

TOMOGRAFÍA EN BASE AL MÉTODO DE MÁXIMA ENTROPÍA

R. Barbuzza^{*}, A. Clausse^{*,†} y P. Lotito^{*,†}

^{*} PLADEMA-ISISTAN
Universidad Nacional del Centro y CNEA,
7000, Tandil, Argentina
e-mail: [rbarbu, plotito, clausse]@exa.unicen.edu.ar,
web page: <http://www.pladema.gov.ar>

[†] también CONICET

Palabras Claves: Tomografía computada, Reconstrucción tomográfica, Máxima entropía.

Resumen. *En el presente trabajo se explora la posibilidad de generar tomografías a partir de un conjunto finito de proyecciones con el método de máxima entropía. Las soluciones que se obtienen con este método representan la solución más probable para el problema de reconstrucción tomográfica, dado un conjunto incompleto de proyecciones. En este trabajo se presenta un algoritmo numérico para resolver el problema de optimización asociado, comparando la rapidez y precisión para distinta cantidad de proyecciones conocidas, y se muestran los resultados obtenidos en la reconstrucción de un modelo de prueba con objetos de formas simples y homogéneos en su interior.*

1 INTRODUCCIÓN

Una tomografía computada (CT) es una imagen tridimensional digital reconstruida a partir de un cierto número de proyecciones radiográficas del objeto a diferentes ángulos. CT tiene muchas aplicaciones bien conocidas en medicina, geociencia, y astronomía¹. Actualmente, también se utiliza la CT para realizar análisis no destructivo de objetos industriales, ya que ofrece la posibilidad de realizar una inspección más minuciosa que la radiografía industrial clásica^{1,2}.

En la Figura 1 se muestra un objeto que es atravesado por un haz de radiación de intensidad I_0 , el cual genera detrás un perfil proyectado I , relacionado con la distribución local de atenuación $f(x,y)$ del objeto según:

$$g(s, \theta) = \ln \left(\frac{I}{I_0} \right) = \mathcal{R} f(x, y) \quad (1)$$

donde \mathcal{R} es la transformada de Radon, θ es el ángulo de proyección, s corresponde a cada rayo que atraviesa al objeto en dirección perpendicular a θ . La tomografía computada consiste en resolver el problema inverso de hallar la imagen $f(x,y)$ a partir de las proyecciones $g(s, \theta)$ ¹. Existen diferentes métodos basados en modelos determinísticos o probabilísticos que permiten encontrar la imagen original resolviendo inversamente la Ec. (1). Entre los primeros se pueden citar, ART, Filtered Backprojection, y de Fourier, los cuales reconstruyen bien cuando se cuenta con un conjunto completo de proyecciones. A diferencia, los algoritmos basados en modelos estocásticos como el Bayesiano¹ y Monte Carlo³ han logrado mejorar la calidad de la reconstrucción cuando se cuenta con proyecciones con ruido. Estos métodos son iterativos y buscan aleatoriamente una solución que mejor se ajuste al conjunto de proyecciones dato, y además permiten incorporar conocimiento *a priori* acerca del objeto a reconstruir, como por ejemplo, objetos homogéneos, forma del objeto, etc., lo cual resulta muy importante particularmente cuando los datos son insuficientes para generar una buena estimación de la imagen. Sin embargo, el mayor inconveniente de éstas técnicas es el tiempo computacional que insumen para encontrar la solución.

Tanto los métodos iterativos como de transformada son usados para encontrar una solución al problema inverso de reconstrucción. Mientras que los métodos de transformada se basan en modelos continuos, los métodos iterativos se derivan de modelos semicontinuos o discretos. En el enfoque continuo, el problema se describe en el continuo tanto de los valores de proyecciones $g(s, \theta)$ como de la función desconocida $f(x,y)$. Luego, la solución es discretizada teniendo en cuenta que la imagen se representa por un número finito de valores de la tonalidad en escala de grises. Por el contrario el enfoque semicontinuo o discreto, considera desde el inicio la discretización de los datos, pero encuentra una solución continua que luego es discretizada para su visualización digital.

En el presente trabajo se explora la posibilidad de generar tomografías a partir de un conjunto finito de proyecciones con el método de máxima entropía, el cual se basa en un modelo semicontinuo o discreto. En términos de entropía las distribuciones que se obtienen con este método⁴ representan la solución $f(x,y)$ más probable para la Ec. (1), a partir de un

conjunto incompleto de proyecciones $g(s, \theta)$ en diferentes ángulos θ .

Se presenta un algoritmo numérico para resolver el problema de optimización asociado comparando la rapidez y precisión. Finalmente, se muestran los resultados de aplicar este método al problema de reconstrucción de imágenes de objetos simples a partir de un conjunto finito de proyecciones.

