

AJUSTE DE MODELOS BASADO EN LA MINIMIZACION DE LOS ERRORES DE LAS ECUACIONES CONSTITUTIVAS

Rodrigo Pascual, Mario Razeto

Depto. Ing. Mecánica, Universidad de Concepción
Casilla 53-C, Concepción, Chile

Jean Claude Golinval

LTAS, Universidad de Liège
21, Rue E. Solvay, C3, 4000 Liège, Bélgica

RESUMEN

Se presenta un método de ajuste de modelos basado en la minimización de los errores en las ecuaciones constitutivas. El error puede ser interpretado como una energía de deformación residual provocada por el desbalanceamiento que ocurre en la ecuación de equilibrio del modelo. El algoritmo se inscribe dentro del grupo de métodos de ajuste locales basados en la sensibilidad. Está estrechamente ligado a una técnica de ajuste previamente presentada, y considera el acoplamiento existente entre expansión y ajuste del modelo. El algoritmo es validado a través de ejemplos numéricos y experimentales demostrando ser eficiente en los tres pasos asociados a un ajuste de modelo: expansión, localización de error, corrección.

ABSTRACT

A model updating method based on the minimization of errors on the constitutive law is presented. The error can be understood as a residual strain energy result of the unbalance in the FE model equilibrium equation. The algorithm can be classified into the sensitivity based group of model updating methods. It is closely related to an updating technique previously published by considering the coupling between the expansion of the measurements and the model correction step. The method is tested through numerical and experimental examples. It shows to be efficient in the three steps related to the updating of a FE model: expansion, error localisation, model correction.

1. INTRODUCCION

Un esfuerzo significativo de investigación en el área de dinámica de estructuras se ha centrado en correlacionar los modelos de elementos finitos con los parámetros modales identificados utilizando análisis modal experimental. Basicamente, dos tipos de solución se han propuesto: los métodos globales y los métodos locales.

Los métodos globales buscan corregir en un solo paso las matrices de masa y rigidez completas. Un ejemplo de tal enfoque se puede encontrar en [1]. El resultado es un modelo matemático, que reduce la distancia entre el modelo y las medidas experimentales, pero que no es comprensible en términos de parámetros « físicos » de diseño estructural tales como inercias, áreas, densidad, etc.

Un enfoque fundamentalmente distinto considera la identificación de tales parámetros. Hay una lista de ventajas de los métodos locales sobre los globales. Primero, se preserva la formulación del modelo

inicial: la conectividad y la simetría. Segundo, las correcciones se entienden en términos físicos, que son asociables a las hipótesis básicas del modelo. Finalmente, el modelo ajustado puede ser directamente usado a efectos de optimización, lo que no es el caso si se considera el uso de métodos globales.

Es importante remarcar que el éxito de un ajuste depende fuertemente de la selección de los parámetros de diseño (localización de error). Otros factores importantes son la cantidad de grados de libertad medidos, la cantidad de modos excitados en las mediciones, el ruido, las violaciones a las hipótesis de elasticidad, linealidad y amortiguación.

Los métodos locales asumen que las correcciones a las matrices del modelo se pueden escribir como sigue; para la matriz de rigidez :

$$[\Delta K] = \sum_{i=1}^{np} p_k [K_i] \quad \circ \quad [\Delta K] = \frac{\partial [K]}{\partial \{p\}} \otimes \{\Delta p\} \quad (1)$$

La primera clase de correcciones se denominará « métodos de correcciones adimensionales », (AF). Un ejemplo se presenta en [2]. El segundo grupo se denominará « métodos basados en la sensibilidad », (SB), presentados en [3], [4], [5] entre otros. Los métodos AF son fáciles de implementar, y los factores pueden interpretarse físicamente como correcciones relativas en el módulo de Young, o en la densidad de una subestructura. El enfoque SB da directamente una corrección física, y puede ser aplicado cuando las matrices de rigidez o masa son funciones no lineales de los parámetros. Por supuesto, la implementación es más difícil, debido a la evaluación y manejo de las sensibilidades.

