabla 3

Del grupo H

Para Calcular	de	Ecuación
$k_{1,10}$	$k_{2,9}$	(26)
$k_{3,12}$	$k_{4,11}$	(26)
$k_{5,14}$	$k_{6,13}$	(26)
$K_{7,16}$	$K_{8,15}$	(26)
$k_{1,16}$	$k_{2,15}$	(27)
$k_{3,10}$	$k_{4,9}$	(27)
$k_{5,12}$	$k_{6,11}$	(27)
$k_{7,14}$	$k_{8,13}$	(27)

Tabla 4

Ejemplo Considere un elemento cuadrilátero como se muestra en la figura 6. Tomando las condiciones de esfuerzo plano, con $E=0.5$ y $\nu=0$.

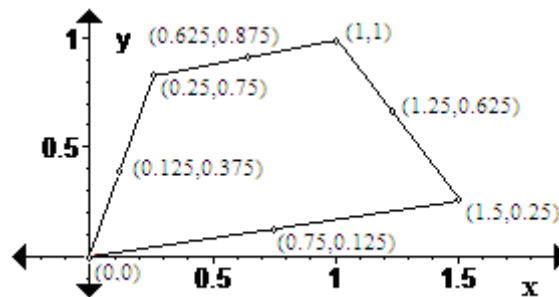


Figura 6

Si se calculan (en este caso mediante cuadratura de Gauss de orden 3x3) los términos $k_{2,9}=-0.072669$ y $k_{8,15}=0.20248$, se pueden obtener a

$$K_{1,10}=0.66666 \cdot 0.25+(-0.072669)=0.093997$$

$$K_{7,16}=-0.66666 \cdot 0.25+ 0.20248 =0.035815$$

4. CONCLUSIONES

A partir de la clasificación de los términos de la matriz de rigidez tomando en cuenta para esto, la incidencia de cada uno de los grados de libertad sobre los demás grados de libertad y desarrollando la diferencia de los términos de la matriz correspondiente a grados de libertad ortogonales, se encontró un conjunto de tres ecuaciones lineales que relaciones a estos términos de manera directa.

La Exactitud de estos resultados depende del método con el cual los términos de entradas son calculados. Por otro lado, en este trabajo, se obtiene de manera directa 28 términos de un total de 136 términos, esto indica que se reduce un 20,58% de los cálculos de términos y por ende una buena reducción en el tiempo de CPU. Estos resultados pueden ser extendidos a otros tipos de elementos finitos planos y tridimensionales.

REFERENCIAS

- [1] D.V.Griffiths, Stiffness matrix of the four-node quadrilateral element in closed form, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 37, 1027-1038, 1994
- [2] J.C. Osorio, I. Lozada, M. Cerrolaza, D.V. Griffiths, Semi-Analytical Integration of the 8-Node Plane Element Stiffness Matrix Using Symbolic Computation. To Publish 2004.