2 EL PROBLEMA DE RECONSTRUCCIÓN

En la Figura 1 se observa una función bidimensional $f(x,y)$ que representa la distribución espacial desconocida, y un conjunto finito de P mediciones $g(s, \theta_p)$ (según Ec. 1), para cada rayo de dirección perpendicular a θ_p , donde s es la coordenada sobre el eje correspondiente. Supongamos que se cuenta con un total de S rayos paralelos y equiespaciados para cada proyección y P proyecciones del objeto, luego $N = S \times P$ es la cantidad total de rayos. El dominio de la función $f(x,y)$ queda limitada al espacio del objeto definido sobre m^2 píxeles. Los elementos de este espacio pueden identificarse con un vector f de $K = m^2$ componentes, donde f_k es el valor del coeficiente de atenuación del k -ésimo píxel. El operador de la transformada Radon, se representa por la matriz R de dimensión $N \times K$ donde cada elemento $R_{n,k}$ contiene la longitud del rayo n que atraviesa el k -ésimo píxel.

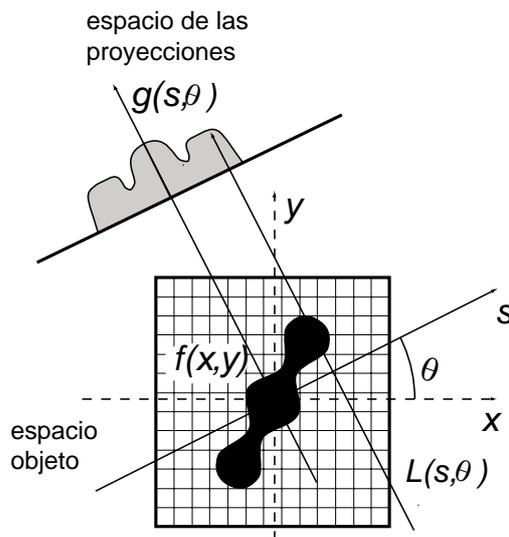


Figura 1: Proyección en la dirección θ

En forma vectorial la Ec. (1) queda expresada como $g = R f$ donde g es un vector de dimensión N, cuyas componentes g_n tienen el valor de la integral de línea sobre el rayo n de la función f . En este trabajo se ordenaron los N valores de g , tomando los S primeros rayos para la primer proyección, los siguientes S rayos para la segunda proyección y así sucesivamente para las P proyecciones.

3 EL CRITERIO DE LA MÁXIMA ENTROPÍA

El criterio de la máxima entropía se basa en la definición de entropía usada por Shannon en Teoría de la Información^{5,6}. La entropía es una medida de incertidumbre de una variable aleatoria. Si X es una variable aleatoria discreta de valores x_k , para $0 \leq k < K$, los cuales tienen asociado una distribución de probabilidad $p(X = x_k) = p_k$, la entropía de la variable X se define como:

$$H(X) = -\sum_{k=0}^K p_k \log(p_k) \quad (2)$$

La entropía depende solamente de la distribución de probabilidad p , y no de los valores que puede tomar la variable aleatoria X , por esta razón esta medida se expresa también como $H(p)$. Es una función no negativa, y el máximo la función se da cuando todos los valores de la variable tienen la misma probabilidad de ocurrir $p_k = 1/K$, es decir en este caso la incertidumbre sobre el resultado de X es máxima e igual a $\log(K)$. Por el contrario, la entropía o incertidumbre sobre la salida de la variable es mínima e igual a cero, si se tiene certeza sobre el resultado de X .

La entropía puede utilizarse para la determinación de distribuciones de probabilidad desconocidas asociadas a un problema sobre el cual se dispone de información en forma de promedios u otros funcionales estadísticos (e.g. el valor medio de X). La solución basada en el método de máxima entropía encuentra la distribución de probabilidad que maximiza la Ec. (2), sujeta a las restricciones impuestas por la información disponible.

El problema de optimización con restricciones puede resolverse mediante la técnica de multiplicadores de Lagrange. Para cada restricción en (2) se introduce un multiplicador de Lagrange λ y se construye el funcional de la entropía extendido $L(p, \lambda)$, para el cual se determina el conjunto de multiplicadores λ que hacen que p maximice la entropía y a la vez satisfaga las restricciones del problema.

En este trabajo aplicamos el método de máxima entropía asociando la imagen buscada con una distribución de probabilidad desconocida relacionada a cada píxel. Basándose en las distintas probabilidades condicionales para cada ángulo dadas por las proyecciones, se busca determinar la distribución más probable compatible con esta información. Es decir que la maximización de la Ec. (2) está restringida a que también se cumpla la Ec. (1) para el conjunto de valores del vector g conocidos, correspondientes a las proyecciones dato. Esta técnica provee la solución con mayor uniformidad en la distribución de tonos de grises, lo cual ayuda a minimizar el ruido.