El presente artículo considera la corrección del modelo gracias a la minimización de un error en las ecuaciones constitutivas (MECE) [6], y aplica el concepto de acoplamiento expansión/ajuste [5]. El método no recurre al apareamiento entre los modos experimentales y analíticos, lo que ahorra un esfuerzo no despreciable.

2. EXPANSION MECE

2.1. TEORIA BASICA

Sea

$$\phi_{E_i} = \begin{Bmatrix} \phi_m \\ \phi_{oi} \end{Bmatrix} \quad (2)$$

el vector expandido descompuesto en la parte medida y la no medida, ϕ_m y ϕ_{oi} respectivamente. El objetivo es buscar ϕ_{E_i} solución del problema variacional propuesto por Veubeke [7] :

$$\delta(T_{\max} - V_{\max} + D) \quad (3)$$

donde

T_{\max} es la energía cinética asociada a ϕ_{E_i} ,

V_{\max} corresponde a la energía potencial, y

D es un potencial de dislocación que relaja las condiciones de compatibilidad y las condiciones de borde (de los desplazamientos medidos).

En términos del modelo de EF inicial el problema puede ser reducido a

$$\min J_i^{MECE} = (\tilde{\phi}_i - \phi_{Ei})^T K_a (\tilde{\phi}_i - \phi_{Ei}) \quad (4)$$

sujeto a

$$K \tilde{\phi} = \omega_i^2 M \phi_{Ei} \quad (5)$$

y

$$\Phi_m = \bar{\Phi}_m \quad (6)$$

donde $\bar{\Phi}_m$ es el vector medido.

Si se consideran las funciones respuesta en frecuencia, en vez de los modos propios, entonces (5) debe ser substituida por

$$K \tilde{\phi} = \omega_i^2 M \phi_{Ei} + f \quad (7)$$

donde

f corresponde al vector de fuerza armónica a la frecuencia ω_i ,
 ϕ_{Ei} y $\tilde{\phi}$ corresponderán a los vectores FRF experimental y ficticio respectivamente.

Al usar (7), se sobreentiende que los efectos de amortiguamiento han sido despreciados. Ello puede evaluarse utilizando el Frequency Response Scale Factor [8].

Para un modelo perfectamente ajustado se tendrá en (5) o (7)

$$\tilde{\phi} = \phi_{Ei} \quad (8)$$

El problema (4) también puede ser escrito como

$$\min J_i^{MECE} = R_i^T K^\oplus R_i \text{ con } \Phi_m = \bar{\Phi}_m \quad (9)$$

donde

$R_i = Z_i \phi_{Ei}$ es la fuerza residual para el modo i -ésimo,

y K^\oplus corresponde a una inversa generalizada de la matriz de rigidez, para tomar en cuenta la presencia de modos rígidos.

Es fácil mostrar que Hemez [4] minimiza:

$$J_i^{SB-EBE} = (\tilde{\phi}_i - \phi_{Ei})^T K_a^2 (\tilde{\phi}_i - \phi_{Ei}) \text{ o } J_i^{SB-EBE} = (Z \phi_{Ei})^T (Z \phi_{Ei}) \quad (10)$$

y Alvin [5], (si el acoplamiento expansión/ajuste no es considerado)

$$J_i^{MSB-EBE} = (\tilde{\phi}_i - \phi_{Ei})^T (\tilde{\phi}_i - \phi_{Ei}) \text{ o } J_i^{MSB-EBE} = (K^\oplus Z \phi_{Ei})^T (K^\oplus Z \phi_{Ei}) \quad (11)$$

El uso de la matriz de peso K^{\oplus} se justifica si se considera que (10) puede ser aproximado por

$$J_i^{SB-EBE} \approx \alpha_i \sum_j J_{ij} \quad , \quad \alpha_i = \phi_{Ei}^T M \phi_{Ei} \quad (12)$$

donde j varía para todos los modos del modelo, y

$$J_{ij} = (\omega_{FEj}^2 - \omega_{Ei}^2)^2 \frac{(\phi_{FEi}^T M \phi_{Ei})^2}{(\phi_{FEj}^T M \phi_{FEj})(\phi_{Ei}^T M \phi_{Ei})} = (\omega_{FEj}^2 - \omega_{Ei}^2)^2 MAC_{ij}^M \quad (13)$$

