

Un Enfoque Unificado Para el Análisis de Consolidación en Medios Porosos Saturados.

Héctor A. Di Rado, Pablo A. Beneyto

Departamento de Mecánica Aplicada. Facultad de Ingeniería
Universidad Nacional del Nordeste. Las Heras 727, Resistencia, Chaco, Argentina.

Armando M. Awruch

Curso de Posgraduación en Ingeniería Civil
Universidade Federal Rio Grande do Sul, Porto Alegre, Brasil.

RESUMEN

Este trabajo presenta un modelo matemático bidimensional basado en la teoría de Biot (1955)^[3],^[4] que permite el análisis del equilibrio de las tensiones totales (Efectiva + Poros) y la compatibilidad de deformación durante el proceso de consolidación, acoplado los efectos de las tensiones con el flujo de agua. Se ha tenido en cuenta en el trabajo la no linealidad física del suelo a través de un modelo elastoplástico basado en la Teoría de Estados Críticos^[1] con algunas modificaciones^[6],^[16]. También se ha incorporado el efecto de la no linealidad geométrica. El problema es resuelto por el método de los elementos finitos con funciones de interpolación diferentes para los desplazamientos y para la presión de poros.

ABSTRACT

A bidimensional mathematical model based on Biot's theory (1955)^[3],^[4], which allows to analyze the total stress equilibrium (effective + pore) and the strain compatibility during the consolidation process by coupling the effects of stress and flow, is presented in this work. It is taken into account, physical non linear behavior of soils by means of an elastoplastic model based on the Critical State Theory^[1] with some modifications^[6],^[16]. It is also considered, geometric non linear effects. The Finite Element Method with different shape functions for displacements and pore pressure, is used to solve this problem.

INTRODUCCION

El problema de la consolidación presenta gran interés en las zonas donde el suelo es fundamentalmente arcilloso y de baja permeabilidad en general. Tal es el caso de la ciudad de Resistencia (CHACO-ARGENTINA) donde este tipo de suelo se encuentra generalmente creando grandes incertidumbres a la hora del proyecto de grandes fundaciones de tipo directo. También es bastante común encontrar, en la mencionada ciudad y área de influencia, altos índices de humedad (cercanos a la saturación) debido a la poca profundidad a la que se hallan las napas freáticas. Otro tipo de construcción muy difundido en la zona es la presa de tierra o de materiales sueltos. Esta, se usa fundamentalmente como elemento de contención de las aguas de los ríos Paraná y Negro habida cuenta que la situación geográfica de la ciudad propicia inundaciones en las épocas de lluvias intensas sobre la cuenca del Paraná.

El objetivo del presente trabajo, es poder representar en forma adecuada el estado tensión - deformación de una masa de suelo considerada saturada bajo las cargas transmitidas por una fundación directa, así como otros problemas geotécnicos típicos. El problema será resuelto por el método de los elementos finitos con funciones de interpolación de elementos de ocho nodos para los desplazamientos y cuatro para la presión de poros.

En cuanto al modelo elastoplástico para suelo, puede decirse que los últimos 25 años han presenciado la aparición de muchos de este tipo (un resumen es presentado por Viladkar et al.^[14]), generalmente restringidos a casos de endurecimiento isotrópico y plasticidad asociada, basados en la teoría de estados críticos. El uso de dicha teoría, con diversas modificaciones, ha mostrado adaptarse muy bien a casos reales (en zonas semejantes a la descripta al comienzo), según se puede percibir a partir de diversas experiencias. Este tipo de modelo fue el adoptado.

Es menester indicar que si bien se espera poder dar un amplio uso a la herramienta obtenida, se pretende extender el campo de aplicación del presente programa a casos donde la naturaleza bifásica (Suelo - Agua) sea insuficiente, incorporando al aire y constituyendo de ese modo un sistema no saturado de tipo trifásico.

FORMULACIÓN GENERAL DEL MODELO

En notación matricial, las ecuaciones constitutivas para un material elástico lineal pueden escribirse de la siguiente forma:

$$\underline{\sigma} = \left(2\mu \mathbf{I} + \lambda \mathbf{m} \mathbf{m}^T \right) \underline{\varepsilon} = \mathbf{D} \underline{\varepsilon} \quad (1)$$

donde $\underline{\sigma}$ y $\underline{\varepsilon}$ son las tensiones y deformaciones específicas y $\mathbf{m}^T = [1, 1, 1, 0, 0, 0]$. En la expresión anterior, μ y λ son los coeficientes de Lamé y cumplen las siguientes relaciones:

$$\mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)} ; \hat{\lambda} = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} ; \hat{K} = \hat{\lambda} + \frac{2}{3}\mu \quad (2)$$

donde E y G son los módulos de elasticidad longitudinal y transversal respectivamente ν es el coeficiente de Poisson y \hat{K} es el coeficiente de compresibilidad volumétrica o de "bulk".

