

MODELO DE ELEMENTOS FINITOS PARA FLUJO EN SISTEMAS MULTI-ACUÍFEROS

Rodrigo PAZ, Mario STORTI, Sergio IDELSOHN

CIMEC - Centro Internacional de Métodos Computacionales en Ingeniería

INTEC-CONICET-UNL

Güemes 3450.

3000 Santa Fe.

Argentina.

Te: (+54)-342-4559174

e-mail: rodrigop@intec.unl.edu.ar

ABSTRACT

This work presents a finite element model of subsurface flow in multiaquifer systems. This is an Advection-Diffusion model where the aquifers are connected to their neighbours along a common border. The model neglects the vertical flow in aquifers and horizontal flow in aquitards. An Object-Oriented Finite Element Method program was written to run on a Linux platform. We compare the FEM solution with well known THEIS [4] solution and Neumann & Whitherspoon solution [1].

RESUMEN

En este trabajo se presenta un modelo de elementos finitos para el análisis de flujo subterráneo en sistemas multi-acuíferos. Éste es un modelo de Advección-Difusión donde cada acuífero es conectado con sus vecinos mediante una frontera común. El modelo despreja el flujo vertical en los acuíferos y el flujo horizontal en los acuitardos. Se utiliza para la simulación el programa de elementos finitos orientado a objetos corriendo bajo el sistema operativo Linux. Se comparan las soluciones obtenidas mediante el modelo propuesto y las soluciones de THEIS [4]; y Neumann & Whitherspoon [1].

NOTACIÓN

a : parámetro de la transformada de Hankel;
 b_i : espesor del i -ésimo acuífero;
 b'_j : espesor del j -ésimo acuitardo;
 $J_0(x)$: función de Bessel de primer tipo de orden cero;
 K_i : permeabilidad del i -ésimo acuífero;
 K'_j : permeabilidad del j -ésimo acuitardo;
 Q_i : tasa de extracción de agua del i -ésimo acuífero;
 r : distancia radial desde el orificio de extracción de agua;
 $r/B_{11} \cdot r \sqrt{K'_j/K_i b_i b'_j}$ parámetro adimensional;
 S_{s_i} : capacidad de almacenamiento específico del i -ésimo acuífero;
 S'_{s_j} : capacidad de almacenamiento específico del j -ésimo acuitardo;
 s_i : altura hidráulica del i -ésimo acuífero;
 s'_j : altura hidráulica del j -ésimo acuitardo;
 s_D : altura hidráulica adimensional;
 T_i : trasmisibilidad del i -ésimo acuífero;
 t : tiempo de extracción de agua;

$t_{D_i}: K_i t / S_{s_i} r^2$, tiempo adimensional de extracción para el i -ésimo acuífero;
 t_{D_j} : tiempo adimensional para el j -ésimo acuífero;
 z : distancia vertical medida desde la parte superior del acuífero al cual se le extrae agua;
 $\alpha_i: K_i / S_{s_i}$;
 $\alpha_j: K_j / S_{s_j}$;
 $\beta_{ij}: r / 4b_i \sqrt{K_j' S_{s_j}' / K_j S_{s_i}}$, parámetro adimensional.

INTRODUCCIÓN

Cuando se trata el flujo subterráneo de agua no estacionario, la aproximación tradicional de Theis [1935] para acuíferos confinados con extracción de agua a régimen constante es aplicable. Sin embargo, el acuífero al cual se le está extrayendo agua (acuífero bombeado, "pumped aquifer") es parte de un sistema múltiple de acuíferos más complejo (i.e. una serie de acuíferos separados entre sí por una capa confinante de relativa baja permeabilidad). Cuando el flujo de agua a través de estas capas confinantes es suficiente para ser detectado por la observación de la altura hidráulica en el acuífero bombeado, las capas confinantes son llamadas "acuitardos" y se dice que el acuífero es permeable ("leaky"). Cuando el flujo no puede ser detectado en el acuífero, las capas confinantes son llamadas "acuicludios" y se dice que el acuífero es debilmente permeable. Como un primer paso hacia el análisis del problema de flujo subterráneo presentaremos una aproximación analítica al flujo transiente en un sistema de dos acuíferos confinados [1]. Asumimos que en los acuitardos (o acuicludios) el flujo es en la dirección vertical y en los acuíferos es horizontal. La validez de esta hipótesis ha sido ampliamente investigada desde los trabajos de Javandel & Whitherspoon [1968, 1969]. Cuando la permeabilidad de los acuíferos es más grande que la de los acuitardos en dos o más órdenes de magnitud, los errores introducidos son del orden del 5%.