El segundo factor en (12) corresponde al MAC (Modal Assurance Criterion) en la métrica de la matriz de masa. Si debido a los errores del modelo, existe algún nivel de correlación entre el modo experimental expandido y los modos en la banda alta del espectro, ello llevará a tales modos a dominar la función objetivo gracias al primer factor en (13) produciendo discontinuidades en la función J_i^{SB-EBE} . Como un alivio a tal situación, Alvin muestra que

$$J_i^{MSB-EBE} \approx \alpha_i \sum_j \bar{J}_{ij} = \alpha_i \sum_j \left(\frac{\omega_{FEj}^2 - \omega_{Ei}^2}{\omega_{FEj}^2} \right)^2 MAC_{ij}^M \quad (14)$$

la cual normaliza el aporte de cada modo.

La función de costo MECE (8) también se puede expresar como

$$J_i^{MECE} = \alpha_i \sum_j \hat{J}_{ij} = \alpha_i \sum_j \frac{(\omega_{FEj}^2 - \omega_{Ei}^2)^2}{\omega_{FEj}^2} MAC_{ij}^M \quad (15)$$

por lo que esta mejor balanceada que (12), pero menos que (13). Puede verse que MECE minimiza la energía de deformación residual, SB-EBE la norma de la fuerza residual, y MSB-EBE la norma de un pseudo-desplazamiento residual.

2.2. LOCALIZACION DE ERROR

Dado que la ecuación (7) no es correcta para un modelo erróneo, deformaciones residuales aparecerán en las subestructuras mal modeladas. Ello es evaluado usando el siguiente indicador local de error:

$$\Pi_j = (\tilde{\phi}_i - \phi_{Ei})^T K_j (\tilde{\phi}_i - \phi_{Ei}) \quad (16)$$

El indicador está estrechamente ligado a la teoría MECE; sin embargo otros métodos de expansión también pueden utilizarlo.

3. AJUSTE DE MODELOS MEDIANTE EL METODO MECE

Tal como se presenta el problema (4), los vectores expandidos solo pueden ser considerados como una aproximación, dado que el operador de expansión es una función de un modelo que presenta errores. Siguiendo el trabajo de Alvin, se propone utilizar el acoplamiento que existe entre la expansión y el ajuste con el siguiente algoritmo:

Si se considera en primer lugar una corrección al vector expandido:

$$\phi_i = \phi_{E_i} + \begin{Bmatrix} 0 \\ \delta\phi_{\alpha_i} \end{Bmatrix} \quad (17)$$

Las correcciones a los parámetros δp_j , y $\delta\phi_i$ serán encontrados usando la energía residual del próximo modelo, calculada con la matriz de flexibilidad estática del presente :

$$\min J_i^{k+1} = R_i^{k+1T} K^{\oplus} R_i^{k+1} = \left(\left(Z + \sum_j \frac{\partial Z}{\partial p_j} \delta p_j \right) (\phi_{E_i} + \delta\phi_i) \right) K^{\oplus} \left(\left(Z + \sum_j \frac{\partial Z}{\partial p_j} \delta p_j \right) (\phi_{E_i} + \delta\phi_i) \right) \quad (18)$$

