

VIBRACIONES DE UNA PLACA ORTÓTROPA DE ESPESOR VARIABLE CON BORDES LIBRES

Diana V. Bambill, Raúl E. Rossi, Patricio A. A. Laura, Carlos A. Rossit
Departamento de Ingeniería, Universidad Nacional del Sur e
Instituto de Mecánica Aplicada (CONICET)
(8000) Bahía Blanca, ARGENTINA

RESUMEN

Valores sumamente precisos de las frecuencias naturales de vibración de placas rectangulares con dos bordes libres adyacentes, mientras que los restantes están simplemente apoyados, empotrados y empotrados- simplemente apoyado, fueron determinados por A. W. Leissa hace casi un cuarto de siglo*. Por otra parte placas ortótropas con las mismas condiciones de borde no han sido estudiadas. En este trabajo se reseñan resultados obtenidos por los autores sobre la terminación de valores de coeficientes de frecuencia fundamental de placas ortótropas tanto de espesor uniforme como de espesor que varía en forma discontinua utilizando el criterio de optimización sugerido por Lord Rayleigh hace más de un siglo

ABSTRACT

Recent research performed by the authors on the determination of fundamental frequencies of vibrating orthotropic plates with one or two free edges is reviewed. The situation where the slab thickness varies in a discontinuous fashion is also studied. The eigenvalues are determined using the Rayleigh-Ritz method and "pseudo Fourier" expansion and good agreement with numerical values obtained by means of the Finite Elements method is shown to exist.

INTRODUCCIÓN

El problema que se estudia es el de una placa ortótropa rectangular con bordes libres y variación discontinua de espesor, vibrando en su modo fundamental.

La condición de borde libre presenta considerable dificultad para ser satisfecha exactamente cuando se busca una solución analítica. Además el hecho de considerara una variación discontinua de espesor amplía el interés del caso y también las dificultades analíticas.

Las experiencias numéricas que se reseñan [1-2] en este trabajo, se realizaron utilizando el método de Rayleigh-Ritz y "pseudo" expansiones de Fourier [3]. Se observa una buena coincidencia de valores con los valores calculados mediante el método de elementos finitos.

SOLUCIÓN ANALÍTICA

La respuesta de la placa vibrante fue aproximada con funciones coordenadas que satisfacen exactamente las condiciones esenciales y naturales en los bordes que no son libres:

* A. W. Leissa. 1973, Journal of Sound and Vibration. 31, pp 257-293. The Free Vibration of Rectangular Plates

$$W(x, y) \cong W_a(x, y) = \sum_{j=1}^N A_j \cdot X_j(x) \cdot Y_j(y) \quad (1)$$

Las funciones $X_j(x)$ e $Y_j(y)$ pueden contener parámetros de optimización para luego permitir la minimización del autovalor fundamental. En la metodología expuesta se plantea el incluir los parámetros de optimización en los argumentos de funciones trigonométricas.

La funcional que gobierna el problema es:

$$J(W) = \frac{1}{2} \iint [D_1 \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)^2 + 2 D_1 \mu_2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + D_2 \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right)^2 + 4 D_k \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)^2] dx dy - \frac{\rho \omega^2}{2} \iint h W^2 dx dy \quad (2)$$

Reemplazando (1) en (2), y minimizándola con respecto a los parámetros A_j se genera un sistema lineal de ecuaciones homogéneas. Con la condición de no trivialidad se plantea el determinante ecuación, que permite calcular los coeficientes de frecuencia fundamental:

$$\Omega_1 = \sqrt{\frac{\rho h_1}{D_1}} \omega_1 a^2$$

Las siguientes funciones coordenadas son las utilizadas para calcular los coeficientes Ω_1 :

