

## INTERACCIÓN FLÚIDO-ESTRUCTURA POR EL MÉTODO DE RAYLEIGH RITZ EN COORDENADAS FÍSICAS

Cristina N. Strizzolo, Mario Scheble, José Converti

Centro Atómico Bariloche, 8400 Bariloche, Argentina

### RESUMEN

El comportamiento dinámico de estructuras que se encuentran en contacto con fluidos suele ser muy diferente a dicho comportamiento en ausencia del fluido.

En el presente trabajo se presenta la implementación del método de Rayleigh Ritz en coordenadas físicas para el análisis modal de estructuras con líquidos internos incompresibles con flujos irrotacionales. Se consideran sólo algunos casos simples.

Los resultados analizados indican que el método es adecuado para este tipo de problemas y se encuentran en desarrollo aplicaciones a casos más complejos.

### ABSTRACT

The dynamic behavior of structures in contact with fluids use to differ from such behavior in absence of the fluid.

In this work, an implementation of Rayleigh Ritz in physical coordinates for modal analysis of fluid structure interaction of internal, incompressible, irrotational fluid is presented. Only a few simple cases are considered.

The results show that the method is adequate for this kind of problems and applications to more complex cases are under development.

### 1. Introducción

La presencia de un fluido en contacto con una estructura suele modificar substancialmente el comportamiento dinámico de la misma.

La predicción y análisis de dicho comportamiento reviste una gran importancia en numerosas aplicaciones tecnológicas, tales como: aeronaves, embarcaciones, tanques de almacenamiento de líquidos, estructuras "off-shore" de exploración y explotación petrolera, etc.

Los problemas de interacción fluido estructura se pueden clasificar en internos y externos. En los primeros el fluido está contenido en la estructura mientras que en los segundos la estructura se encuentra inmersa en el fluido.

También se debe distinguir entre aquellos en que el fluido se encuentra inicialmente en reposo y su movimiento resulta del movimiento de la estructura y aquellos en que el fluido se encuentra inicialmente en movimiento forzado por fuentes externas a la estructura.

No menos importante es distinguir entre los casos en que debemos considerar la compresibilidad del fluido (aeroelasticidad) como en aquellos en que se puede considerar el fluido como incompresible.

Por último, debemos tener presente que las ecuaciones que gobiernan los fluidos suelen dar lugar a complejos fenómenos no lineales, tales como, zonas de flujo separado con recirculaciones, desprendimiento de vórtices, etc.

El análisis de tales fenómenos escapa a las técnicas de análisis presentadas.

Los métodos que se han utilizado para tratar este problema, en general, se basan en extender los utilizados para el análisis dinámico de estructuras al caso de estructuras interactuando con fluidos.

La predicción de los modos de vibración de una estructura en forma teórica se puede efectuar en forma analítica solamente en algunos casos muy simples; en general se debe recurrir a métodos aproximados. Los más utilizados son el de elementos finitos (FEM), y diversas implementaciones del método de Rayleigh-Ritz. Cada uno de estos métodos presenta sus ventajas e inconvenientes.

En el presente trabajo se analiza un caso simple de interacción fluido estructura mediante la implementación del método de Rayleigh-Ritz en coordenadas físicas [Ref. 1].

Se considera el caso de un flujo interno, bidimensional, con el fluido incompresible inicialmente en reposo. Se analizan las vibraciones de pequeña amplitud alrededor de la condición inicial de equilibrio.

La geometría es la de un recipiente rectangular con tres lados rígidos y el superior flexible con comportamiento de viga según modelo de Euler-Bernoulli. En todo este análisis se desprecian las pérdidas por fricción como es usual en el análisis modal de estructuras.

Como caracterización del comportamiento dinámico se obtienen los modos y frecuencias naturales de vibración del problema acoplado fluido-estructura.