ECUACIONES DE GOBIERNO

Consideremos un sistema de dos acuíferos confinados por un acuitardo como se puede ver en la Figura 1. Se extrae agua desde el acuífero más profundo por una perforación de radio infinitesimal con régimen de descarga constante Q_1 . Cada capa es homogénea, isotrópica, horizontal y de una extensión radial infinita. Consideramos al sistema saturado para todo t y aplicamos la ley de Darcy. Como mencionamos al principio se considera flujo vertical en los acuitardos y horizontal en los acuíferos. Una aparente implicancia de esta hipótesis es que el espesor del acuífero al cual no se le extrae agua (acuífero no bombeado, "npumped aquifer") debe ser tal que la altura hidráulica se mantenga constante a través del tiempo (principio análogo al del enfriamiento de una aleta de refrigeración [Carslaw and Jaeger, 1959]). Sobre el acuífero bombeado no es necesaria una restricción de este tipo, debido a que los gradientes radiales inducidos por la extracción de agua son mucho más grandes que los gradientes verticales en esa capa causado por el flujo proveniente del acuitardo.

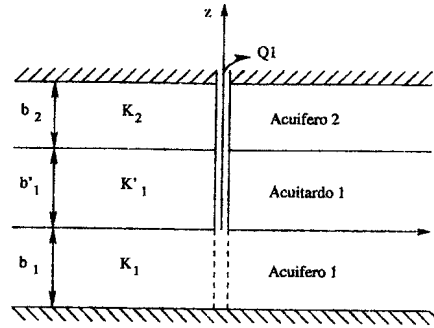


Figura 1: Diagrama esquemático de un sistema de dos acuíferos confinados.

La formulación del problema es:
para el acuífero 1:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 s_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial s_1}{\partial r} + \frac{K'_1}{T_1} \frac{\partial s'_1}{\partial z} \Big|_{z=0} &= \frac{1}{\alpha_1} \frac{\partial s_1}{\partial t} \\ s_1(r, 0) &= 0 \\ s_1(\infty, t) &= 0 \\ \lim_{r \rightarrow 0} r \frac{\partial s_1}{\partial r} &= -\frac{Q_1}{2\pi T_1} \end{aligned} \quad (1)$$

para el acuitardo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 s'_1}{\partial r^2} &= \frac{1}{\alpha'_1} \frac{\partial s'_1}{\partial t} \\ s'_1(r, z, 0) &= 0 \\ s'_1(r, 0, t) &= s_1(r, t) \\ s'_1(r, b'_1, t) &= s_2(r, t) \end{aligned} \quad (2)$$

para el acuífero 2:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 s_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial s_2}{\partial r} + \frac{K'_1}{T_2} \frac{\partial s'_2}{\partial z} \Big|_{z=b'_1} &= \frac{1}{\alpha_2} \frac{\partial s_2}{\partial t} \\ s_2(r, 0) &= 0 \\ s_2(\infty, t) &= 0 \\ \lim_{r \rightarrow 0} r \frac{\partial s_2}{\partial r} &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

Aplicando la transformada de Laplace y Hankel a las ecuaciones 1,2 y 3 obtenemos la solución completa en forma de tres ecuaciones ([1]). Los resultados pueden ser expresados en términos de 5 parámetros adimensionales: (a) β_{11} y r/B_{11} con referencia al acuífero bombeado, (b) β_{21} y r/B_{21} con referencia al acuífero no bombeado, y (c) t_{D1} el tiempo adimensional.

En el acuífero 1:

$$s_1(r, t) = \frac{Q_1}{4\pi T_1} \int_0^\infty (1 - e^{-y^2 t_{D1}}) \cdot \{ [1 + G(y)] J_0[\omega_1(y)] + [1 - G(y)] J_0[\omega_2(y)] \} \frac{dy}{y} \quad (4)$$

en el acuitardo:

$$s'_1(r, z, t) = \frac{Q_1}{2\pi^2 T_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi z}{b_1} \cdot \int_0^{\infty} \left[1 - e^{-n^2 \pi^2 \bar{t}_{D1}} + \frac{e^{-n^2 \pi^2 \bar{t}_{D1}} - e^{-y^2 \bar{t}_{D1}}}{1 - y^2 / (n^2 \pi^2)} \right] \left\{ \left[\frac{2(r/B_{21})^2 (-1)^n y}{F(y) \sin(y)} - G(y) - 1 \right] J_0[\omega_1(y)] - \left[\frac{2(r/B_{21})^2 (-1)^n y}{F(y) \sin(y)} - G(y) + 1 \right] J_0[\omega_2(y)] \right\} \frac{dy}{y} \quad (5)$$