la que puede ser expandida a

$$\begin{aligned} J_i^{k+1} = & R_i^T K^{\oplus} R_i + 2(B_i \delta p)^T K^{\oplus} R_i + 2(Z_i \delta\phi_i)^T K^{\oplus} R_i + 2 \left(\sum_j \frac{\delta Z_i}{\delta p_j} \delta\phi_i \delta p_j \right)^T K^{\oplus} R_i + \\ & (B_i \delta p)^T K^{\oplus} (B_i \delta p) + 2(Z_i \delta\phi_i)^T K^{\oplus} (B_i \delta p) + 2 \left(\sum_j \frac{\delta Z_i}{\delta p_j} \delta\phi_i \delta p_j \right)^T K^{\oplus} (B_i \delta p) + \\ & (Z_i \delta\phi_i)^T K^{\oplus} (Z_i \delta\phi_i) + 2 \left(\sum_j \frac{\delta Z_i}{\delta p_j} \delta\phi_i \delta p_j \right)^T K^{\oplus} (Z_i \delta\phi_i) + \\ & \left(\sum_j \frac{\delta Z_i}{\delta p_j} \delta\phi_i \delta p_j \right)^T K^{\oplus} \left(\sum_j \frac{\delta Z_i}{\delta p_j} \delta\phi_i \delta p_j \right) \end{aligned} \quad (19)$$

donde

$$B_i = [B_{i1} \quad \dots \quad B_{ij} \quad \dots \quad B_{ip}] \quad , \quad B_{ij} = \frac{\partial Z_i}{\partial p_j} \phi_{E_i} \quad (20)$$

Y se utilizará una selección de modos, simultaneamente :

$$J = \sum_i J_i^{k+1} \quad (21)$$

Para linealizar el problema, solo los términos hasta de segundo orden son considerados,

$$\begin{aligned} J \approx & \sum_i R_i^T K^{\oplus} R_i + 2 \sum_i R_i^T K^{\oplus} \sum_j \{B_{ij}\} \delta p_j + 2 \sum_i R_i^T K^{\oplus} (Z_{\alpha_i} \delta\phi_{\alpha_i}) + \\ & 2 \sum_i \left(\sum_j \frac{\delta Z_{\alpha_i}}{\delta p_j} \delta\phi_{\alpha_i} \delta p_j \right)^T K^{\oplus} R_i + \sum_i \left(\sum_j B_{ij} \delta p_j \right)^T K^{\oplus} \left(\sum_j B_{ij} \delta p_j \right) + \end{aligned}$$

$$2 \sum_i (Z_{oi} \delta \phi_{oi})^T K^{\ominus} \left(\sum_j B_j \delta p_j \right) + \sum_i (Z_{oi} \delta \phi_{oi})^T K^{\ominus} (Z_{oi} \delta \phi_{oi}) \quad (22)$$

Minimizando con respecto a las incognitas,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial J}{\partial \delta p_j} &= \sum_i R_i^T K^{\ominus} B_j + \sum_i R_i^T K^{\ominus} \frac{\partial Z_{oi}}{\partial p_j} \phi_{oi} + \\ &\sum_i \left(\frac{\partial^2 Z_{oi}}{\partial p_j^2} \phi_{oi} \delta p_j + \frac{\partial Z_{oi}}{\partial p_j} \delta \phi_{oi} \right)^T K^{\ominus} R_i + \\ &\sum_i B_j^T K^{\ominus} B_i \delta p + \sum_i (Z_{oi} \delta \phi_{oi})^T K^{\ominus} B_j = 0 \end{aligned} \quad (23)$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial J}{\partial \delta \phi_{oi}} = R_i^T K^{\ominus} Z_{oi} \delta \phi_{oi} + \left(\sum_j \frac{\partial Z_{oi}}{\partial p_j} \delta p_j \right)^T K^{\ominus} R_i + Z_{oi}^T K^{\ominus} B_i \delta p + Z_{oi}^T K^{\ominus} Z_{oi} \delta \phi_{oi} = 0 \quad (24)$$

simplificando se llega a

$$\begin{bmatrix} \sum_i B_i^T K^{\ominus} B_i & c_1 & c_1 & \cdots & c_1 \\ c_1^T & Z_{o1}^T K^{\ominus} Z_{o1} & 0 & \cdots & 0 \\ c_2^T & 0 & Z_{o2}^T K^{\ominus} Z_{o2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_N^T & 0 & 0 & \cdots & Z_{oN}^T K^{\ominus} Z_{oN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta p \\ \delta \phi_{o1} \\ \delta \phi_{o2} \\ \vdots \\ \delta \phi_{oN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sum_i B_i^T K^{\ominus} R_i \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (25)$$

donde

$$c_i^T = Z_{oi}^T K^{\ominus} B_i + \left[\left(\frac{\partial Z_{oi}}{\partial p_1} \right)^T K^{\ominus} R_i \quad \left(\frac{\partial Z_{oi}}{\partial p_2} \right)^T K^{\ominus} R_i \quad \cdots \quad \left(\frac{\partial Z_{oi}}{\partial p_N} \right)^T K^{\ominus} R_i \right] \quad (26)$$