Las tensiones en materiales geológicos, pueden ser descompuestas en efectivas y neutras o presión de los poros, de forma que se puede escribir que :

$$\underline{\sigma} = \underline{\sigma}' - m p - \underline{\sigma}^{Pr} \quad (3)$$

donde $\underline{\sigma}'$ contiene las tensiones efectivas y p es la presión de los poros y $\underline{\sigma}^{Pr}$ contienen las tensiones originadas por las deformaciones debida a la presión de poros. Aquí, p tiene signo (+) y $\underline{\sigma}$ tiene signo (-), si hay compresión.

En notación indicial, la expresión (3) puede ser escrita de la siguiente manera :

$$\sigma_{ij} = \sigma'_{ij} - p \delta_{ij} - \sigma_{ij}^{Pr} \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (4)$$

Las tensiones efectivas pueden escribirse de la siguiente forma:

$$\sigma'_{ij} = \left[G(\delta_{ii} \delta_{jj} + \delta_{ii} \delta_{jk}) + \lambda \delta_{ij} \delta_{kk} \right] \varepsilon_{kl} = D_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (i, j, k, l = 1, 2, 3) \quad (5)$$

donde δ_{ij} es el delta de Kroenecker., $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$ ($i, j = 1, 2, 3$) son las componentes de las

deformaciones específicas infinitesimales y u_i son las componentes de los desplazamientos

Las principales características de un medio poroso saturado es su naturaleza bifásica en la cual las partículas (sean ellas sueltas o cementadas) están rodeadas por un fluido que ejerce una presión sobre la fase sólida. Como se mencionara, es usual dividir la tasa de tensiones total en una tasa de tensión efectiva y una tasa de presión de poros, que puede ser escrita en forma similar a (2):

$$\dot{\underline{\sigma}} = \dot{\underline{\sigma}}' - m \dot{p} - \dot{\underline{\sigma}}^{Pr} \quad (6)$$

donde el punto de arriba de la letra significa derivación en relación al tiempo (tasa).

La tasa de tensión está relacionada con la tasa de deformaciones por medio de la expresión:

$$\dot{\underline{\sigma}}' = \mathbf{D} \left(\dot{\underline{\varepsilon}} - \dot{\underline{\varepsilon}}^{IN} \right) \text{ y } \dot{\underline{\sigma}}^{Pr} = \mathbf{D} \dot{\underline{\varepsilon}}^{Pr} \quad (7)$$

donde $\dot{\underline{\varepsilon}}^{IN}$ indica el vector de tasas de deformaciones específicas inelásticas (que pueden ser tratadas con una

formulación elastoplástica ó elasto - viscoplástica) y $\dot{\underline{\varepsilon}}^{Pr}$ es el vector de tasas de deformación provocada por la

presión de poros. La tasa de deformación específica $\dot{\underline{\varepsilon}}^{Pr}$ viene dada por:

$$\dot{\varepsilon}^{pr} = -m \frac{\dot{p}}{3k_s} \quad \text{ó} \quad \dot{\varepsilon}_{ij} = -\delta_{ij} \frac{\dot{p}}{3k_s} \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (8)$$

donde k_s es el modulo de compresibilidad de los granos del suelo.

Puede observarse que la presión hidrostática de los poros es responsable por una tasa de deformación volumétrica isotropica. Usando (6), (7) y (8), se puede escribir que:

$$\dot{\underline{\sigma}} = D \left(\dot{\underline{\varepsilon}} - \dot{\underline{\varepsilon}}^{IN} \right) - D \dot{\underline{\varepsilon}}^{pr} - m \dot{p} = \dot{\underline{\sigma}}' - \frac{1}{3} \left(m^T m - \frac{m^T D m}{3k_s} \right) m \dot{p} = \dot{\underline{\sigma}}' - \bar{\alpha} m \dot{p} \quad (9)$$

donde $\bar{\alpha}$ es la constante de Biot y viene dada por $\bar{\alpha} = 1 - \frac{m^T D m}{9k_s}$.

La expresión (9) representa la ecuación constitutiva correspondiente, recordando que para tasa de deformación y desplazamientos infinitesimales, se puede expresar la relación entre ambos de la siguiente forma (en notación indicial):

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (10)$$

donde u_i son las componentes de la tasa de desplazamiento y v_i son las componentes de la velocidad, ambas en las direcciones x_i ($i = 1, 2, 3$). Deben también ser satisfechas las ecuaciones de equilibrio correspondientes, que pueden escribirse de la siguiente forma:

$$\frac{\partial \dot{\sigma}_{ij}}{\partial x_j} + \dot{b}_i = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad \text{en } \Omega \quad (11)$$

donde \dot{b}_i son las tasas de las componentes de las fuerzas de volumen en las direcciones x_i ($i = 1, 2, 3$) y Ω es el dominio en estudio.

