

## OPTIMIZACION DE FORMA DE PLACAS CARGADAS EN SU PLANO MEDIANTE ALGORITMOS GENÉTICOS Y ELEMENTOS DE CONTORNO

**Berardi Sensale, Alvaro Herrera y Alfredo Piria**

Facultad de Ingeniería, Universidad de la República, Montevideo, URUGUAY.

### RESUMEN

En este trabajo se aborda el problema de optimización de forma de sólidos elásticos bidimensionales, considerando material isótropo y homogéneo, de cara a obtener el peso mínimo de la estructura limitando los valores de sus tensiones máximas.

Se aplica un Algoritmo Genético en la optimización de modelos de elementos de contorno. Mediante la asimilación de estructuras a cromosomas representados por cadenas de bits y partiendo de una población generada aleatoriamente, se efectúan los procesos naturales de selección, cruce y mutación. Se evoluciona así, a través de las generaciones, hacia la estructura óptima.

Finalmente se presentan algunos ejemplos que ponen de manifiesto la validez de la formulación presentada.

### ABSTRACT

In this work, the shape optimization problem for 2-D elastic isotropic solids is formulated. The objective function is the minimum weight design with limiting values of maximum stresses.

A Genetic Algorithm to optimize boundary element models is discussed. The models are represented by a bit string (chromosome), so we start with a chromosome population created by random, then it is evaluated and the three trans formation operators: selection, cross and mutation are applied to get a new population and so on, until the best chromosome is reached.

Finally several examples and their conclusions are also presented.

### INTRODUCCIÓN

Las técnicas de optimización y de cálculo numérico son uno de los campos más estudiados en la historia de la matemática aplicada, pero es sólo con la llegada de ordenadores más potentes

cuando estas técnicas se aplican al diseño óptimo de estructuras. El objetivo final es obtener diseños de estructuras con mejor comportamiento ante solicitaciones externas y con la cantidad de material precisa para que se cumplan ciertos requisitos establecidos previamente. En este trabajo nos limitaremos a minimizar el peso de la estructura con restricciones en tensiones.

Para realizar el diseño óptimo de una estructura, en general se necesitan dos algoritmos: el "Analyzer" que realiza el análisis estructural del sistema para un diseño dado y mediante el cual se calculan las tensiones y deformaciones, permitiendo saber que restricciones son violadas (por ejemplo las tensiones máximas por encima de la tensión admisible) y en que magnitud. Y el "Optimizer" que efectúa la optimización y provea el nuevo diseño a estudiar, a partir de la situación ya analizada.

La aplicación de los conceptos de la genética al campo de la optimización, se debe a Holland[1] que en 1975 sentó las bases de los Algoritmos Genéticos que fueron desarrollados por Goldberg[2] al final de la década de los 80.

La optimización estructural de placas mediante la aplicación de Algoritmos Genéticos como "Optimizer", ha sido abordada entre otros por Chapman et al. [3], Galante et al. [4], Duda [5] y Estupinan et al. [6] empleando el Método de los Elementos Finitos como "Analyzer".

El trabajo que aquí se presenta, aborda el problema de la optimización estructural de placas empleando a diferencia de los trabajos anteriores el Método de los Elementos de Contorno como "Analyzer". Este método presenta, en comparación con el Método de los Elementos Finitos muchas ventajas para trabajar en optimización estructural, debido a su característica de trabajar solamente en el contorno, permitiendo de esta manera, manejar un volumen de información relativamente pequeño, y concerniente exclusivamente al contorno, que en definitiva es quien define la geometría. Además como interpola tensiones y desplazamientos en forma independiente asegura una mayor precisión en el cálculo de las tensiones, así como una redefinición de la malla entre iteraciones sencilla y poco costosa, pues solamente el contorno de la pieza es discretizado.

Para la representación de la forma, se utilizan variables de diseño las cuales son relevantes para determinar la forma del contorno. En este trabajo, las variables de diseño son las coordenadas de algunos puntos de la parte variable del contorno donde la forma debe ser optimizada. Se define geometría del contorno en función de las coordenadas de dichos puntos, por medio de funciones  $\beta$ -spline, siguiendo la metodología presentada por Braibant et al. [7] en su trabajo de optimización de estructuras bidimensionales con elementos finitos.