4 SOLUCIÓN NUMÉRICA DEL PROBLEMA DE MÁXIMA ENTROPÍA

Tenemos entonces el siguiente problema de optimización

$$\begin{aligned} \max H(f) &= -\sum_{k=1}^K f_k \log f_k, \\ \begin{cases} f \geq 0 \\ Rf = g \end{cases} \end{aligned} \quad (3)$$

donde se usa la convención que $0 \times \log(0) = 0$ y que la condición de suma uno para f está incluida en la restricción lineal. Matemáticamente es un problema de optimización convexa con restricciones lineales. Una forma de evitar trabajar con restricciones es dualizar el problema. Más precisamente consideremos el lagrangiano $L(f, \lambda)$ dado por

$$L(f, \lambda) = -\sum_{k=1}^K f_k \log f_k + \lambda^T (Rf - g) \quad (4)$$

entonces las condiciones de optimalidad del problema (3) se traducen en

$$\begin{cases} \nabla_f L(f, \lambda) = -1 - \log(f) + R^T \lambda = 0 \\ Rf = g \end{cases} \quad (5)$$

donde el logaritmo está tomado componente a componente. De la primera ecuación de (5) se puede despejar el valor de f en función de λ y reemplazando en la segunda ecuación obtenemos

$$\begin{cases} f = e^{-1} \exp(R^T \lambda) \\ R \exp(R^T \lambda) = eg \end{cases} \quad (6)$$

donde también la exponenciación es por componentes.

Esto muestra que para resolver el problema de optimización (3) podemos resolver el sistema de ecuaciones no-lineales en λ y luego reemplazar el valor hallado en la ecuación que da el valor de f . Además, por ser la función exponencial siempre positiva la desigualdad $f > 0$ es automáticamente verificada. Para resolver el sistema de ecuaciones que define λ consideramos el problema equivalente

$$\min_{\lambda} J(\lambda) = \|R \exp(R^T \lambda) - eg\|^2 \quad (7)$$

que es un problema de minimización convexa sin restricciones cuya solución óptima (que es cero) se da para el valor de λ buscado, es decir el multiplicador correspondiente a la solución óptima f del problema (3).

Entre los métodos disponibles para resolver el problema (7) podemos mencionar: gradientes conjugados, gradiente espectral y Newton. Por cuestiones de performance sería deseable utilizar el método de segundo orden como el de Newton, sin embargo la gran

dimensión del Hessiano hace la inversión del mismo muy costosa*. Es por eso que consideramos que un buen compromiso es utilizar un método cuasi Newton (QN) como el método BFGS⁷. Este método avanza en cada paso en una dirección de descenso y a la vez aproxima la inversa del Hessiano de J con una corrección de rango uno. Más precisamente, siendo la fórmula analítica del gradiente

$$\nabla J(\lambda) = 2R \operatorname{diag}(\exp(R^T \lambda)) R^T (R \exp(R^T \lambda) - eg) \quad (8)$$

tenemos el siguiente algoritmo que resulta de aplicar el método casi Newton BFGS a nuestro problema:

Algoritmo

Etapa 0: Elegir una matriz S^0 simétrica y definida positiva y un valor λ^0

Etapa k: Realizar una búsqueda lineal en la dirección $d^k = -S^k \nabla J(\lambda^k)$

obteniendo α^k que minimiza $J(\lambda^k + \alpha d^k)$ en α .

Calcular

$$\lambda^{k+1} = \lambda^k + \alpha^k d^k,$$

$$\delta^k = \alpha^k d^k,$$

$$\gamma^k = \nabla J(\lambda^{k+1}) - \nabla J(\lambda^k).$$

Actualizar la matriz S^k con

$$S^{k+1} = S + (1-t) \left(\frac{\delta \delta^T}{\delta^T \gamma} - \frac{S \gamma \gamma^T S}{\gamma^T S \gamma} \right) + t \left(\left(1 + \frac{\gamma^T S \gamma}{\delta^T \gamma} \right) \frac{\delta \delta^T}{\delta^T \gamma} - \frac{\delta \gamma^T S + S \gamma \delta^T}{\delta^T \gamma} \right) \quad (9)$$

donde en el segundo miembro todos los exponentes son k .

El algoritmo original de BFGS requiere que t sea igual a 1. Sin embargo aquí se obtienen mejores resultados alternando los valores 1 y 0.