Acompañan a (11) la ecuación constitutiva (9) y las relaciones de deformaciones específicas - desplazamientos (10), junto a las condiciones de contorno correspondientes, que son:

$$a) \dot{u}_i = \dot{u}_i \quad (i = 1, 2, 3) \quad \text{en } \Gamma_v \quad b) \dot{\sigma}_{ij} n_j = \dot{t}_i \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad \text{en } \Gamma_\sigma \quad (12)$$

$$\text{y las condiciones iniciales } \dot{u}_i(\Omega, t = 0) = \dot{u}_i^0 \quad (i = 1, 2, 3) \quad \text{en } \Omega \quad (13)$$

El movimiento de un fluido en un medio poroso es gobernado por la ecuación de Darcy, que puede ser expresada de la siguiente forma

$$\underline{v} = -k \nabla(\gamma z + p) \quad (14)$$

donde \underline{v} es un vector que contiene las componentes de la velocidad del fluido, k es un tensor de segundo orden que contiene la permeabilidad del suelo en las diferentes direcciones, γ es el peso específico del agua, z es la altura geodésica en relación al sistema de referencia y ∇ es un vector que contiene las componentes del vector gradiente.

La ecuación de continuidad del fluido viene dada por:

$$\nabla^T \underline{v} - \dot{\chi} = 0 \quad (15)$$

donde $\dot{\chi}$ es la tasa de acumulación del fluido.

Los factores que tienen influencia sobre $\dot{\chi}$ son los siguientes:

a) La tasa de acumulación debido a la deformación específica volumétrica y que viene dada por

$$\dot{\chi}_1 = -\dot{\varepsilon}_{vol} = -m^T \dot{\varepsilon} \quad (16)$$

b) La tasa de acumulación debida a la variación de volumen de los granos del suelo producida por la variación de presión, y que viene dada por:

$$\dot{\chi}_2 = (1-n) \dot{\varepsilon}_{vol}^{pr} = -(1-n) \frac{\dot{p}}{k_s} \quad (17)$$

c) La tasa de acumulación debida a la compresibilidad del fluido, y que viene dado por:

$$\dot{\chi}_3 = -\frac{m}{k_f} \dot{p} \quad (18)$$

donde k_f es el modulo de compresibilidad del fluido.

d) La tasa de acumulación debida a la compresibilidad de los granos del suelo producida por las variaciones de $\dot{\sigma}' + \dot{\sigma}^{pr}$. La compresión hidrostática media actuando sobre el volumen $(1-n)$ del sólido viene dado por $m^T (\dot{\sigma}' + \dot{\sigma}^{pr})$, lo que resulta en una tasa de acumulación.

$$\dot{\chi}_4 = \frac{m^T (\dot{\sigma}' + \dot{\sigma}^{pr})}{3k_s} \quad (19)$$

Recordando la expresión (9), se tiene que

$$\dot{\chi}_4 = \frac{1}{3k_s} m^T D \left[\begin{pmatrix} \dot{\varepsilon} \\ \dot{\varepsilon} \\ \dot{\varepsilon} \end{pmatrix} + \frac{1}{3k_s} m \dot{p} \right] \quad (20)$$

Introduciendo (16), (17), (18) y (20) en (15), teniendo en cuenta la expresión (14), se obtiene la siguiente ecuación:

$$\left[\frac{1-n}{k_s} + \frac{n}{k_f} - \frac{1}{(3k_s)^2} (m^T D m) \right] \dot{p} - \nabla^T k \nabla p + \left(m^T - \frac{m^T D}{3k_s} \right) \dot{\varepsilon} = + \nabla^T k \nabla (\gamma * z) - \frac{m^T D \dot{\varepsilon}^{IN}}{3k_s} \quad (21)$$

Esta ecuación, que es válida en el dominio Ω , tiene como condiciones de contorno:

$$\text{a) } p = \bar{p} \text{ en } \Gamma_p \quad \text{b) } k \nabla p = v \text{ en } \Gamma_v \quad (22)$$

y condiciones iniciales del tipo

$$p(\Omega, 0) = p^0 \quad (23)$$

En definitiva, el sistema de ecuaciones formado por (11) y (21) es un sistema acoplado, con \dot{u} y p como incógnitas más el modelo constitutivo, descrito por (9).

Los problemas de mecánica de los suelos deben ser tratados en el campo de la plasticidad. El modelo de falla propuesto por Zienkiewicz et. al. ^[16] y adoptado para el presente trabajo es el siguiente :

$$F(p', q, \theta) = \frac{\bar{p}}{2} \left[\frac{1}{(\bar{p} \operatorname{tg} \phi)^2} q^2 + 1 \right] - p_{c_0} = 0 \quad (24)$$

donde $p' = J_1' / 3$ (presión media), $q = (3J_2')^{1/2}$, siendo J_1' y J_2' el primer y segundo invariante del tensor desviador efectivo. p_{c_0} es la mitad de la presión inicial de preconsolidación, $\bar{p} = p' + a$ y siendo

$a = c / \text{tg} \phi$ con c siendo es símbolo de cohesión y ϕ el ángulo de fricción interna del suelo. La evolución de la superficie de fluencia a través del parámetro p_{c_0} viene dado por:

$$p_{c_0} = p_{c_0}^0 e^{(\chi \varepsilon_{\text{vol}}^{\text{pl}})} \quad (25)$$

donde $\varepsilon_{\text{vol}}^{\text{pl}}$ es la deformación volumétrica plástica y χ es un coeficiente dado por

$$\chi = \beta \frac{1 + e_0}{\lambda - K} \quad (26)$$

En (26) e_0 es la relación de vacíos inicial, λ es la pendiente de la curva virgen del ensayo de consolidación. K la curva de expansión (determinados a través de ensayos odométricos) y β es un parámetro propuesto por los autores, que debe ser ajustado según ensayos de laboratorio^[6]. Aplicando logaritmos a ambos miembros de (25), diferenciando y expresando como incremento: puede obtenerse:

$$\Delta p_{c_0} = -p_{c_0}^0 \chi \Delta \varepsilon_{\text{vol}}^{\text{pl}} \quad (27)$$