Lo que puede ser condensado a

$$A \delta p = b \quad (27)$$

donde

$$A = \sum_i B_i^T K^{\ominus} B_i - \beta \sum_i c_i (Z_{oi}^T K^{\ominus} Z_{oi})^{-1} c_i^T \quad (28)$$

y

$$b = -\sum_i B_i^T K^{\ominus} R_i \quad (29)$$

β es un factor introducido por Alvin, para controlar que la solución sea un mínimo. Si $\beta = 0$, el ajuste (27) no considera el acoplamiento expansión/ajuste lo que reduce la tasa de convergencia pero asegura que la solución es un mínimo. Para $\beta = 1$, el acoplamiento es considerado completamente, pero la matriz Hessiana puede perder su positividad, produciendo soluciones erróneas.

4. EVALUACION DE LOS METODOS

4.1. EJEMPLO NUMERICO

Este ejemplo sencillo consiste de una viga cantilever discretizada por 15 elementos Euler-Bernoulli. La estructura « experimental » difiere del modelo EF inicial en la rigidez en flexión del elemento 8 que ha sido doblada. Se han « medido » 15 traslaciones transversales equidistantes.

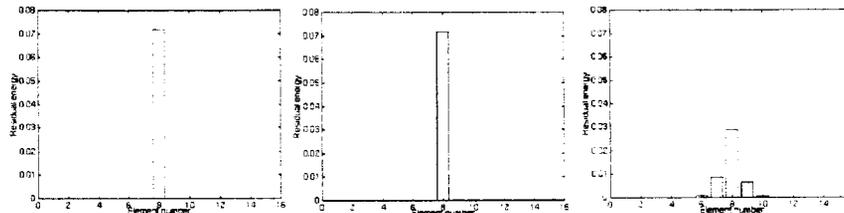


Fig. 1. Localización de error con el primer modo (medido en todos los grados de libertad. expansion SB-EBE, expansion MECE, respectivamente)

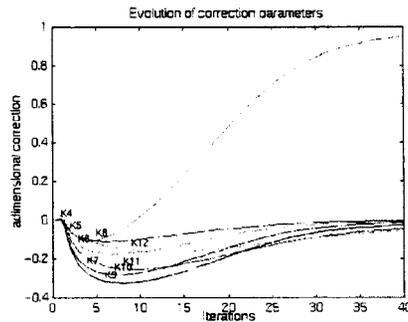


Fig 3a. SB-EBE básico [4] ($\beta=0$)

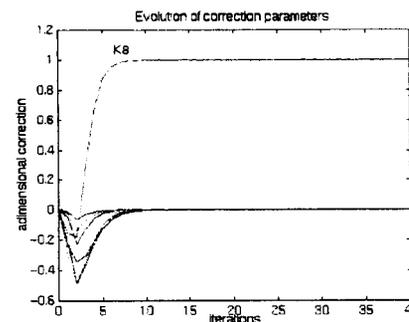


Fig 3b. SB-EBE modificado [5] ($\beta=0.95$)

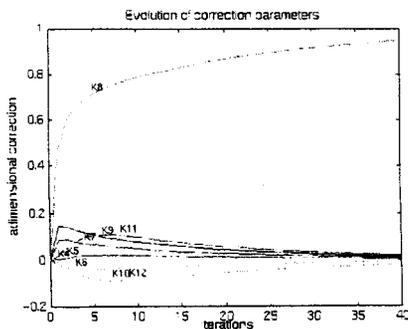


Fig 3c. MECE básico ($\beta=0$)