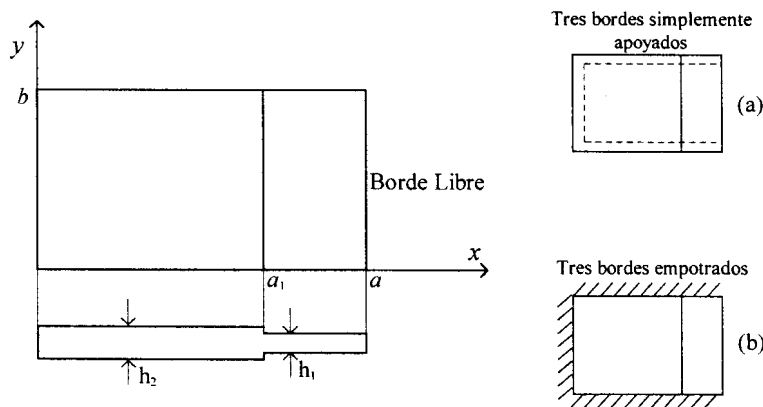


FIGURA 1. Placa ortótropa rectangular, con un borde libre y variación discontinua de espesor

• **Casos de placa con un borde libre.** (Figura 1).

- Tres bordes simplemente apoyados. (Figura 1a)

$$W(x, y) \cong W_a(x, y) = \sum_{j=1}^N A_j \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi x}{\gamma_j a} \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi y}{b} \quad (3)$$

con $\gamma_1 > 1$

- Tres bordes empotrados. (Figura 1b)

$$W(x, y) \cong W_a(x, y) = \sum_{j=1}^N A_j \cdot \operatorname{sen}^2 \frac{\pi x}{\gamma_j a} \cdot \left(\frac{y^2}{b^2} - 2 \frac{y^3}{b^3} + \frac{y^4}{b^4} \right) \quad (4)$$

con $\gamma_1 > 1$

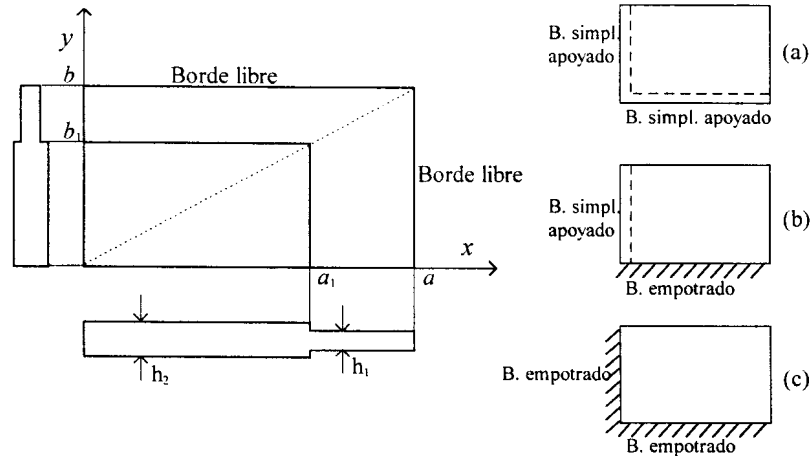


FIGURA 2. Placa ortótropa rectangular, con dos bordes libres adyacentes y $a_1/a = b_1/b$

• **Casos de placa con dos bordes libres adyacentes.** (Figura 2).

- Dos bordes simplemente apoyados. Figura 2(a).

$$W(x, y) \cong W_a(x, y) = \sum_{j=1,3,\dots}^N A_j \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi x}{\gamma_j a} \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi y}{\gamma_{j+1} b} \quad (5)$$

con $\gamma_1 > 1, \gamma_2 > 1$

- Un borde simplemente apoyado y un borde empotrado, Figura 2(b).

$$W(x, y) \cong W_a(x, y) = \sum_{j=1,3,\dots}^N A_j \cdot \text{sen} \frac{\pi x}{\gamma_j a} \cdot \text{sen}^2 \frac{\pi y}{\gamma_{j+1} b} \quad (6)$$

con $\gamma_1 > 1, \gamma_2 > 1$

- Dos bordes empotrados, Figura 2(c).

$$W(x, y) \cong W_a(x, y) = \sum_{j=1,3,\dots}^N A_j \cdot \text{sen}^2 \frac{\pi x}{\gamma_j a} \cdot \text{sen}^2 \frac{\pi y}{\gamma_{j+1} b} \quad (7)$$

con $\gamma_1 > 1, \gamma_2 > 1$

Se tiene por consiguiente, que:

$$\Omega_1 = \sqrt{\frac{\rho h_1}{D_1}} \omega_1 a^2 = \Omega_1(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \dots, \gamma_N)$$

y minimizando

$$\frac{\partial \Omega_1}{\partial \gamma_1} = \frac{\partial \Omega_1}{\partial \gamma_2} = \frac{\partial \Omega_1}{\partial \gamma_3} = \dots = \frac{\partial \Omega_1}{\partial \gamma_N} = 0$$

se obtiene el valor del coeficiente Ω_1 .