La búsqueda lineal en la etapa k , se realiza según el criterio de Armijo⁷, es decir no se realiza una minimización exacta sino que se busca un valor de α lo más grande posible de modo que se produzca un descenso suficiente en esa dirección, este paso está caracterizado por

$$J(\lambda^k + \alpha d^k) \leq J(\lambda) + \beta \alpha \nabla J(\lambda^k)^T d^k \quad (10)$$

donde $\beta \in (0,1)$ garantiza el suficiente descenso.

Finalmente, la condición de parada del algoritmo es cuando el valor de la función objetivo y la norma del gradiente han sido reducidos a un determinado porcentaje de su valor inicial o pasa una determinada tolerancia.

* En realidad no es necesario calcular la inversa del Hessiano, sino resolver un sistema de ecuaciones lineales dadas por el mismo. Este último también es costoso de resolver cuando la cantidad de variables es grande.

Este método casi Newton para la reconstrucción tomográfica fue implementado en Visual C++, optimizando los algoritmos de multiplicación de matrices para acelerar la convergencia del algoritmo. Dado que la matriz R de la transformada Radon de dimensión $N \times K$ es una matriz rala, ya que cada rayo n atraviesa como máximo $2\sqrt{K}$ de un total de K píxeles, se utilizó una estructura de almacenamiento apropiada para mantener en memoria sólo los componentes no nulos. Con esto, los productos de matrices se aceleran notablemente, ya que se evitan multiplicaciones innecesarias. Análogamente, R^T , la matriz traspuesta de R , se almacenó en memoria para evitar recalcularla en cada paso. La matriz R^T conserva para cada píxel de la imagen una lista de rayos que lo atraviesan y cuya longitud no supera los N/\sqrt{K} elementos. Con estas estructuras de datos y utilizando un procesador AMD athlon 1.6 512Mb el tiempo en segundos por iteración es:

$$t = 0.0000009 N^2 \tag{11}$$

La complejidad del algoritmo es $O(N^2)$ siendo N el número total de rayos considerado.

5 EXPERIMENTOS Y RESULTADOS

Se realizaron estudios de simulación 2D basados en proyecciones de una imagen de 128×128 correspondiente al modelo estándar de Shepp-Logan de la Figura 2 (a). Esta imagen contiene elipses con diferentes propiedades de absorción que simula el corte de un cráneo, la elipse blanca exterior corresponde al hueso y las elipses interiores a características del cerebro. Se consideraron distintas cantidad de proyecciones 8, 12 y 16 ángulos, 128 rayos por proyección con un píxel de tamaño igual al espacio entre los rayos. En la Figura 2(b) se muestran 16 proyecciones en diferentes ángulos, calculadas mediante la Ec. (1) sobre el modelo de la Figura 2(a). Cada fila de la imagen de la Figura 2(b) representa una de las P proyecciones almacenadas en el vector g . Los valores g_n se grafican en escala de grises, utilizando la escala que se indica en el mismo gráfico.

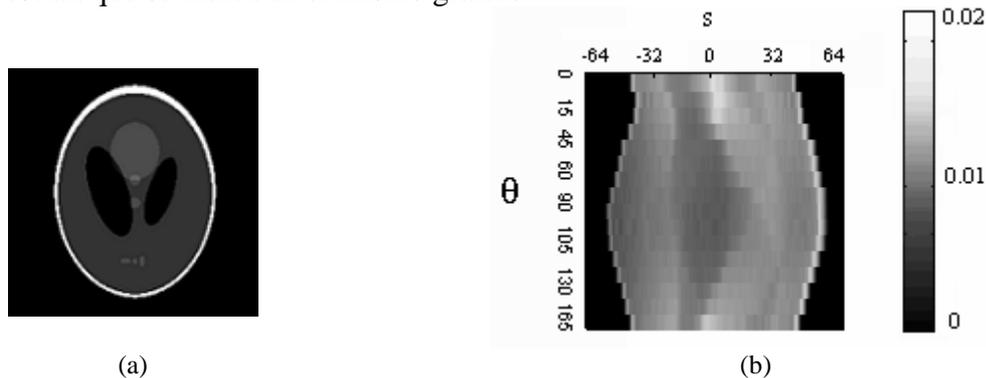


Figura 2. (a) Modelo Shepp Logan (b) 16 proyecciones del modelo Shepp Logan: $0^\circ 7^\circ 15^\circ 30^\circ 45^\circ 52^\circ 60^\circ 75^\circ 90^\circ 105^\circ 120^\circ 130^\circ 142^\circ 150^\circ$ y 165°

La Figura 3 muestra la evolución de $|J|$ a través de las iteraciones para encontrar la imagen solución a partir de las proyecciones de la Figura 2 (b). El algoritmo finaliza cuando

la norma alcanza una precisión de 0.0001. En este caso se utilizó el modelo de Shepp Logan $K = 128 \times 128$, $P = 16$, $S = 128$.