## 2. Análisis teórico

Vamos a suponer que el fluido es incompresible y el flujo potencial, donde  $\bar{v}$  es el vector velocidad.

$$\bar{v} = u\bar{i} + v\bar{j} + w\bar{k} \quad y \quad \phi = \phi(x, y, z, t)$$

$$\text{div } \bar{v} = 0 \quad y \quad \bar{v} = \text{grad } \phi$$

en consecuencia  $\text{div}(\text{grad } \phi) = 0 \quad \text{ó} \quad \nabla^2 \phi = 0$

En general  $\phi$  debe satisfacer la Ec. de Laplace en cada instante de tiempo.

Las condiciones de contorno en velocidad surgen de:

$$v_n = \frac{d\phi}{dn} = \text{grad } \phi \cdot \frac{d\bar{r}}{|d\bar{r}|}$$

donde  $d\bar{r}$  es normal al contorno.

Nos proponemos obtener una función de distribución aproximada de todo el campo de velocidades del fluido, en función de las velocidades del contorno, utilizando las mismas funciones de forma en la estructura y en la superficie del fluido en contacto con la misma.

### Caso simple

Consideraremos inicialmente un caso simple 2-D de un recipiente rectangular con tres lados rígidos y el superior constituido por una estructura tipo viga, donde las componentes de velocidad del fluido en las direcciones  $x$  e  $y$  son  $u$  y  $v$ .

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad \text{donde } \phi = \phi(x, y, t)$$

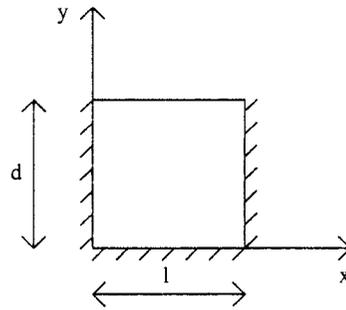


Figura 1

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad (1.1)$$

Separando variables

$$\phi = X(x)Y(y)T(t)$$

y reemplazando en la ec. (1.1)

$$-\frac{1}{x} \frac{d^2 X}{dx^2} = \frac{1}{y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = k^2$$

De las condiciones de borde en  $x = 0$  e  $y = 0$  obtenemos

$$X = A \cos kx$$

$$Y = B \cosh ky$$

De la condición de borde en  $x = l$  surge un problema de autovalores

$$kl = n\pi$$

para  $(n=1,2,3,\dots)$

La solución general se puede expresar entonces como una serie

$$\phi = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \cos \frac{n\pi x}{l} \cosh \frac{n\pi y}{l}$$

Reemplazando en  $u$  y  $v$ , e integrando en todo el campo de velocidades obtenemos la energía cinética

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l dx \int_0^d dy \rho(u^2 + v^2) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \rho n \pi \left( \sinh \frac{n\pi d}{l} \cosh \frac{n\pi d}{l} \right) a_n^2$$

donde  $\rho$  es la densidad del fluido.

Para determinar la deformación  $\xi$  de la superficie libre en la dirección  $y$ , para pequeños desplazamientos a partir de la posición de referencia horizontal

$$\xi(x, t) = \int_0^t v|_{y=d} dt = \int_0^t \left( \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \frac{n\pi}{l} \cos \frac{n\pi x}{l} \sinh \frac{n\pi d}{l} \right) dt$$

definimos:

$$\int_0^t a_n(t) dt = \lambda_n(t)$$

$$\therefore \xi(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(t) \frac{n\pi}{l} \cos \frac{n\pi x}{l} \sinh \frac{n\pi d}{l}$$

La energía potencial gravitatoria  $V$  debida a la deformación de la superficie es

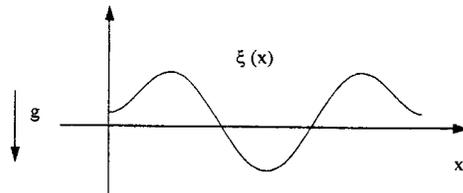


Figura 2

$$V = \int_0^l \frac{1}{2} \rho g \xi^2 dx$$

Reemplazando  $\xi$  en la expresión anterior obtenemos

$$V = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4} \rho g \frac{(n\pi)^2}{l} \sinh^2 \left( \frac{n\pi d}{l} \right) \lambda_n^2$$