en el acuífero 2:

$$s_2(r, t) = \frac{Q_1}{4\pi T_1} \int_0^{\infty} (1 - e^{-y^2 \bar{t}_{D1}}) \frac{2(r/B_{21})^2}{F(y)} \{J_0[\omega_1(y)] - J_0[\omega_2(y)]\} \frac{dy}{\sin(y)} \quad (6)$$

donde

$$\bar{t}_{D1} = t_{D1} (r/B_{11})^4 / (4\beta_{11})^2 \quad (7)$$

$$G(y) = M(y)/F(y) \quad (8)$$

$$\omega_1^2(y) = \frac{1}{2} [N(y) + F(y)] \quad (9)$$

$$\omega_2^2(y) = \frac{1}{2} [N(y) - F(y)] \quad (10)$$

$$F^2(y) = M^2(y) + \left[\frac{2(r/B_{11})(r/B_{21})y}{\sin(y)} \right]^2 \quad (11)$$

$$M(y) = \left[\frac{(r/B_{11})^4}{4\beta_{11}} - \frac{(r/B_{21})^4}{4\beta_{21}} y^2 \right] - \left[(r/B_{11}) - (r/B_{21}) \right] y \cot g(y) \quad (12)$$

$$N(y) = \left[\frac{(r/B_{11})^4}{4\beta_{11}} + \frac{(r/B_{21})^4}{4\beta_{21}} y^2 \right] - \left[(r/B_{11}) + (r/B_{21}) y \cot g(y) \right] \quad (13)$$

donde, $J_0[\omega_1(y)]$ debe ser cero cuando $\omega_1^2(y) < 0$, y lo mismo es válido para $J_0[\omega_2(y)]$ cuando $\omega_2^2(y) < 0$.

SOLUCIÓN PARA EL CASO EN QUE LOS ACUÍFEROS TIENEN PROPIEDADES IDÉNTICAS

En el caso especial donde las propiedades hidráulicas de los acuíferos son idénticas, tenemos que $r/B_{11} = r/B_{21}$ y $\beta_{11} = \beta_{21}$; y que $G(y) = M(y) = 0$, y las ecuaciones 4,5 y 6 pueden ser simplificadas quedando:

$$s_1(r, t) = \frac{Q_1}{4\pi T_1} \int_0^{\infty} (1 - e^{-y^2 \bar{t}_{D1}}) \{J_0[\omega_1(y)] + J_0[\omega_2(y)]\} \frac{dy}{y} \quad (14)$$

$$s'_1(r, z, t) = \frac{Q_1}{2\pi^2 T_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi z}{b_1} \int_0^{\infty} \left[1 - e^{-n^2 \pi^2 \bar{t}_{D1}} + \frac{e^{-n^2 \pi^2 \bar{t}_{D1}} - e^{-y^2 \bar{t}_{D1}}}{1 - y^2 / (n^2 \pi^2)} \right] \cdot \{ [(-1)^n - 1] J_0[\omega_1(y)] - [(-1)^n + 1] J_0[\omega_2(y)] \} \frac{dy}{y} \quad (15)$$

$$s_2(r, t) = \frac{Q_1}{4\pi T_1} \int_0^{\infty} (1 - e^{-y^2 \bar{t}_{D1}}) \{J_0[\omega_1(y)] + J_0[\omega_2(y)]\} \frac{dy}{y} \quad (16)$$

donde

$$F(y) = \frac{2(\tau/B_{11})^2 y}{\sin(y)} \quad (17)$$

$$N(y) = \left[\frac{2(\tau/B_{11})^4}{(4\beta_{21})^2} \right] y^2 - 2(\tau/B_{11})^2 + y \cot(y) \quad (18)$$

y como dijimos previamente las funciones de Bessel deben ser anuladas cuando el cuadrado de sus argumentos es negativo.

REDUCCIÓN A LA SOLUCIÓN DE THEIS

Si la permeabilidad del acuitardo es nula ($K'_1 = 0$), la ecuación 4 se reduce a la solución de Theis. Si definimos una nueva variable

$$x = \frac{(\tau/B_{11})^2}{(4\beta_{11})} y \quad (19)$$

y sustituimos en (4), (7) y (13); y haciendo $K'_1 \rightarrow 0$. La ecuación 4 queda

$$s_1(r, t) = \frac{Q_1}{2\pi T_1} \int_0^\infty (1 - e^{-x^2 t_{D_1}}) J_0(x) \frac{dx}{x} \quad (20)$$

donde $t_{D_1} = \alpha_1 t / r^2$. Sabemos que:

$$\int_0^\infty e^{-ax^2} J_0(x) \frac{dx}{x} = \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-y} \frac{dy}{y} \quad (21)$$

donde la parte real de a es no negativa. Combinando con (20) tenemos:

$$s_1(r, t) = \frac{Q_1}{4\pi T_1} \int_{1/4t_{D_1}}^\infty e^{-y} \frac{dy}{y} \quad (22)$$

que es la solución de Theis.