Las funciones spline cúbicas hermitianas, tienen sus derivadas primera y segunda continuas, curvatura media mínima y son independientes de los ejes coordenados. Además presentan la ventaja de poder controlar propiedades globales, de manera que el movimiento de cualquier punto de control, que en nuestro caso son las variables de diseño, producirá un cambio de forma global antes que local evitando la consideración de diseños impracticables. Estas funciones entonces, se muestran apropiadas para trabajar utilizando un algoritmo genético, pues tienen la característica de poder representar adecuadamente formas geométricas complejas con un número mínimo de parámetros, las coordenadas de un número definido de puntos de control sobre la curva.

## MÉTODO DE LOS ELEMENTOS DE CONTORNO

La ecuación de partida del Método de los Elementos de Contorno en Elasticidad, es la ecuación integral de contorno [8], la cual expresa el vector desplazamiento  $u(Q)$  en un punto  $Q$  de un dominio  $\Omega$  como una función de los vectores desplazamiento  $u(P)$ , y tensión  $t(P)$  en los puntos  $P$  del contorno  $\Gamma$  de dicho dominio, de la forma:

$$Cu(Q) = \int_{\Gamma} U(Q, P) t(P) d\Gamma - \int_{\Gamma} T(Q, P) u(P) d\Gamma \quad (1)$$

donde  $U$ ,  $T$  y  $C$  son tres tensores de segundo orden cuya formula se encuentra en la referencia [8] y están determinados por la solución fundamental de la ecuación de Navier, las tensiones correspondientes a dicha solución fundamental y la situación del punto  $Q$  con respecto al dominio  $\Omega$  respectivamente.

Para poder resolver numéricamente la ecuación integral de contorno, se discretiza el contorno  $\Gamma$  en elementos tales que dentro de cada elemento se pueden interpolar las componentes de los vectores desplazamiento y tensión a partir de sus valores nodales. En este trabajo se utilizaran elementos con tres nodos (con variación cuadrática) por lo cual, usando para los desplazamientos y las tensiones las mismas funciones de interpolación  $\phi$ , se tendrá:

$$u_i = \sum_{n=1}^3 \phi^{(n)} u_i^{(n)} \quad (2)$$

$$t_i = \sum_{n=1}^3 \phi^{(n)} t_i^{(n)} \quad (3)$$

Aplicando la ecuación integral de contorno tomando el punto  $Q$  en cada nodo en los que se discretizó el contorno e introduciendo las condiciones de borde del problema Elástico, se obtiene finalmente un sistema algebraico de la forma

$$Ax = y \quad (4)$$

con incógnitas en componentes de tensiones y/o desplazamientos, dependiendo de las condiciones de borde

La ecuación integral de contorno, permite calcular con precisión los valores de los vectores desplazamiento  $u$ , y tensión  $t$  en los puntos en que se discretizó el contorno, pero no brinda la información suficiente como para calcular el tensor de tensiones en los puntos del contorno. Sin embargo, también permite calcular las derivadas de las componentes del vector desplazamiento  $u$  con respecto a la coordenada tangencial  $\xi$ , mediante las funciones de interpolación

$$u_i = \sum_{n=1}^3 \phi^{(n)} u_i^{(n)} \quad (5)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial \xi} = \sum_{n=1}^3 \frac{\partial \phi^{(n)}}{\partial \xi} u_i^{(n)} \quad (6)$$

Para determinar el tensor de tensiones en el contorno, basta con aplicar la ecuación (5), la ley de Hooke, la fórmula de Cauchy, y la fórmula de derivación de una función compuesta para obtener el siguiente conjunto de ecuaciones [9]

$$\sigma_{ij} = \frac{2\mu\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (7)$$

$$t_i = \sigma_{ij} n_j \quad (8)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial \xi} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial \xi} \quad (9)$$

donde  $\sigma_{ij}$  y  $\varepsilon_{ij}$  son las componentes de las matrices asociadas con los tensores de tensiones y deformaciones respectivamente,  $\mu$  es el módulo de elasticidad transversal,  $\nu$  el coeficiente de Poisson,  $\delta_{ij}$  el delta de Kronecker, y  $n_i$  las componentes del versor normal saliente al contorno.