El parámetro de endurecimiento A ^[13] viene dado por:

$$A = -\frac{1}{A} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial p_{c_0}} dp_{c_0} = \frac{p_{c_0}}{2} \chi \left\{ 1 - \left[\frac{q}{(p+a) \text{tg} \phi} \right]^2 \right\} \quad (28)$$

tomando valor nulo sobre la línea de estados críticos.

Detalles de la derivación del modelo, pueden verse en la ref.^[6].

APLICACIÓN DE ELEMENTOS FINITOS.

La aplicación del principio de los trabajos virtuales conduce a una expresión del tipo:

$$\int_{\Omega} \delta \underline{\varepsilon}^T \underline{\dot{\sigma}} d\Omega = \int_{\Omega} \delta \underline{u}^T \underline{\dot{b}} d\Omega + \int_{\Gamma_{\sigma}} \delta \underline{u}^T \underline{\dot{i}} d\Gamma \quad (29)$$

que es la condición necesaria y suficiente para que se satisfagan las expresiones (11) a (13).

Tomando (9) pero usando la relación constitutiva elastoplástica se tiene:

$$\underline{\dot{\sigma}} = \underline{D}^{\text{ep}} \underline{\dot{\varepsilon}} - \frac{1}{3} \left(\underline{m}^T \underline{m} - \frac{\underline{m}^T \underline{D} \underline{m}}{3k_s} \right) \underline{m} \dot{p} = \underline{\dot{\sigma}} - \underline{\dot{\alpha}} \dot{m} \quad (30)$$

Aplicando (30) en (29), se puede escribir que:

$$\int_{\Omega} \delta \underline{\varepsilon}^T \underline{D}_{\text{EP}} \underline{\dot{\varepsilon}} d\Omega - \int_{\Omega} \delta \underline{\varepsilon}^T \frac{1}{3} \left(\underline{m}^T \underline{m} - \frac{\underline{m}^T \underline{D} \underline{m}}{3k_s} \right) \underline{m} \dot{p} d\Omega = \int_{\Omega} \delta \underline{u}^T \underline{\dot{b}} d\Omega + \int_{\Gamma_{\sigma}} \delta \underline{u}^T \underline{\dot{i}} d\Gamma \quad (31)$$

En el contexto del método de los elementos finitos, las incógnitas del problema \underline{u} y p son interpolados en términos de los valores nodales de esas incógnitas, usando funciones de interpolación N^u y N^p respectivamente, con las primeras siendo bicuadráticas y las segundas bilineales, obteniéndose:

$$\begin{aligned} \underline{\dot{u}} &= N^u \underline{\dot{U}}^{(e)} ; \dot{p} = N^p \dot{p}^{(e)} ; \underline{\dot{\varepsilon}} = B^u \underline{\dot{U}}^{(e)} \\ \delta \underline{\dot{u}} &= \delta \underline{U}^{(e)T} N^{uT} ; \delta p = N^p \delta p ; \delta \underline{\dot{\varepsilon}}^T = \delta \underline{U}^{(e)T} B^{uT} \end{aligned} \quad (32)$$

donde B^u es la matriz que relaciona deformaciones específicas con desplazamientos y el subíndice (e) indica que la interpolación este siendo efectuado a nivel del elemento (e) .

Introduciendo (32) en (31) se obtiene, a nivel de elemento, la expresión matricial siguiente:

$$\underline{K}^{(e)} \underline{\dot{U}}^{(e)} - \underline{L}^{(e)} \dot{\underline{p}}^{(e)} = \dot{\underline{P}}^{(e)} \quad (33)$$

donde

$$\underline{K}^{(e)} = \int_{\Omega^{(e)}} \underline{B}^{uT} \underline{D}_{EP} \underline{B}^u d\Omega ; \underline{L}^{(e)} = \int_{\Omega^{(e)}} \underline{B}^{uT} \left(1 - \frac{m^T \underline{D} m}{9k_s} \right) m \underline{N}^p d\Omega \quad (34)$$

$$\dot{\underline{P}}^{(e)} = \int_{\Omega^{(e)}} \underline{N}^{uT} \dot{\underline{b}} d\Omega + \int_{\Gamma^{(e)}} \underline{N}^{uT} \dot{\underline{l}} d\Gamma$$