Un aspecto importante es el valor inicial del vector dual λ . Para obtener un buen punto de partida, se estimó el valor a priori de manera que el objeto proyectado inicial fuera homogéneo; para ello se calculó el valor de intensidad de una imagen inicial constante f de la siguiente manera:

$$f_k = \exp(-\lambda^0 N / \sqrt{K}) \quad (12)$$

luego, como la proyección de f está normalizada, debe tener suma uno. Obteniendo la ecuación

$$\exp(-\lambda^0 N / \sqrt{K}) \sqrt{K} S = 1 \quad (13)$$

de donde despejamos

$$\lambda^0 = \sqrt{K} / N \ln(S \sqrt{K}) \quad (14)$$

Este valor de λ se asigna a todo rayo cuya proyección es no nula, caso contrario se tiene conocimiento que todos los píxeles atravesados por el rayo son de intensidad 0, y los valores de λ para rayos con proyección nula se eligen de manera que cumplan esta condición.

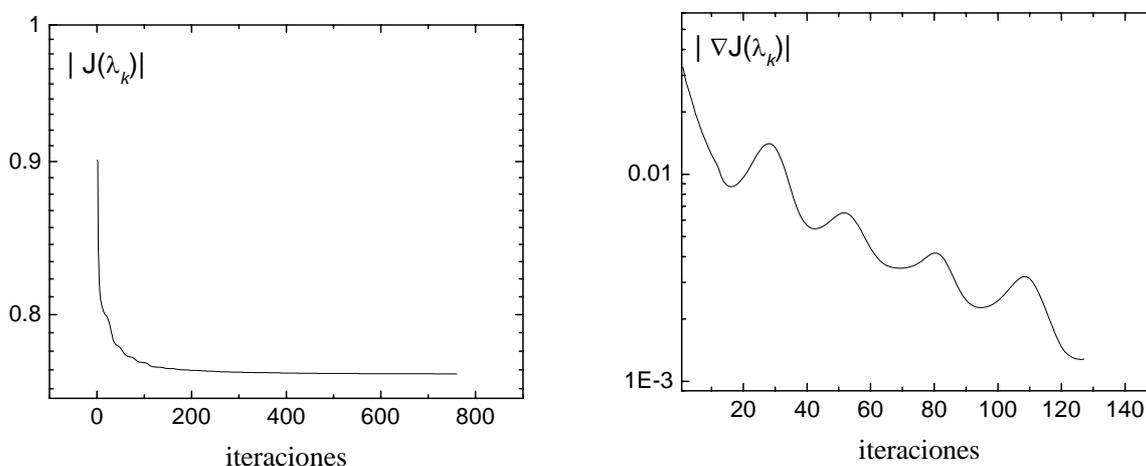


Figura 3. Evolución del método QN usando los datos de las proyecciones de la Fig. 2(b)

La Figura 4 muestra algunas imágenes intermedias obtenidas durante la iteración. El vector se inicializó con $\lambda = 0.6$ para rayos cuya proyección es no nula. Este valor de λ se calculó mediante la Ec. (14) para $K = 128 \times 128$, $P = 16$, $S = 128$. Se puede apreciar mayor similitud de las imágenes con la imagen original del modelo Shepp Logan a medida que se incrementa la cantidad de iteraciones.

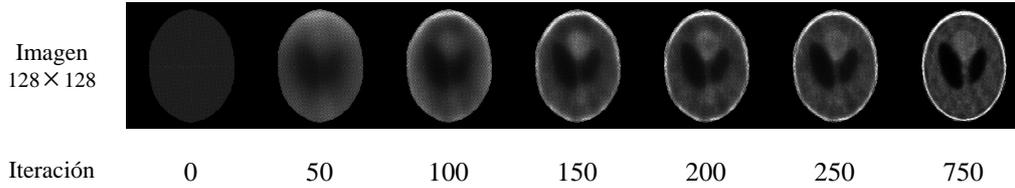


Figura 4. Imágenes intermedias obtenidas en distintas iteraciones

En la Figura 5 se representan los valores del vector g de las proyecciones originales y los valores del vector λ obtenidos para la reconstrucción anterior. Los valores altos de λ se representan con color blanco y los valores bajos con negro. Se puede notar que los valores λ son altos cuando la proyección del objeto es nula, mientras que los restantes valores λ parecen invertidos respecto de las proyecciones originales.