Para elasticidad bidimensional considerando que  $n_1 = \frac{\partial x_2}{\partial \xi}$  y  $n_2 = -\frac{\partial x_1}{\partial \xi}$  [8], se deduce que las ecuaciones anteriores, determinan el siguiente sistema de siete ecuaciones algebraicas:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a & 0 & 0 & -\lambda \\ n_1 & 0 & n_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n_2 & n_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\lambda & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & -n_2 & 0 & n_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\mu & -\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -n_2 & 0 & n_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \\ u_{1,1} \\ u_{2,1} \\ u_{1,2} \\ u_{2,2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ t_1 \\ t_2 \\ 0 \\ u_{1,\xi} \\ 0 \\ u_{2,\xi} \end{Bmatrix} \quad (10)$$

$$\text{donde } a = -\lambda - 2\mu; \text{ y } \lambda = \frac{2\mu\nu}{1-2\nu}$$

La resolución del sistema (10), para cada punto en que fue discretizado el contorno permite determinar las componentes de la matriz asociada con el tensor de tensiones en cada uno de estos puntos, así como las componentes del tensor de deformaciones en el caso en que fuera de interés, ya que también se conoce el gradiente de desplazamiento.

En este trabajo se necesita conocer el tensor de tensiones en los puntos del contorno para poder calcular la tensión de Von Mises.

## ALGORITMOS GENÉTICOS

Los algoritmos genéticos intentan emular en su desempeño la ley darwiniana de la sobrevivencia del más apto. Se va simulando el transcurrir de poblaciones de individuos donde el paso de una población a la siguiente surge de la aplicación de ciertos operadores genéticos. Cada individuo tiene asignado una función de aptitud o función de mérito cuyo valor numérico hace que a ese individuo se le apliquen los operadores genéticos con mayor o menor probabilidad.

Por ejemplo individuos con valores de la función de mérito bajos son poco probables a ser seleccionados para tener descendientes.

La aplicación del algoritmo genético va generando, en general, poblaciones donde el valor promedio de las funciones de mérito de sus integrantes va creciendo. Tal motivo hace que la aplicación de estos algoritmos a problemas de maximización o minimización de funciones genere buenas soluciones y en muchos casos valores que se apartan, luego de generar varias poblaciones, del valor óptimo del problema en menos de digamos 5%, apartamientos totalmente aceptables en el contexto de la práctica de la ingeniería.

$$\begin{aligned} & \max f(x) \\ \text{El problema que se intenta atacar sería pues : } & \quad g_i(x) \leq 0 \quad i = 1, 2, \dots, m \\ & \quad x \in D \end{aligned}$$

Aquí  $f(x)$  es una función real de variable  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Las  $x_i$  son las variables de diseño. Hablaremos del vector  $x$  como de un diseño pensando en el contexto de que dar  $x$  define o fija un sistema estructural. La información que aporta  $x$  puede ser del tipo áreas de ciertos elementos, dimensiones geométricas o coordenadas de ciertos puntos.

Se impone por un lado que estas variables de diseño pertenezcan a un cierto conjunto  $D$  (por ejemplo que sean positivas o que  $D$  sea un conjunto finito o discreto) y por otro lado que se verifiquen restricciones del tipo  $g_i(x) \leq 0$ . El cálculo de estas últimas puede implicar el análisis estructural de un sistema si por ejemplo la restricción se corresponde con la exigencia de que la tensión en cierto punto del sistema estructural no supere un valor admisible o bien que un desplazamiento sea menor que cierto valor prefijado.

A los efectos de la aplicación del algoritmo genético se define el siguiente problema :

$$\begin{aligned} (P_\mu) \quad & \max_{x \in D} f(x) - \mu \sum_{i=1}^{i=m} \bar{g}_i(x) \\ & \text{donde } \bar{g}_i(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } g_i(x) \leq 0 \\ g_i(x) & \text{si } g_i(x) \geq 0 \end{cases} \\ & \text{y } \mu \geq 0 \text{ es un coeficiente de penalización.} \end{aligned}$$

Se dice que  $(P_\mu)$  es el problema penalizado (por las restricciones no verificadas por  $x$ ).

Se demuestra, bajo condiciones bastante generales, que la solución del problema  $(P_\mu)$  tiende a la solución del problema planteado originalmente cuando  $\mu \rightarrow +\infty$ .

Se puede pues pensar en resolver el problema ( $P_\mu$ ) para valores crecientes de  $\mu$ , parando cuando no haya una mejora apreciable del valor de la función  $f$  de un problema al siguiente o bien cuando se considere que las restricciones  $g_i(x)$  estén prácticamente satisfechas. Por Población se entenderá un conjunto finito de diseños. O sea cada individuo es un diseño.