Siendo $\Omega^{(e)}$ es el dominio del elemento (e) y $\Gamma^{(e)}$ la parte del contorno del elemento (e) con la carga de superficie $\dot{\underline{l}}$. La aplicación del método de Galerkin a la expresión (21) con un factor de "peso" δp conduce a la siguiente ecuación integral:

$$\int_{\Omega^{(e)}} \delta p \underline{s}^p d\Omega + \int_{\Omega^{(e)}} \frac{\partial \delta p}{\partial x_i} k_{\sim i} \frac{\partial \dot{\underline{p}}}{\partial x_i} d\Omega + \int_{\Omega^{(e)}} \delta p \frac{1}{3} \left(m m^T - \frac{m^T \underline{D} m}{3k_s} \right) m^T \dot{\underline{\varepsilon}} d\Omega = \quad (35)$$

$$= - \int_{\Omega^{(e)}} \frac{\partial \delta p}{\partial x_i} k_{\sim i} \frac{\partial \gamma z}{\partial x_i} d\Omega - \int_{\Omega^{(e)}} \delta p \frac{m^T \underline{D} \dot{\underline{\varepsilon}}}{3k_s} d\Omega - \int_{\Gamma^{(e)}} \delta p \left[k_{\sim} \frac{\partial (p + \gamma z)}{\partial n} \right] d\Omega$$

Utilizando las mismas funciones de interpolación de la expresión (32), se obtiene la siguiente ecuación matricial:

$$\underline{S}^{(e)} \dot{\underline{p}}^{(e)} + \underline{L}^{(e)T} \underline{\dot{U}}^{(e)} + \underline{H}^{(e)} \dot{\underline{p}}^{(e)} = -\dot{\underline{P}}^{(e)} \quad (36)$$

donde

$$\underline{S}^{(e)} = \int_{\Omega^{(e)}} \underline{N}^p \underline{s}^p \underline{N}^p d\Omega ; \underline{H}_j^e = \int_{\Omega} \frac{\partial \underline{N}_i}{\partial x_l} k_{lm} \frac{\partial \underline{N}_j}{\partial x_m} d\Omega$$

$$\dot{\underline{P}}^{(e)} = \int_{\Omega^{(e)}} \frac{\partial \underline{N}^p}{\partial x_l} k_{lm} \frac{\partial \gamma z}{\partial x_m} d\Omega + \int_{\Omega^{(e)}} \underline{N}^p \frac{m^T \underline{D} \dot{\underline{\varepsilon}}}{3k_s} d\Omega + \int_{\Gamma^{(e)}} \underline{N}^p \dot{\underline{v}}_n d\Omega \quad (37)$$

siendo

$$s = \frac{1-n}{k_s} + \frac{n}{k_f} - \frac{1}{(3k_s)^2} m^T \underline{D} m \quad \text{y} \quad \dot{\underline{v}}_n = -k_n \frac{\partial (p + \gamma z)}{\partial n} ; \quad \dot{\underline{v}}_i \cdot n_i = \dot{\underline{v}}_n$$

Juntando (33) y (36) se tiene, a nivel de elemento, la siguiente expresión:

$$\begin{bmatrix} \underline{K}^{(e)} & -\underline{L}^{(e)} \\ \underline{L}^{(e)T} & \underline{S}^{(e)} - \underline{H}^{(e)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{\dot{U}}^{(e)} \\ \dot{\underline{p}}^{(e)} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \underline{H}^{(e)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{U}^{(e)} \\ \underline{p}^{(e)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{\underline{P}}^{(e)} \\ -\dot{\underline{P}}^{(e)} \end{Bmatrix} \quad (38)$$

Aplicando el método del parámetro α a (38) se obtiene la siguiente fórmula de recurrencia, a nivel de elemento

$$\begin{bmatrix} \underline{K}^{(e)} & -\underline{L}^{(e)} \\ \underline{L}^{(e)T} & \left(\underline{S}^{(e)} + \alpha \Delta t \underline{H}^{(e)} \right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{U}^{(e)} \\ \underline{p}^{(e)} \end{Bmatrix}_{t-\Delta t} = \begin{bmatrix} \underline{K}^{(e)} & -\underline{L}^{(e)} \\ \underline{L}^{(e)T} & \left(\underline{S}^{(e)} - (1-\alpha) \Delta t \underline{H}^{(e)} \right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{U}^{(e)} \\ \underline{p}^{(e)} \end{Bmatrix}_t + \quad (39)$$

$$+ \Delta t \begin{Bmatrix} \alpha \dot{\underline{P}}^{(e)} \\ \alpha (-\dot{\underline{P}}^{(e)}) + (1-\alpha) \dot{\underline{P}}^{(e)} \end{Bmatrix}_{t-\Delta t}$$

(con $0 \leq \alpha \leq 1$) que también puede ser expresada en forma incremental de la siguiente

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}^{(e)} & -\mathbf{L}^{(e)} \\ -\mathbf{L}^{(e)T} & -\left(\mathbf{S}^{(e)} + \alpha \Delta \mathbf{H}^{(e)}\right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{U}^{(e)} \\ \Delta \mathbf{p}^{(e)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\Delta \mathbf{H}^{(e)} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}^{(e)} \\ \mathbf{p}^{(e)} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{P}^{(e)} \\ \Delta \mathbf{P}^{(e)} \end{Bmatrix} \quad (40)$$

En la anterior, para eliminar la asimetría, cambiamos el signo de la última ecuación exceptuando $-\Delta \mathbf{H}^{(e)}$ porque el signo lo dará la incógnita del tiempo anterior.