SOLUCIÓN ASINTÓTICA PARA PEQUEÑOS VALORES DE TIEMPO

La solución de Hantush[5] para un acuífero bombeado para pequeños valores de tiempo es:

$$s_1(r, t) = \frac{Q_1}{4\pi T_1} \int_{1/4t_{D_1}}^\infty e^{-y} \cdot \operatorname{erfc} \left[\frac{\beta_{11}}{\sqrt{y(4t_{D_1} y - 1)}} \right] \frac{dy}{y} \quad (23)$$

donde

$$t_{D_1} \leq \frac{1.6\beta_{11}^2}{(\tau/B_{11})^4} \quad (24)$$

y la correspondiente solución para el acuitardo:

$$s_1(r, t) = \frac{Q_1}{4\pi T_1} \int_{1/4t_{D_1}}^\infty e^{-y} \left\{ \operatorname{erfc} \left[\frac{\beta_{11} + y(2 - z/b'_1)4\beta_{11}/(\tau/B_{11})^2}{\sqrt{y(4t_{D_1} y - 1)}} \right] - \operatorname{erfc} \left[\frac{\beta_{11} + y(z/b'_1)4\beta_{11}/(\tau/B_{11})^2}{\sqrt{y(4t_{D_1} y - 1)}} \right] \right\} \frac{dy}{y} \quad (25)$$

MODELO DE ELEMENTOS FINITOS

Para construir un modelo de elementos finitos del problema de flujo subterráneo (ecuaciones 1 a 3), la región de la Figura 1 es dividida en las distintas capas a modelar. Se utiliza una malla de elementos hexaedros de advección-difusión, refinada donde se observan los mayores gradientes de flujo ($r \rightarrow 0$). Las tres capas son uniformes, isotrópicas, de extensión infinita en el sentido del radio y debido a que es flujo axisimétrico, el ángulo de abertura de la región a modelar es de 2° . En $t = 0$ se comienza a extraer agua en el acuífero inferior con una tasa de extracción constante Q_1 . Los parámetros hidráulicos del sistema son elegidos de manera de poder compararlos con los resultados de Theis [4] y Neuman & Whitherspoon [1]. Los acuíferos tienen idéntica transmisividad y capacidad de almacenamiento dado en un sistema de unidades consistentes $T = S = 10^{-4}$. Las propiedades hidráulicas del acuitardo, en el mismo sistema de unidades son: $K = 10^{-8}$ y $S_s = 1.6 \cdot 10^{-4}$. El espesor del acuitardo es 10. El radio del sistema de acuíferos es $r = 1 \cdot 10^4$. La tasa de extracción de agua es $Q = 4\pi T = 4\pi 10^{-4}$, y es modelada mediante el uso de elementos superficiales de flujo. Los parámetros adimensionales β y r/B son manipulados de manera de conocer la evolución del estado del sistema para distintos radios y distintas propiedades hidráulicas de los acuíferos y acuitardos.

La malla utilizada tiene 30000 elementos y 62062 nodos. Una malla similar con menos elementos que la utilizada para el cálculo puede verse en la Figura 2.



Figura 2: Malla 3-D refinada utilizada en el modelo.

El problema fue corrido en una PC con un procesador Intel PIII 800 Mhz con sistema operativo Linux. Se utilizó un programa orientado a objetos, PETSc-FEM (<http://minerva.arcricle.edu.ar/~mstorti/soft.html>). Para el avance en el tiempo se usa un esquema implícito ([3]). El sistema se resuelve con un método directo de descomposición LU.

La Figura 3 compara los resultados obtenidos con el modelo de advección-difusión con la solución analítica de Theis para el caso de un acuífero confinado. Las Figuras 4 y 5 compara las soluciones de elementos finitos con la de Theis y la solución asintótica de Neumann & Whitherspoon para distintos valores de β y r/B , para el caso de un sistema de dos acuíferos y un acuitardo.