Asociamos a cada individuo un número real que mide su aptitud. Para el problema ( $P_\mu$ ) será

el valor de la función  $f(x) - \mu \sum_{i=1}^{i=m} g_i(x)$  (el valor de  $f$  penalizado con las restricciones que no se cumplen en  $x$ ). La población inicial se generará aleatoriamente. Se crearán individuos que verifican la condición de pertenecer al conjunto  $D$ . Estos individuos (diseños) en general no verificarán todas la restricciones  $g_i(x) \leq 0$ , con lo cual su aptitud no será  $f(x)$  sino un valor menor.

La idea no es retirar estos individuos de la población sino meramente dejar que operen ciertos operadores genéticos que promuevan la supervivencia y descendencia de los individuos más aptos.

Las características más salientes de un algoritmo genético son :

- 1) Representación cromosomal de los individuos.
- 2) Generación de la población inicial.
- 3) Función de aptitud de cada individuo.
- 4) Operadores genéticos que permiten pasar de una población a la siguiente.

Pasemos a describir brevemente cada una de estas características.

### **Representación cromosomal de los individuos**

La idea es representar cada diseño  $x$  como una tira de ceros y unos ( un byte de largo fijo). Un ejemplo ilustrará lo anterior.

Supongamos un reticulado espacial de 26 barras. Cada barra es un perfil  $L$ . El fabricante provee 16 tamaños distintos de perfiles  $L$ .

Para este caso un diseño es representable como un byte de largo 104. Los primeros 4 bits se pueden mirar como la representación en binario de el tipo de perfil elegido para la barra número 1. Los últimos 4 bits de los 104 serían la representación en binario del tipo de perfil elegido para la barra número 26. Análogamente cualquier byte de largo 104 se puede decodificar como un reticulado espacial de 26 barras donde cada barra es un perfil  $L$  tomado de una lista de 16 posibilidades.

### **Generación de la población inicial**

Si cada individuo es un byte de tamaño  $k$ , entonces una población de  $r$  individuos se puede representar como una matriz de ceros y unos de  $r$  filas y  $k$  columnas. Cada individuo de la población sería una fila de esa matriz.

Generar aleatoriamente una población inicial consistirá entonces en generar aleatoriamente una matriz de ceros y unos. Si se tiene disponible una función que cada vez que es invocada

devuelve un número entre 0 y 1 con distribución uniforme (por ejemplo), redondeando al entero más cercano podemos ir generando aleatoriamente ceros y unos.

### Función de aptitud de cada individuo

Para cada fila de la matriz anterior se pasa a decodificar ese byte para obtener el diseño  $x$ . Se procede al cálculo de  $f(x)$  y de las  $g_i(x)$  que permiten calcular el valor de la aptitud de ese

individuo, o sea el valor de  $f(x) = \mu \sum_{i=1}^{l=m} g_i(x)$

### Operadores genéticos que permiten pasar de una población a la siguiente

Los operadores genéticos básicos son : Selección , Cruce y Mutación

**Selección** : Consiste en seleccionar aquellos individuos que van a tener descendencia. A tal efecto hay que diseñar una metodología que seleccione en forma aleatoria individuos de forma tal que los individuos con mayor aptitud tengan más probabilidades de ser seleccionados. A su vez estos individuos que fueron seleccionados se puede decidir por ejemplo que pasen directamente a la población siguiente o no necesariamente. Una forma sencilla, en este caso determinística, es seleccionar la mitad más apta.

**Cruce** : Sobre el conjunto generado por el operador de Selección se procede a elegir aleatoriamente parejas de individuos. Se decide con cierta probabilidad  $p$  (por ejemplo  $p = 0.8$ ) si esa pareja elegida tendrá efectivamente descendientes. En caso que sí se procede al cruce de los 2 bytes. Una forma sencilla de hacerlo consiste en elegir aleatoriamente un número  $s$  entre 1 y  $k$ . El primer hijo se arma con los  $s$  primeros bits del primer padre y los  $(k - s)$  últimos del segundo padre. El segundo hijo se arma con los primeros  $s$  bits del segundo padre y los  $(k - s)$  últimos bits del primer padre. Se puede proceder a calcular ya para estos nuevos individuos el valor de su aptitud.

Una decisión importante es si se va trabajar con poblaciones de tamaño fijo o de tamaño variable. En el primer caso hay que decidir a quien le quitan el lugar en la población. Una posibilidad es que ocupen el puesto de los que tienen aptitudes más bajas.