Los valores para el tiempo siguiente, se obtienen

$$\mathbf{U}^{(e)}_{t+\Delta t} = \mathbf{U}^{(e)}_t + \Delta \mathbf{U}^{(e)} \quad \text{y} \quad \mathbf{p}^{(e)}_{t+\Delta t} = \mathbf{p}^{(e)}_t + \Delta \mathbf{p}^{(e)} \quad (41)$$

La expresión incremental (40) debe ser montada para todo el dominio en estudio y la correspondientes condiciones de contorno esenciales o forzadas deben ser incluidas, obteniéndose un sistema de ecuaciones algebraicas no lineal. Una vez resuelto el sistema se aplica la expresión (41) hasta la convergencia.

INTRODUCCIÓN DE LA NO LINEALIDAD GEOMÉTRICA

Cuando se considera desplazamientos finitos se tiene, además de la no linealidad física debida al comportamiento elasto-plástico del suelo, otra fuente de no linealidad, llamada de no linealidad geométrica. En estos casos es necesario usar un tensor de tasas de tensiones objetivo ó indiferente del sistema de referencia en las ecuaciones constitutivas. Aunque existan varias definiciones que dan una medida objetiva de las tasas de tensiones, en el presente trabajo se adoptará aquella dada por Jaumann^[1,2] y que puede escribirse de la siguiente forma:

$$\dot{\sigma}_{ij} = \dot{\sigma}_{ij} - \sigma_{ik} \dot{w}_{kj} - \sigma_{kj} \dot{w}_{ki} \quad (i, j, k = 1, 2, 3) \quad (42)$$

donde $\dot{\sigma}_{ij}$ son las componentes del tensor de tasa de tensiones de Cauchy y \dot{w}_{ij} son las componentes del tensor de tasas de rotación rígida ("spin tensor"). Las componentes del tensor de tasas de rotación y del tensor de deformaciones finitas, vienen dadas por:

$$\dot{w}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial_j \dot{v}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial_i \dot{v}_j}{\partial x_i} \right) \quad \text{y} \quad \dot{e}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial_i \dot{v}_j}{\partial x_j} + \frac{\partial_j \dot{v}_i}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial_k \dot{v}_k}{\partial x_i} \frac{\partial_k \dot{v}_k}{\partial x_j} = \dot{\varepsilon}_{ij} + \eta_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (43)$$

donde las coordenadas se refieren a la configuración actualizada y v es velocidad.

Durante el siguiente desarrollo, se considera siempre tensiones efectivas, por lo que se omite la comilla.

El principio de los trabajos virtuales para el estado en $t = t + \Delta t$, referido al estado en t , puede escribirse:

$$\int_{\Omega_t} \delta \Delta \varepsilon^T (\sigma + \Delta \sigma) d\Omega = \int_{\Omega_t} \delta \Delta u^T (b + \Delta b) d\Omega + \int_{\Gamma_T} \delta \Delta u^T (t + \Delta t) d\Gamma \quad (44)$$

donde σ es tensor de Cauchy en el tiempo t , $(\sigma + \Delta \sigma)$ caracteriza a las tensiones en $t + \Delta t$ (con $\Delta \sigma$ siendo el incremento del tensor de tasas de Jaumann), $b + \Delta b$ y $t + \Delta t$ son las cargas al tiempo $t + \Delta t$.

Considerando (43), se obtiene a partir de (44):

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_t} \delta \varepsilon^T \Delta \sigma d\Omega + \int_{\Omega_t} \delta \Delta \eta^T \sigma d\Omega + \int_{\Omega_t} \delta \eta^T \Delta \sigma d\Omega = \\ & = \int_{\Omega_t} \delta \Delta u^T b d\Omega + \int_{\Gamma_T} \delta \Delta u^T t d\Gamma - \int_{\Omega_t} \delta \varepsilon^T \sigma d\Omega \end{aligned} \quad (45)$$

Eliminando la tercera integral del miembro izquierdo de (45) por ser de orden superior y teniendo en cuenta que:

$$\Delta \underline{\sigma} = \underline{D}_{EP} \Delta \underline{\varepsilon} - \left(m - \frac{Dm}{3k_s} \right) \Delta p \quad (46)$$

donde fue usada la aproximación $\dot{\varepsilon} \cong \varepsilon$, se obtiene la siguiente expresión

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_i} \delta \underline{\varepsilon}^T \underline{D}_{EP} \Delta \underline{\varepsilon} d\Omega + - \int_{\Omega_i} \delta \underline{\varepsilon}^T \left(m - \frac{Dm}{3k_s} \right) \Delta p d\Omega + \int_{\Omega_i} \delta \Delta \eta^T \underline{\sigma}_t d\Omega = \\ & = \int_{\Omega_i} \delta \Delta \underline{u}^T \underline{b}_{t+\Delta t} d\Omega + \int_{\Gamma_i} \delta \Delta \underline{u}^T \underline{t}_{t+\Delta t} d\Gamma - \int_{\Omega_i} \delta \underline{\varepsilon}^T \underline{\sigma}_t d\Omega \end{aligned} \quad (47)$$

siendo la anterior semejante a la expresión (31) pero tomada en forma incremental con el agregado del término de fuerzas descompensadas (último del miembro derecho). En forma matricial:

$$\left(\underline{K}^{(e)} + \underline{K}_G^{(e)} \right) \Delta \underline{U}^{(e)} - \underline{L}^{(e)} \Delta p^{(e)} = \Delta \underline{P}^{(e)} \quad (48)$$