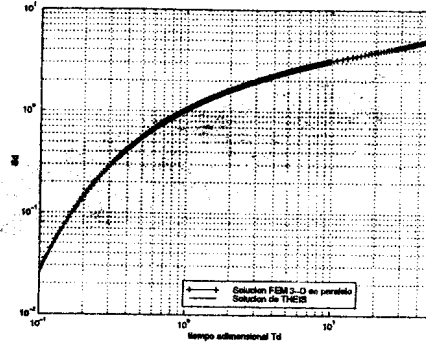


Figura 3: Comparación de resultados entre MEF y la solución de Theis ($\beta = r/B = 0.01$).

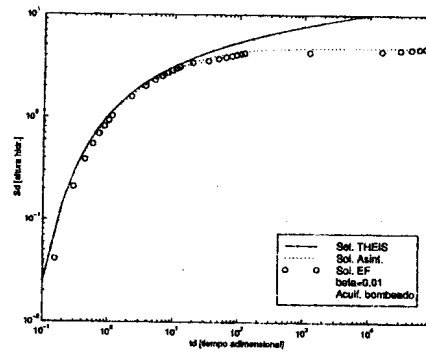


Figura 4: Solución MEF, Theis y Asintótica ($\beta = r/B = 0.01$).

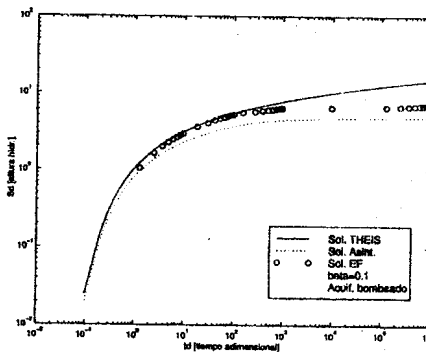


Figura 5: Solución MEF, Theis y Asintótica ($\beta = r/B = 0.1$).

La figura 6 muestra el estado del sistema (altura hidráulica) en el caso en que el radio es $r = 100$ y $t = 1 \cdot 10^5$ segundos.

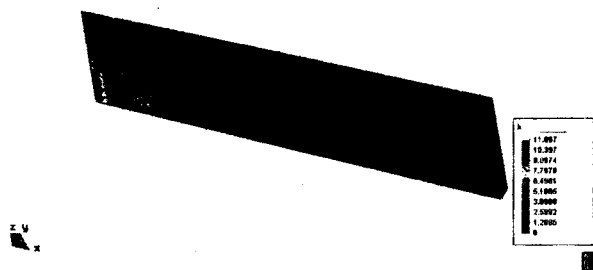


Figura 6: Estado del sistema, $r = 100$, $t = 1 \cdot 10^5 \text{ seg.}$

CONCLUSIONES

Para el problema de un solo acuífero confinado y bombeado vemos como la solución calculada con el método de elementos finitos se ajusta a la solución clásica propuesta en el trabajo de Theis de 1935.

Para el problema de un sistema de dos acuíferos y un acuitardo las soluciones de Theis y de Neumann & Witherspoon han sido comparadas con el modelo de elementos finitos, donde se observa un buen ajuste de los resultados obtenidos para pequeños valores de t ($t \leq 1 \cdot 10^5$) y de los parámetros adimensionales β y r/B , donde los gradientes son todavía elevados.

De esta manera validamos el modelo de Advección-Difusión propuesto que utilizaremos para la simulación de problemas más complejos, sistemas de más de dos acuíferos confinados y escalas de espacio y tiempo más grandes, mediante el uso de técnicas de cálculo distribuido en clusters de PC's tipo "Beowulf". En la actualidad estas técnicas son indispensables cuando se quiere describir la respuesta de sistemas hidrológicos complejos y en el largo plazo.

REFERENCIAS

- [1] NEUMAN S.P., WITHERSPOON, P.A. *Theory of Flow in a Confined Two Aquifer System*, Water Resources Research., Vol. 5, No 4, 1969, págs. 803-816.
- [2] NEUMAN S. P., PRELLER C., NARASHIMAN T. N. *Adaptive Explicit-Implicit Quasi Three-Dimensional Element Model of Flow and Subsidence in Multiaquifer Systems.*, Water Resources Research., Vol. 18, No 5, 1982, págs. 1551-1561.
- [3] PINDER G. F., GRAY W. G. *Finite Element in Subsurface and Subsurface Hydrology*, ACADEMIC PRESS, Inc. Florida, 1997.
- [4] THEIS, C. V. *The relationship between the lowering of the piezometric surface and the rate and duration of discharge of a well using ground water storage*, Trans. Amer. Geophys. Union, Vol. 16, pág. 519, 1935.
- [5] HANTUSH, M. S. *Modification of the theory of leaky aquifers*, J. Geophys. Res., 65, 3713, 1960.