**Mutación** : Con cierta probabilidad  $q$  (pequeña) un individuo cualquiera puede mutar (cambiar).

Una forma sencilla de implementar un operador de mutación puede ser el de elegir aleatoriamente un número  $s$  entre 1 y  $k$ . Si en esa posición hay un 1 poner un 0 y si hay un 0 poner un 1.

Se puede proceder a recalcular la aptitud de este individuo.

El algoritmo genético entonces partiendo de una población inicial de diseños calculará la aptitud de cada individuo y aplicará los operadores genéticos para obtener la siguiente generación.

A los nuevos individuos que surjan les calculará su aptitud. De este forma irá generando sucesivas poblaciones. En cada una de estas se puede mirar el valor de la aptitud del individuo más apto.

La condición de parada de algoritmo puede ser el que este último valor no mejore significativamente en digamos 3 o 4 poblaciones sucesivas.

## RESULTADOS

### Ejemplo A :Placa con hueco elíptico

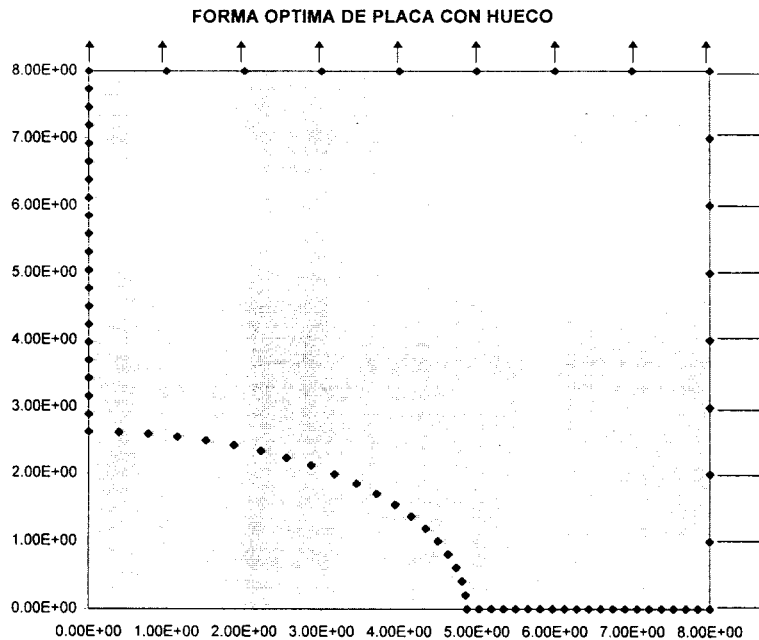


Figura 1

En este ejemplo se considera una placa cuadrada de lado  $2w$  con un hueco elíptico central sometida a una tensión biaxial uniforme como se muestra en la figura anterior.

En las direcciones de los ejes  $x$  e  $y$  actúan cargas de tracción de valores  $2p$  y  $p$  respectivamente. Debido a la simetría del problema, se discretiza solamente la cuarta parte de la placa con 38 elementos cuadráticos como se indica en la figura. El algoritmo genético va



generando distintas parejas de semiejes. Se maneja una población de 160 individuos y cada cromosoma era de largo 12 ( 6 bits para el primer semieje y 6 bits para el segundo semieje).

Se considero una restricción sobre la tensión de von Mises, la cual no podía superar el valor  $4p$  en ningún punto de la placa. Se intenta hallar la placa de peso mínimo que verifique esta restricción en las tensiones.

El algoritmo genético, luego de generar unas 16 poblaciones, obtiene como mejor diseño el que tiene semiejes  $0.6094w$  y  $0.3281w$ . La correspondiente arrea es de valor  $3.3718w^2$ . Este valor difiere en un 3% del obtenido por Yamazaki et al. [10]