La expresión (48) es semejante a (33), pero en forma incremental y con el agregado de la matriz geométrica:

$$\underline{K}_G^{(e)} = \int_{\Omega} \underline{B}^T \underline{\bar{\sigma}} \underline{B} d\Omega \quad (49)$$

Donde \underline{B}_G es derivada de las funciones de interpolación de desplazamientos y $\underline{\bar{\sigma}}_t$ es tensor de Cauchy en la configuración t . Cabe aclarar, que la ecuación de flujo no sufre alteraciones por el agregado de la no linealidad geométrica.

Las tensiones de Cauchy en cada punto de integración en $t+\Delta t$, pueden obtenerse:

$$\underline{\sigma}_{t+\Delta t} = \underline{\sigma}_t + \left(\underline{D}^* \Delta \underline{\varepsilon} + \Delta \underline{\omega}^T * \underline{\sigma}_t + \Delta \underline{\omega} * \underline{\sigma}_t^T \right)_t \quad (50)$$

En la expresión (50), $(\underline{\sigma}_t + \Delta \underline{\sigma})$ fue transformado en $(\underline{\sigma}_t + \Delta \underline{\sigma})$, y las tensiones así obtenidas se usarán en el próximo paso.

EJEMPLO DE APLICACIÓN

Se analiza el comportamiento de una zapata corrida de $a=6\text{m}$ de ancho cuyas características geométricas y discretización espacial se muestran a continuación en la figura 1. Los datos son los siguientes:

$$\begin{aligned} \lambda &= 0.174; \quad K = 0.08; \quad \phi = 0.1745; \quad e_0 = 1.08; \quad \mu = 1.08; \quad E = 1248 \text{Kpa}; \quad c = 8 \text{Kpa}; \quad \chi c = 20; \quad P_{co} = 40 \text{Kpa} \\ k_X &= k_Y = 0.01 \text{m/día}; \quad k_S = 300000 \text{Kpa}; \quad k_F = 600000 \text{Kpa}; \quad \Delta t = 0.01 \text{días} \end{aligned}$$

Es menester indicar que los datos fueron elegidos de modo que no hubiera ablandamiento y aunque el valor máximo de la carga fue fijado en 150 KN, el mismo no fue alcanzado.

La trayectoria de tensiones y los desplazamientos, corresponden al elemento marcado con A en la figura 1.

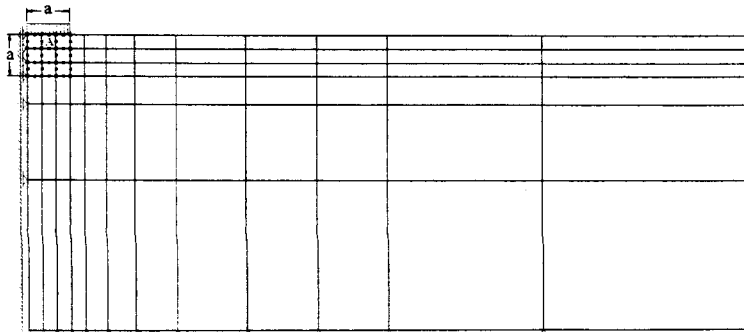


Fig. 1 Zapata corrida. Características geométricas y discretización espacial.