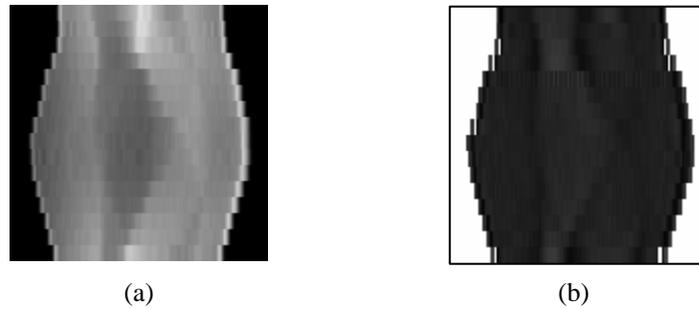


Figura 5. (a) 16 proyecciones dato del modelo Shepp Logan y (b) valores del vector λ obtenidos con el método de máxima entropía

Se realizó un análisis de reconstrucción del modelo de Shepp Logan utilizando distinta cantidad de ángulos 8, 12 y 16. En la Figura 6 se muestra el error ε entre proyecciones normalizado obtenido a través de las iteraciones para las reconstrucciones realizadas con distinta cantidad de proyecciones. Este indicador se calcula como:

$$\varepsilon = \frac{\sum_{\theta} \sum_{s} (g(s, \theta) - g_d(s, \theta))^2}{2RK(255)^2} \quad (15)$$

donde $g(s, \theta)$ es la proyección del rayo s sobre la imagen en reconstrucción y $g_d(s, \theta)$ es la proyección dato del mismo rayo s en la misma dirección θ . El denominador de la ecuación anterior es un factor de normalización.

En la Figura 6 se muestra la evolución de ε a través de las iteraciones, para la reconstrucción tomográfica del modelo Shepp Logan estudiado. Al inicio de la reconstrucción el error ε es igual para las tres reconstrucciones ya que la imagen inicial es la misma, pero se puede apreciar que en las primeras 100 iteraciones este error es menor para mayor cantidad de ángulos. Luego de 200 iteraciones la diferencia del error ε obtenido en las tres reconstrucciones es menos significativa.

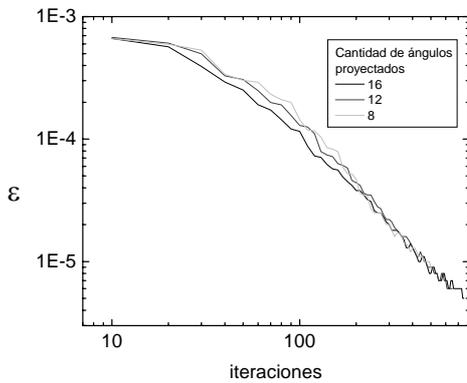


Figura 6. Evolución del error ε a través de las iteraciones en el método de máxima entropía

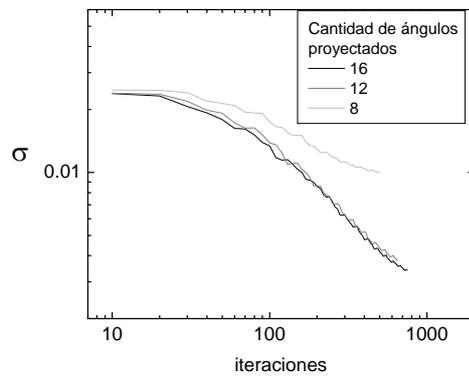


Figura 7. Evolución del error σ a través de las iteraciones con el método de máxima entropía.

El error ε de la imagen reconstruida resultó similar para 8, 12 y 16 proyecciones, de lo que se concluye que éste no es un buen indicador de calidad, ya que las imágenes obtenidas resultan de mayor calidad visual cuanto mayor es la cantidad de proyecciones usadas (Figura 11 (a)).

Por este motivo, se calculó el error cuadrático medio normalizado, σ entre la imagen original y reconstruida.

$$\sigma = \frac{\sum_x \sum_y (f(x, y) - f_d(x, y))^2}{K(255)^2} \quad (16)$$

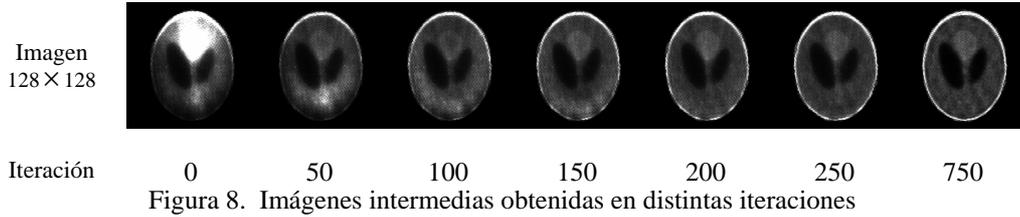
donde $f(x,y)$ es la imagen reconstruida y $f_d(x,y)$ es la imagen original. En la Figura 7 se muestra la evolución del error σ a través de las iteraciones para el ejemplo analizado. Inicialmente este error coincide en todas las reconstrucciones, pero a medida que se incrementa la cantidad de iteraciones, el error σ con 8 ángulos es muy alto respecto al caso de reconstrucción con 12 o 16 proyecciones.