Si aproximamos  $T$  y  $V$  mediante un modelo discreto, truncando la serie en  $n = M$ , podemos utilizar las Ec. de Lagrange tomando los  $\lambda_n$  como coordenadas generalizadas, obteniendo así las ec. del sistema en forma matricial

$$[M'] \{\ddot{\lambda}\} + [K'] \{\lambda\} = 0$$

donde  $[M']$  y  $[K']$  son las matrices de inercia y rigidez, que en este caso resultan diagonales, con

$$m_n = \frac{1}{2} \rho n \pi \left( \sinh \frac{n\pi d}{l} \cosh \frac{n\pi d}{l} \right)$$

$$k_n = \frac{1}{2} \rho g \frac{(n\pi)^2}{l} \sinh^2 \left( \frac{n\pi d}{l} \right)$$

A partir de  $\phi$  obtenemos expresiones generales para  $u$  y  $v$

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} -a_n \frac{n\pi}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} \cosh \frac{n\pi y}{l}$$

$$v = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{n\pi}{l} \cos \frac{n\pi x}{l} \sinh \frac{n\pi y}{l}$$

Nos proponemos aproximar el campo de velocidades como una combinación lineal de funciones de forma, que en la superficie libre, coinciden con los primeros  $N$  polinomios de Legendre renormalizados en el intervalo  $(0, l)$ .

Para obtener los coeficientes  $a_n^k$  correspondientes al polinomio de Legendre de orden  $k$  tomamos la componente vertical de la velocidad en la superficie libre.

$$v|_{y=d} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{n\pi}{l} \cos \frac{n\pi x}{l} \sinh \frac{n\pi d}{l} = P_k \left( \frac{2x}{l} - 1 \right) = V_k(x)$$

Multiplicando ambos términos por  $\cos \frac{n\pi x}{l}$  e integrando entre 0 y  $l$  obtenemos

$$\int_0^l P_k \left( \frac{2x}{l} - 1 \right) \cos \frac{n\pi x}{l} dx = a_n^k \frac{n\pi}{l} \sinh \frac{n\pi d}{l} \int_0^l \cos^2 \frac{n\pi x}{l} dx = a_n^k \frac{n\pi}{2} \sinh \frac{n\pi d}{l}$$

$$a_n^k = \frac{2}{n\pi \sinh \frac{n\pi d}{l}} \int_0^l P_k \left( \frac{2x}{l} - 1 \right) \cos \frac{n\pi x}{l} dx$$

Los componentes  $U$  y  $V$  del campo de velocidades se pueden entonces expresar como

$$U(x, y) = \dot{\alpha}_1 U_1 + \dot{\alpha}_2 U_2 + \dot{\alpha}_3 U_3 + \dots + \dot{\alpha}_N U_N$$

$$V(x, y) = \dot{\alpha}_1 V_1 + \dot{\alpha}_2 V_2 + \dot{\alpha}_3 V_3 + \dots + \dot{\alpha}_N V_N$$

La energía cinética del campo de velocidades del fluido es

$$E_c = \frac{1}{2} \rho \int_0^l \int_0^d (U^2 + V^2) dx dy$$

Si utilizamos los primeros N polinomios se puede expresar en forma matricial

$$E_c = \frac{1}{2} \{\dot{\alpha}\}^T [M] \{\dot{\alpha}\}$$

donde  $\{\dot{\alpha}\}^T = \{\dot{\alpha}_1, \dot{\alpha}_2, \dots, \dot{\alpha}_N\}$

y los componentes de la matriz [M] son

$$m_{ij} = \int_0^l \int_0^d (U_i U_j + V_i V_j) dx dy$$

donde  $U_k = \sum_{n=1}^{\infty} -a_n^k \frac{n\pi}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} \cosh \frac{n\pi y}{l}$

$$V_k = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^k \frac{n\pi}{l} \cos \frac{n\pi x}{l} \sinh \frac{n\pi y}{l}$$

y reemplazando en la expresión anterior

$$m_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^i a_n^j \frac{\rho}{4} n \pi \sinh \left( 2n\pi \frac{d}{l} \right)$$