REFERENCIAS

- [1] ATKINSON J.H. and BRANSBY P.L., The mechanics of soils. An introduction to critical state soil mechanics. University Series in Civil Engineering, Mc. Graw. Hill (1978)
- [2] BATHE, K. J and CIMENTO, A. P. Some Practical Procedures for the solution of Nonlinear Finite Element Equations. *Comp. Meth. in Appl. Mech. and Engng.* V22, pp 59-85 (1984).
- [3] BIOT, M. A. General theory of three - dimensional consolidation. *J. of Applied Physics*, V. 12, pp 155 - 164 (1941).
- [4] BIOT, M. A. Theory of deformation of a porous viscoelastic anisotropic solid. *J. of Applied Physics*, V. 27, pp 459 - 467 (1956).
- [5] CARTER,P; BOOKER, J.R. and SMALL, J.C. The analysis of finite elasto-plastic consolidation. *Int. J. Num. Analyt. Meth. in Geomech*, V.3, pp 107-129 (1979).
- [6] DI RADO H.A. & AWRUCH, A.M. Un modelo elastoplástico con grandes deformaciones para suelos cohesivos basado en la teoría de los estados críticos. COPAINGE. Tomo 1. Pg.37 a 47. (1997)
- [7] GOLUB, G. H. and VAN LOAN, C. F. *Matrix Computatirs*, Jonhns Hopkins University Press, Baltimore (1984).
- [8] HILL, R. *The Mathematical Theory of Plasticity*. Oxford University Pren. UK, 1950.
- [9] KIM, C. S.; LEE, T. S.; ADVANI, S. H. and LEE, J. H. Hygro thermomechanical evaluation of porous media under finite deformation; Part II; Model validation and field simulation. *Int. J. for Numer Meth in Engng.*, V.36, pp 161- 179 (1993).
- [10] LEWIS, R. W. and SCHREFLER, B. A. *The Finite Element Method in the Deformation and Consolidation of Porous Media*. J. Wiley & Sons, N. Y, 1987.
- [11] MALVERN, L. E. *Introducction to the Mechanics of a Continuum Medium*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, nj (1969).
- [12] NAYAK, G. C. and ZIENKIEWICZ, O. C. Elastic - Plastic stress analysis. A generation of various constitutive relations including strain softening. *Int. J. for Numer Meth in Engng.*, V.5, pp 113- 135 (1972).
- [13] OWEN, D. R. J. and HINTON, E. *Finite Elements in Plasticity; Theory and Practice*. Pineridge Press Limited, Swansea, U. K, 1980.
- [14] VILADKAR, M. N.; NOORZAET, J. and GODBOLE, P. N. Convenient forms of yield criteria in elasto-plastic analysis of geological materials *Comp. & Structures*, V.54, pp 327- 337 (1995).
- [15] ZIENKIEWICZ, C. C.; HUMPHESON, C. and LEWIS, R. W. A unified approach to soil mechanics problems (including plasticity and visco-plasticity). In: *Finite Elements in Geomechanics* (Ed. by Gudehus), pp 151-177 J. Wiley & Sans, London (1977).
- [16] ZIENKIEWICZ, O. C.; HUMPHESON, C. and LEWIS, R. W. Associated and non-associated visco-plasticity and plasticity in soil mechanics. *Geotechnique*, V.25, pp 671-689 (1975).

REFERENCIAS

- [1] ATKINSON J.H. and BRANSBY P.L., The mechanics of soils. An introduction to critical state soil mechanics. University Series in Civil Engineering, Mc. Graw. Hill (1978)
- [2] BATHE, K. J and CIMENTO, A. P. Some Practical Procedures for the solution of Nonlinear Finite Element Equations. *Comp. Meth. in Appl. Mech. and Engng.* V22, pp 59-85 (1984).
- [3] BIOT, M. A. General theory of three - dimensional consolidation. *J. of Applied Physics*, V. 12, pp 155 - 164 (1941).
- [4] BIOT, M. A. Theory of deformation of a porous viscoelastic anisotropic solid. *J. of Applied Physics*, V. 27, pp 459 - 467 (1956).
- [5] CARTER,P; BOOKER, J.R. and SMALL, J.C. The analysis of finite elasto-plastic consolidation. *Int. J. Num. Analyt. Meth. in Geomech*, V.3, pp 107-129 (1979).
- [6] DI RADO H.A. & AWRUCH, A.M. Un modelo elastoplástico con grandes deformaciones para suelos cohesivos basado en la teoría de los estados críticos. COPAINGE. Tomo 1. Pg.37 a 47. (1997)
- [7] GOLUB, G. H. and VAN LOAN, C. F. *Matrix Computatirs*, Jonhns Hopkins University Press, Baltimore (1984).
- [8] HILL, R. *The Mathematical Theory of Plasticity*. Oxford University Pren. UK, 1950.
- [9] KIM, C. S.; LEE, T. S.; ADVANI, S. H. and LEE, J. H. Hygro thermomechanical evaluation of porous media under finite deformation; Part II; Model validation and field simulation. *Int. J. for Numer Meth in Engng.*, V.36, pp 161- 179 (1993).
- [10] LEWIS, R. W. and SCHREFLER, B. A. *The Finite Element Method in the Deformation and Consolidation of Porous Media*. J. Wiley & Sons, N. Y, 1987.
- [11] MALVERN, L. E. *Introduccion to the Mechanics of a Continuum Medium*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, nj (1969).
- [12] NAYAK, G. C. and ZIENKIEWICZ, O. C. Elastic - Plastic stress analysis. A generation of various constitutive relations including strain softening. *Int. J. for Numer Meth in Engng.*, V.5, pp 113- 135 (1972).
- [13] OWEN, D. R. J. and HINTON, E. *Finite Elements in Plasticity; Theory and Practice*. Pineridge Press Limited, Swansea, U. K, 1980.
- [14] VILADKAR, M. N.; NOORZAET, J. and GODBOLE, P. N. Convenient forms of yield criteria in elasto-plastic analysis of geological materials *Comp. & Structures*, V.54, pp 327- 337 (1995).
- [15] ZIENKIEWICZ, C. C.; HUMPHESON, C. and LEWIS, R. W. A unified approach to soil mechanics problems (including plasticity and visco-plasticity). In: *Finite Elements in Geomechanics* (Ed. by Gudehus), pp 151-177 J. Wiley & Sans, London (1977).
- [16] ZIENKIEWICZ, O. C.; HUMPHESON, C. and LEWIS, R. W. Associated and non-associated visco-plasticity and plasticity in soil mechanics. *Geotechnique*, V.25, pp 671-689 (1975).