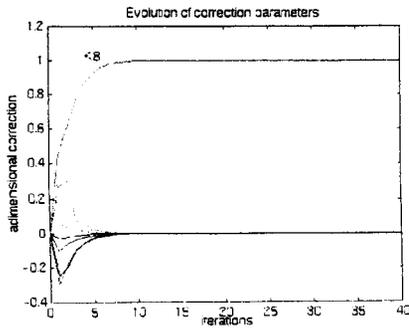


Fig 3d. MECE con acoplamiento ($\beta=0.95$)

Expansion-Localizacion de error

Los resultados de la expansión se muestran en Fig. 1. Como referencia se presenta la localización de error usando el vector medido en todos los gds. SB-EBE muestra casi exactamente la misma distribución, MECE logra valores mas bajos. El elemento en error es mostrado claramente. MECE muestra una dispersión a los elementos cercanos.

Ajuste

La comparación entre los 4 métodos se muestra en Figs. 3a-3d, donde se aprecia la evolución de los parámetros para cada iteración. Solo el primer modo es utilizado. Un análisis de la distribución de energía indica que el elemento a corregir contiene *suficiente* energía de deformación en flexión por lo que el ajuste del parámetro erróneo es posible. Si el error estuviese en la rigidez axial EA, tal modo sería inútil pues no muestra energía en tal dirección. La solución del sistema de ecuaciones es la misma para todos los métodos. La técnica *Right Filtered-Singular Value Decomposition* (RF-SVD) es utilizada [9].

La baja tasa de convergencia del algoritmo SB-EBE básico y del MECE ($\beta=0$) pueden ser explicadas por la pobre estimación de la curvatura del espacio de parámetros [5], a consecuencia de no considerar el acoplamiento expansión/ajuste. El problema es resuelto por MSB-EBE y MECE con $\beta=0.95$, lo que acelera la convergencia.

4.2. EVALUACIÓN EXPERIMENTAL

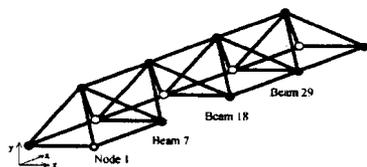


Fig. 3. Estructura experimental

El objetivo de la experiencia es validar la técnica de ajuste propuesta. Para ello se construyó una estructura tridimensional de vigas (figura 3) y se removió una de ellas (N°18). El modelo de elementos finitos mantiene todas las vigas intactas, así pues se espera que el indicador de energía residual muestre los valores más altos en esa subestructura. Las características generales del ensayo se dan en Tabla I.

El modelo se considera aceptablemente bueno pues la base modal analítica está cercana a la experimental según se ve en la figura 6a. Es de notar la ausencia del primer modo experimental.

La localización de error MECE muestra la viga 18 con la energía residual más alta, así pues su rigidez en flexión es seleccionada como parámetro a ajustar (figura 4).

Tabla I. Descripción sumaria del ejemplo

Estructura	
longitud	2.82 m
N° nodos instrumentados	45 (en el centro y en los extremos de cada viga)
N° grados de libertad medidos	135 (acelerómetros triaxiales)
rango de frecuencias excitado	0-200 Hz
N° frecuencias	1024
excitación	monoexcitación en nodo n°1, dirección y
Modelo EF	SAMCEF [10]
Características	192 elementos, 1044 grados de libertad
Análisis modal	LMS-Cada-x