En forma análoga podemos obtener la expresión para la energía potencial gravitatoria debida a la superficie libre

$$\xi(x, t) = \int_0^t V|_{y=d} dt = \alpha_1 V_1(x) + \alpha_2 V_2(x) + \alpha_3 V_3(x) + \dots$$

$$E_p = \int_0^l \frac{1}{2} \rho g \xi^2 dx = \frac{1}{2} \rho g \left[ \alpha_1^2 \int_0^l V_1^2(x) dx + \alpha_2^2 \int_0^l V_2^2(x) dx + \dots \right]$$

Se puede expresar en forma matricial

$$E_p = \frac{1}{2} \{\alpha\}^T [K] \{\alpha\}$$

donde [K] es una matriz de rigidez diagonal

$$k_i = \rho g \frac{1}{2i+1}$$

La energía cinética de la viga se obtiene como

$$E_{c_v} = \int_0^l \frac{1}{2} \rho_v A_v \dot{\xi}^2(x) dx$$

donde  $A_v$  es la sección transversal de la viga,  $\rho_v$  la densidad de la misma, y  $\xi(x)$  se puede expresar como

$$\begin{aligned} \xi(x) &= \dot{\alpha}_1 V_1(x) + \dot{\alpha}_2 V_2(x) + \dot{\alpha}_3 V_3(x) + \dots \\ \therefore E_{c_v} &= \frac{1}{2} \rho_v A_v \left[ \dot{\alpha}_1^2 \int_0^l V_1^2(x) dx + \dot{\alpha}_2^2 \int_0^l V_2^2(x) dx + \dots \right] \end{aligned}$$

En forma matricial

$$E_{c_v} = \frac{1}{2} \{\dot{\alpha}\}^T [M_v] \{\dot{\alpha}\}$$

donde  $[M_v]$  es una matriz de inercia diagonal

$$m_{v_i} = \rho_v A_v \frac{1}{2i+1}$$

La energía elástica de la viga es

$$\begin{aligned} E_{p_v} &= \frac{1}{2} \int_0^l EI \left( \frac{d\xi}{dx} \right)^2 dx \\ \xi'(x) &= \alpha_1 V_1'(x) + \alpha_2 V_2'(x) + \dots \end{aligned}$$

En forma matricial

$$E_{p_v} = \frac{1}{2} \{\alpha\}^T [K_v] \{\alpha\}$$

en la cual  $[K_v]$  es una matriz de rigidez donde  $k_{ij} = EI \int_0^l V_i'(x) V_j'(x) dx$

### 3. Resultados

En las figuras 3, 4, 5 y 6 se muestran los primeros cuatro modos naturales de vibración del sistema ilustrado en la figura número 1. Se ilustra la deformación de la viga en línea punteada y el campo de velocidades del fluido con pequeños vectores y las líneas de corriente.

Se ve que para modos de mayor frecuencia, la penetración del campo de velocidades es menor, limitándose a la zona próxima a la viga.

En la tabla 1 se muestran las frecuencias naturales de vibración del sistema.

Se han tomado las dimensiones del rectángulo de 1m. x 1m. y la densidad del agua  $1000 \text{ kg/m}^3$ . La altura de la viga se ha tomado como 0.01m y la densidad del acero 7.8. En la primera columna se presentan las frecuencias en ausencia de líquido y en la segunda columna las frecuencias de la viga acoplada con el líquido. En el cálculo se han tomado 200 términos de la serie para aproximar el campo de velocidades del fluido.