SOLUCIÓN UTILIZANDO ELEMENTOS FINITOS

Los resultados obtenidos con el método de los elementos finitos, fueron calculados utilizando un elemento de placa ortótropa que es una extensión [4] del conocido elemento isótropo de placa desarrollado por Borger y otros [5].

RESULTADOS NUMÉRICOS

Los valores numéricos que se presentan en las tablas corresponden a placas rectangulares ortótropas. Se consideraron constituidas de un hipotético material con características de ortotropía tal que: $\frac{D_2}{D_1} = \frac{1}{2}$; $\frac{D_k}{D_1} = \frac{1}{3}$ y $\mu_2 = 0.30$.

Los resultados reseñados en las tablas I y II corresponden a placas con un borde libre, indicadas en las figuras 1a y 1b, respectivamente. Los valores del coeficiente frecuencia fundamental $\Omega_1 = \sqrt{\frac{\rho h_1}{D_1}} \omega_1 a^2$ fueron obtenidos con los dos procedimientos: Elementos

Finitos (E. F.) y Rayleigh-Ritz. En el segundo procedimiento se usaron "pseudo" desarrollos de Fourier de tres términos ($N = 3$). De la comparación surge que la concordancia entre ambos es excelente.

Las tablas III y IV presentan coeficientes de frecuencia fundamental que corresponden a los casos de placas con dos bordes libres adyacentes, indicados en la figura 2.

La tabla III se refiere a placas de espesor uniforme, $\frac{h_2}{h_1} = 1$, la tabla IV a placas con variación discontinua de espesor, $\frac{h_2}{h_1} = \frac{2}{3}$.

Comparando los resultados obtenidos con uno y otro método, se observa que la mayor diferencia es del 2.1% y se produce para el caso de la placa cuadrada, con $a_1/a = b_1/b = 0.50$, sujeta a las condiciones de borde mostradas en la figura 2c (Tabla IV).

En resumen, la sencilla solución analítica que se ha planteado, demuestra ser conveniente para resolver casos de mediana complejidad elástico-dinámica tales como se han reseñado en este trabajo.

AGRADECIMIENTOS

El presente trabajo ha sido patrocinado por la Secretaría General de Ciencia y Tecnología de la Universidad Nacional del Sur (Director del Proyecto: Profesor Raúl E. Rossi) y la Comisión de Investigaciones Científicas de la Provincia de Buenos Aires.

REFERENCIAS

- [1] Laura, P. A. A., Bambill, D. V., Rossi, R. E., Rossit, C. A., *Vibrations of an Orthotropic Rectangular Plate with a free Edge in the Case of Discontinuously Varying Thickness*. Journal of Sound and Vibration, 1997. A ser publicado.
- [2] Bambill, D. V., Rossi, R. E.,] Laura, P. A. A., Rossit, C. A., *Vibrations of Orthotropic Rectangular Plate of Non Uniform Thickness and Two Adjacent Free Edges*. Journal of Sound and Vibration (Sometido a publicación).
- [3] Laura, P. A. A., Bambill, D. V., Jederlinic V. A., Rodríguez K., Díaz, P., *Rayleigh's Optimization Concept and the Use of Sinusoidal Coordinate Functions*. Journal of Sound and Vibration 200, 1997, págs. 557-561
- [4] Rossi, R. E., *A Note on a Finite Element for Vibrating Thin Orthotropic Rectangular Plates*. Journal of Sound and Vibration, 1997. A ser publicado.
- [5] Bogner, F. K., Fox, R. L., Schmit, L. A., *The Generation of Inter-Element Compatible Stiffness and Mass Matrices by the use of Interpolation Formulas*. Matrix Methods in Structural Mechanics AFFDL-TR-66-80, 1966, págs. 397-443.