6 APROXIMACIÓN DE λ^0

Dada la similitud de los valores de las proyecciones dato y los valores de λ encontrados (Figura 5), se realizaron pruebas para mejorar la rapidez de convergencia. Para ello se calcularon los valores de λ^0 inicial a partir de los valores del vector g correspondiente a las proyecciones originales.

$$\lambda_n^0 = \max(g) - g_n. \quad (17)$$

En la Figura 8 se muestra la imagen inicial obtenida con este vector inicial de λ según la Ec. 17 y algunas imágenes intermedias de la reconstrucción.



En la Figura 9 y Figura 10, se comparan los resultados obtenidos para el uso λ^0 según la Ec. 14 o Ec. 17. Si bien la imagen inicial obtenida a partir de la Ec. 17 parece más aproximada, tanto el error ε como σ es mucho mayor que en el caso de reconstrucción con λ^0 según la Ec. 14. En los gráficos se puede ver que recién luego de 200 iteraciones haciendo uso de la información de las proyecciones se puede lograr una imagen error ε y con un σ menor.

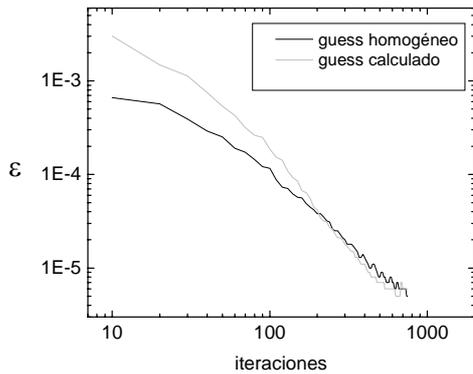


Figura 9. Evolución del error ε con el método de máxima entropía

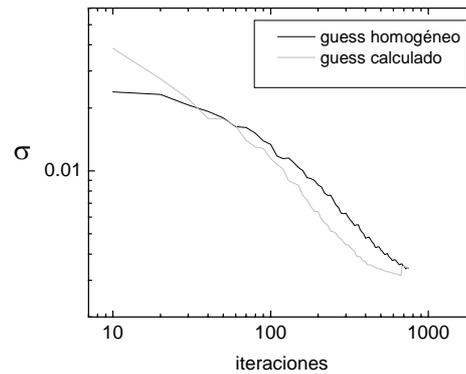


Figura 10. Evolución del error σ con el método de máxima entropía.

7 OTROS CRITERIOS DE RECONSTRUCCIÓN

En el trabajo Reconstrucción tomográfica con métodos estocásticos³ se estudió la técnica de Montecarlo, con el criterio de mínimos cuadrados sobre el error ε , definido entre proyecciones según la Ec. 15. Se está investigando la posibilidad de incluir información *a priori* en el método de Montecarlo acerca de la homogeneidad de la imagen a reconstruir. Los resultados iniciales obtenidos se muestran en la Figura 11-b, donde se consideró que el desvío estándar de los valores de intensidad de píxeles vecinos (aquellos que quedan incluidos en sectores de 3x3 píxeles) debe ser mínimo, para lograr de esta manera continuidad en la tonalidad de píxeles cercanos. La función a minimizada es el error ε más la suma de todos los desvíos estándar correspondientes a los sectores de 3x3 píxeles de la imagen. Se puede notar

que la técnica obtiene imágenes comparables con las del método de máxima entropía cuando se utilizan la misma cantidad de proyecciones.

Como se mencionó otros métodos tradicionales como Filtered Backprojection no obtienen una buena calidad de imagen, cuando se utilizan poca cantidad de proyecciones como en el ejemplo analizado en este trabajo (Figura 11-c)