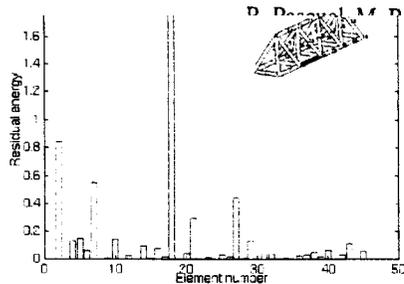


Fig. 4. Localización MECE para el 1^{er} modo

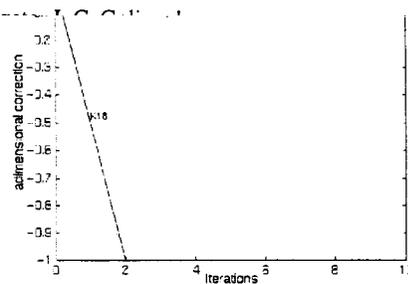


Fig. 5. Ajuste MECE usando el 1^{er} modo

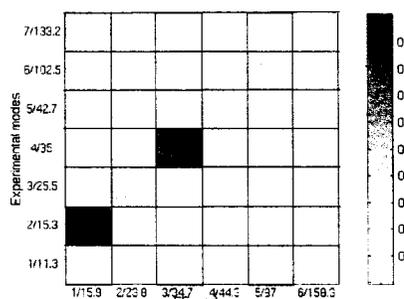


Fig. 6a. MAC inicial

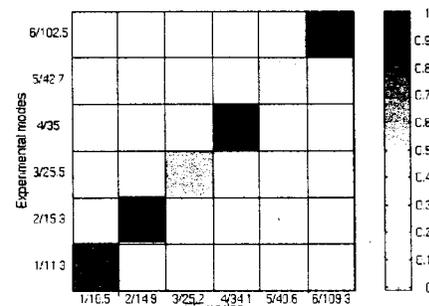


Fig. 6b. MAC despues del ajuste

La evolución del ajuste se muestra en figura 5. La matriz MAC del modelo ajustado muestra mejoras ostensibles (figura 5b). La correlación entre los resultados experimental y analíticos ha sido mejorada y el primer modo es predicho por el modelo.

5. CONCLUSIONES

Se ha presentado un método de ajuste de modelos. El algoritmo se basa en la modificación de una técnica de expansión/localización de error, y a un método de ajuste ya presentado anteriormente.

El método incluye de manera consistente el acoplamiento entre la expansión y el ajuste de modelos. La capacidad del método ha sido probada con ejemplos numéricos y experimentales.

6. AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen a François Hemez y a Kenneth Alvin su valiosa cooperación para el desarrollo del presente trabajo. También se agradece a FONDECYT, ya que el trabajo se inscribe en el marco del desarrollo del proyecto 1960586.

7. BIBLIOGRAFIA

- [1] Zimmerman, D.C., Simmermacher, T., Kaouk, M. (1995), « **Model correlation and system health monitoring using frequency domain measurements** », *AIAA/ASME adaptive structures forum. New Orleans.*
- [2] Lin, R.M., Ewins, D.J., (1990), « **Model Updating using FRFs** », *15th International Seminar on Modal Analysis. Leuven. Belgium.*
- [3] Larsson, P., (1991), « **Model updating based on forced vibrations** », *Proceedings of the Chuo-K.U. Leuven U.C. Seminar. Tokyo. Japan.*
- [4] Hemez, F.M., (1993), « **Theoretical and experimental correlation between finite elements models and modal tests in the context of large flexible space structures** », *Ph.D. dissertation. U. of Colorado.*
- [5] Alvin, K.F., (1996). « **Finite element model update via bayesian estimation and minimization of dynamic residuals** », *XIV Intl. Modal Anal. Conf., Orlando, Dearborn, Michigan. pp 561-567.*
- [6] Collignon, P., Golinval, J.C., (1996), « **Comparison of model updating methods adapted to local error detection** », *21th Intl. Sem. Modal Analysis. Leuven, Belgium.*
- [7] Fraeijs de Veubeke (1965), « **Displacement and equilibrium models in finite element method** », *Stress analysis. Ed. Zienkiewicz, John Wiley, Chap. 9.*
- [8] Pascual, R., Golinval, J.C., Razeto, M., (1997), « **A frequency domain correlation technique for model correlation and updating** », *15th Intl. Modal Anal. Conf., Orlando, Florida, pp 587-592.*
- [9] Hemez, F.M. and Farhat, C., (1995), « **Bypassing numerical difficulties associated with updating simultaneously mass and stiffness matrices** », *AIAA Journal, V33.N3, pp. 539-546.*
- [10] « **SAMCEF Users guide** », *Release 6.1, SAMTECH, S.A., Belgium. 1995.*