TABLA I: Coeficientes de frecuencia fundamental $\Omega_1 = \sqrt{\frac{\rho h_1}{D_1}} \omega_1 a^2$, de la placa rectangular ortótropa indicada en la figura 1a

		$\frac{h_2}{h_1} = \frac{4}{5}$			$\frac{h_2}{h_1} = \frac{3}{5}$			Espesor uniforme
		$\frac{a_1}{a} = \frac{4}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$	
$\frac{a}{b} = 1$	E. F.	8.881	8.266	7.743	8.721	7.401	6.249	9.267
	Ec. (3)	8.884	8.288	7.765	8.725	7.427	6.272	9.270
$\frac{a}{b} = \frac{2}{5}$	E. F.	2.705	2.570	2.359	2.741	2.516	2.053	2.736
	Ec. (3)	2.706	2.572	2.361	2.741	2.520	2.057	2.736

TABLA II: Coeficientes de frecuencia fundamental $\Omega_1 = \sqrt{\frac{\rho h_1}{D_1}} \omega_1 a^2$, de la placa rectangular ortótropa indicada en la figura 1b

		$\frac{h_2}{h_1} = \frac{4}{5}$			$\frac{h_2}{h_1} = \frac{3}{5}$			Espesor uniforme
		$\frac{a_1}{a} = \frac{4}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$	
$\frac{a}{b} = 1$	E. F.	16.541	15.143	14.571	15.717	12.504	11.200	17.849
	Ec. (4)	16.632	15.230	14.667	15.806	12.618	11.336	17.963
$\frac{a}{b} = \frac{2}{5}$	E. F.	5.384	5.201	4.765	5.531	5.107	3.934	5.387
	Ec. (4)	5.413	5.229	4.819	5.562	5.204	4.093	5.419

TABLA III: Coeficientes de frecuencia fundamental $\Omega_1 = \sqrt{\frac{\rho h_1}{D_1}} \omega_1 a^2$, de placas rectangulares ortótropas de espesor uniforme, con dos bordes adyacentes libres, sujetos a las condiciones de borde indicadas en la figura 2.

$$\Omega_1 = \sqrt{\frac{\rho h_1}{D_1}} \omega_1 a^2; \text{ para } \frac{h_2}{h_1} = 1$$

Figura	Método	a/b=2/5	2/3	1	3/2	5/2
Fig.2(a)	3 term	1.2789	2.1667	3.2721	4.9032	8.0609
	Elementos Finitos	1.2752 (* =1425)	2.1525 (1025)	3.2546 (625)	4.8784 (1025)	8.0376 (1425)
	3 term	1.4911	2.7600	4.6245	8.1107	18.2694
Fig.2(b)	Elementos Finitos	1.4758 (* =1400)	2.7301 (1000)	4.5842 (600)	8.0504 (984)	18.1661 (1368)
	3 term	3.9301	4.7602	6.3602	9.6154	19.4125
	Elementos Finitos	3.8927 (* =1344)	4.7005 (960)	6.2653 (576)	9.4825 (960)	19.1855 (1344)

* Número de grados de libertad del modelo utilizado.

TABLA IV: Coeficientes de frecuencia fundamental $\Omega_1 = \sqrt{\frac{\rho h_1}{D_1}} \omega_1 a^2$, de placas rectangulares ortótropas con variación discontinua de espesor, con dos bordes adyacentes libres, sujetos a las condiciones de borde indicadas en la figura 2.

$$\Omega_1 = \sqrt{\frac{\rho h_1}{D_1}} \omega_1 a^2; \text{ para } \frac{h_2}{h_1} = \frac{2}{3}$$

$a_1/a = b_1/b$	Fig.	Método	$a/b = 1$	$a/b = 2/3$	$a/b = 2/5$
0.50	Fig.2(a)	3 term	2.8533	1.9028	1.1432
		Elementos Finitos	2.8388	1.8915	1.1320
	Fig.2(b)	3 term	3.6649	2.2447	1.2719
		Elementos Finitos	3.6063	2.2000	1.2350
	Fig.2(c)	3 term	4.6994	3.5310	2.8791
		Elementos Finitos	4.5965	3.4602	2.8307
0.75	Fig.2(a)	3 term	3.3174	2.2095	1.3180
		Elementos Finitos	3.3030	2.1972	1.3135
	Fig.2(b)	3 term	4.4582	2.7053	1.5087
		Elementos Finitos	4.4153	2.6727	1.4815
	Fig.2(c)	3 term	5.8251	4.3863	3.5695
		Elementos Finitos	5.7462	4.3330	3.5263