### Ejemplo B :Mensula con carga uniforme

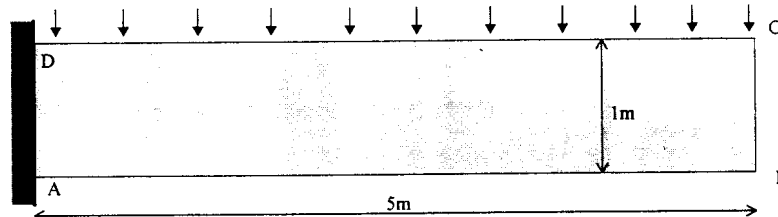


Figura 2

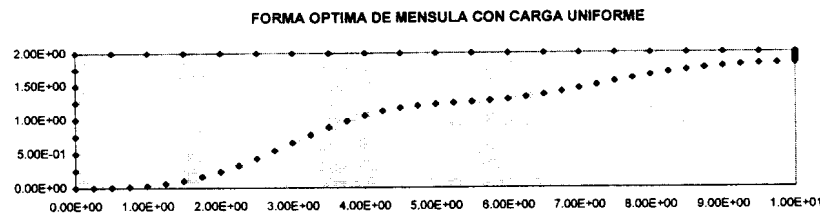


Figura 3

En este ejemplo se considera una ménsula sometida a una presión vertical uniforme en la cara superior de  $0.1 \text{ MPa}$  como se indica en la figura anterior.

Se pretende hallar la forma del lado inferior de manera tal que la ménsula tenga peso mínimo y se verifique una restricción en las tensiones de Von Mises a  $9.1 \text{ MPa}$ . El punto B puede desplazarse sobre la vertical, quedando los puntos a, C y D fijos. El perfil del lado inferior queda definido a partir de 5 puntos cuyas abscisas están igualmente espaciadas, y cuyas ordenadas son determinadas por el algoritmo genético. A partir de estos 5 puntos el perfil queda definido por medio de una interpolación con splines cúbicas.

El contorno se discretizó con 76 elementos cuadradillos. A los efectos de comparar el resultado obtenido con el dado por Tafreshi [11], los nodos correspondientes al borde

empotrado DA, se modelaron con apoyos deslizantes excepto el correspondiente al punto A que se considero fijo.

En el algoritmo genético se considero una población de 160 individuos, siendo cada cromosoma de largo 25 ( 5 bits para la absisa de cada uno de los 5 puntos de control). En 1280 iteraciones se obtuvo el mejor diseño (indicado en la figura) en el cual el peso de la mensula sufrió una reducción del 52% respecto del diseño rectangular, lo cual mejora la reducción del 43% dada por Tafreshi [11].

## REFERENCIAS

- [1] **Holland, J.H.**, *Algoritmos Genéticos*, Investigación y Ciencia, septiembre 1992.
- [2] **Goldberg, DE**, *Genetic algorithms in search, optimization, and machine learning*, Addison-Wesley Publishing Company, Inc. 1989.
- [3] **Chapman, C.D., Saitou, K. and Jakiela, M.J.**, *Genetic algorithm as an approach to configuration and topology design*, ASME Design Automation Conference, Albuquerque, New Mexico, september 1993
- [4] **Galante, M., Cerrolaza, M. and Annicchiarico, W.**, *Optimización de Estructuras Tridimensionales y Modelos de Elementos Finitos Mediante Algoritmos Genéticos*, Boletín Técnico I.M.E., Vol.81, No 1, pags.1-19, marzo 1994
- [5] **Duda, J.**, *Genetic Algorithm Based Topology and Shape Optimization for Single and Bi-Material Structures*, Design Optimization and Automation, may 1995
- [6] **Estupinan, J., Onate, E. y Suarez, B.**, *Una Primera Aproximación a la Optimización de Forma de Placas Mediante Algoritmos Genéticos*, Anales del III Congreso de Métodos Numéricos en Ingeniería, Zaragoza-Espana, Vol. 2, pags. 648-657, junio 1996
- [7] **Braibant, V. and Fleury, C.**, *Shape Optimal Design Using  $\beta$  - Splines*, Comp. Meth. in Appl. Mech and Eng., Vol. 44, pp. 247-267, 1984
- [8] **Kane, J.H.**, *Boundary Element Analysis in Engineering Continuum Mechanics*. Prentice-Hall, Inc., 1994
- [9] **Mota Soares, C. and Choi, K.**, *Boundary Elements in Shape Optimal Design of Structures*. The Optimum Shape. Automated Structural Design. Eds Bennett, J.A. and Botkin, M.E., Plenum Press, pp.199-228, 1986.
- [10] **Yamazaki, K., Sakamoto, J. and Kitano, M.**, *An Efficient Shape Optimization Technique of a Two-Dimensional Body Based on the Boundary Element Method*, Computers & Structures Vol. 48, No 6, pp. 1073-1081, 1993.
- [11] **Tafreshi, A. and Fenner, R.T.**, *Design Sensitivity Analysis Using the Boundary Element Method*, Journal of Strain Analysis Vol.28, No 4, pp. 283-291, 1993.