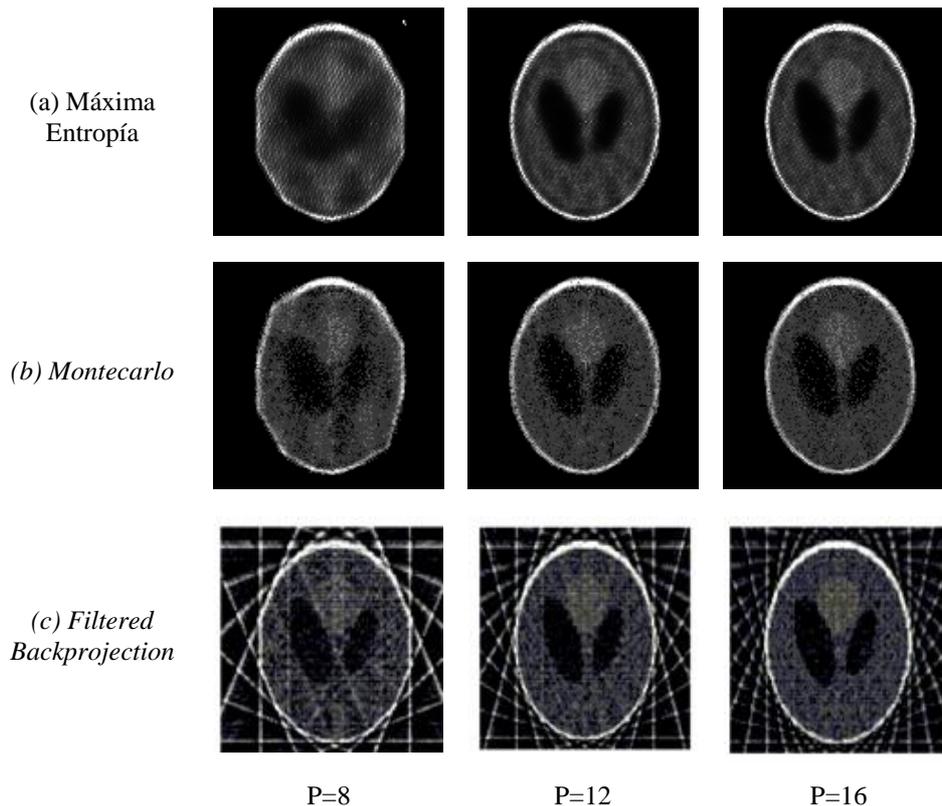


Figura 11. Imágenes obtenidas con 3 métodos de reconstrucción y con distintas cantidades de ángulos (P)

Como continuación de este trabajo sobre el método de máxima entropía se prevé incorporar otros criterios que involucren información *a priori*. Por ejemplo el hecho de conocer la geometría de los contornos de la imagen puede ayudar a construir un criterio a optimizar que la tenga en cuenta.

Formalmente, el problema sería en este caso resolver el siguiente problema de optimización:

$$\begin{cases} \min \Psi(f) := \alpha_1 L(f) - \alpha_2 H(f) + \alpha_3 P(f), \\ f \geq 0 \\ Rf = g \end{cases} \quad (18)$$

donde los α_i son pesos positivos a determinar, $L(f) = \|Rf - g\|^2$ es el criterio de mínimos cuadrados, H es la entropía y $P(f)$ es un criterio que incorpore información *a priori*. Por ejemplo podemos considerar una función cuadrática de f que penalice grandes variaciones entre vecinos, esto resultaría en bordes menos abruptos. Numéricamente, la desventaja de considerar un criterio como el (18) es que la variable primal f no puede despejarse en función de la variable dual λ y se debe trabajar en los dos espacios acoplados.

8 CONCLUSIONES

Se estudió la reconstrucción de imágenes tomográficas usando método de máxima entropía. Estos resultados complementan los ya obtenidos en el trabajo Reconstrucción tomográfica con métodos estocásticos³, para otros criterios de reconstrucción. La performance de la implementación expuesta permite suponer la solución de máxima entropía es un buen camino para obtener la imágenes de buena calidad con un número reducido de proyecciones.

9 REFERENCIAS

- [1] G.Herman, A. Kuba, *Discrete Tomography, Foundations, Algorithms and Applications*, Birkhauser Boston, (1999)
- [2] A. Castaño, P. Paggi, R. Barbuzza, M. Vénere y A. Clause, “Control de calidad de manufactura con un procesamiento tomográfico inteligente”, XXX Reunión Anual de la Asociación Argentina de Tecnología Nuclear (AATN'2003), Buenos Aires (2003).
- [3] R. Barbuzza, M. Vénere, A. Clause, “Reconstrucción tomográfica con métodos estocásticos”, VIII Congreso Argentino de Ciencias de la Computación, Buenos Aires, pp. 99-110 (2002).
- [4] J. Scheins, “Tomographic Reconstruction of transverse and longitudinal phase space distributions using Maximum entropy algorithm”, Tesla Report, (2004).
- [5] C. Shannon, “A mathematical theory of the communication”. Bell Sys. Tech Journal, 27:379-423,623-656, (1948).
- [6] A. Papoulis A., *Probability, Random Variables, and Stochastic Process*, McGraw Hill Inc, (1991).
- [7] R. Fletcher R., *Practical Methods of Optimization*, John Wiley & Sons, (1980).