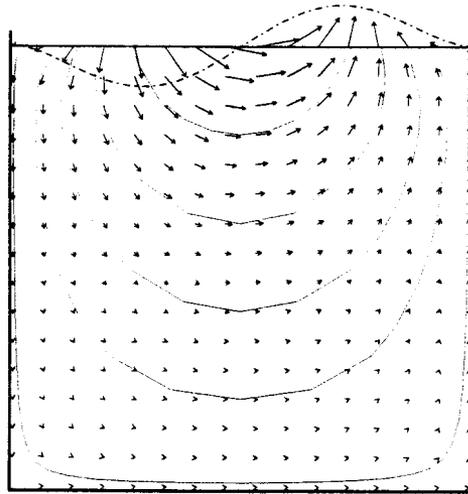


Figura 3 *Primer modo normal de un recipiente 2-D con tres lados rígidos y uno elástico, lleno con un fluido incompresible, suponiendo flujo potencial.*

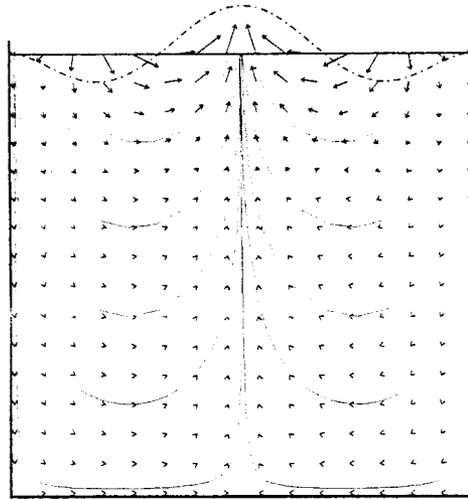


Figura 4 Segundo modo normal de un recipiente 2-D con tres lados rígidos y uno elástico, lleno con un fluido incompresible, suponiendo flujo potencial.

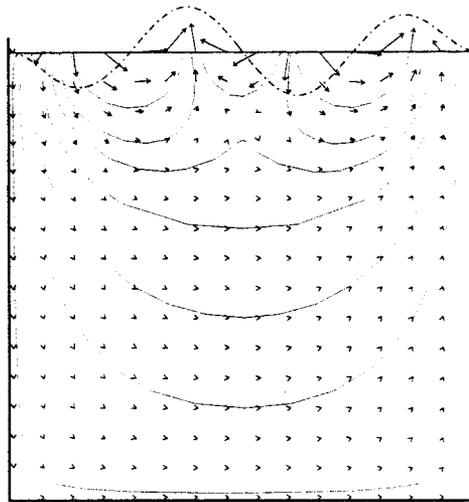


Figura 5 Tercer modo normal de un recipiente 2-D con tres lados rígidos y uno elástico, lleno con un fluido incompresible, suponiendo flujo potencial.

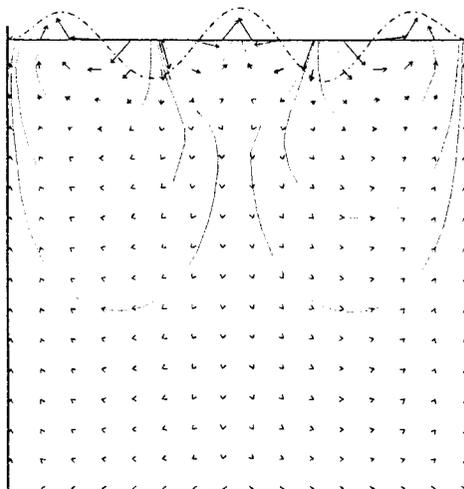


Figura 6 Cuarto modo normal de un recipiente 2-D con tres lados rígidos y uno elástico, lleno con un fluido incompresible, suponiendo flujo potencial.

TABLA I

Frecuencias naturales de vibración de un recipiente 2-D con tres lados rígidos y uno elástico, lleno con un fluido incompresible, suponiendo flujo potencial. Comparación con las frecuencias normales de la viga en ausencia del fluido.

Modo, I	Frecuencias naturales de una viga doblemente empotrada (Hz)	Frecuencias naturales del sistema fluido-estructura (Hz)
1	52.05075	---
2	143.4799	72.89164
3	281.278	159.7980
4	464.9667	305.2325
5	694.5801	481.9203
Número total de grados de libertad:	$\infty$	14

#### REFERENCIAS

- [1] Converti J, Scheble M y Strizzolo C. N. *Journal of Sound and Vibration* A Rayleigh-Ritz Substructure Synthesis Method in Physical Coordinates for Dynamic Analysis of Structures (enviado para publicar).