Mecánica Computacional Vol 20. pp. 116 — 122
Compilado por Fernando G. Flores
Córdoba, 30 de octubre - 2 de noviembre de 2001

LA ECUACIÓN DE BURGERS FORZADA COMO UN MODELO PARA INTERACCIONES NO LINEALES ENTRE ONDAS DISPERSIVAS

Fernando E. Menzaque
FaMAF, CIEM
Universidad Nacional de Córdoba, Argentina
Rodolfo R. Rosales
Department of Mathematics
Massachusetts Institute of Technology
Esteban G. Tabak
Courant Institute of Mathematical Sciences
New York University
Cristina V. Turner
FaMAF, CIEM, CONICET
Universidad Nacional de Córdoba, Argentina

ABSTRACT

The forced inviscid Burgers equation is studied as a model for the nonlinear interaction of dispersive waves. The dependent variable $u(x,t)$ is thought of as an arbitrary mode or set of modes of a general system, and the force is tuned to mimic the effects of other modes, which may be either near or far from resonance with u.

When the force is unimodal, a family of exact travelling waves fully describes the asymptotic behavior of the system. When the force is multimodal, with the frequencies of the various modes close to each other, the asymptotic solution is quasi-stationary, punctuated by faster intermittent events. The existence of these "storms" may have significant implications for energy transfer among modes in more general systems.

RESUMEN

Se estudia la ecuación de Burgers no viscosa como un modelo no lineal de la interacción entre ondas dispersivas. La variable dependiente $u(x,t)$ es pensada como un modo o conjunto de modos arbitrarios de un sistema general, y la fuerza es ajustada para modelar los efectos de otros modos, los cuales pueden estar cerca o lejos de la casi resonancia con u.

Cuando la fuerza es unimodal, una familia de ondas viajeras describe completamente el comportamiento asintótico del sistema. Cuando la fuerza es multimodal, con las frecuencias de los modos cercanos entre sí, la solución asintótica es casi estacionaria, interrumpida por eventos intermitentes de corta duración. La existencia de estas "tormentas" puede tener implicaciones importantes, en sistemas más generales, para la transferencia de energía entre modos.

INTRODUCCIÓN

El propósito de este trabajo es mostrar el intercambio energético entre la disipación realizada por la solución en los choques y el trabajo realizado por el término forzante.
Nuestro interés reside principalmente en situaciones donde $E(t)$ es próxima a estacionaria de modo que el trabajo realizado por el término forzante y la disipación en los choques están balanceados. Cualquiera de ellos representa la cantidad de energía que fluye a través del sistema y la dependencia de este flujo sobre las características de $f(x,t)$ determinará la naturaleza del intercambio de energía entre un conjunto de modos forzados en resonancia o casi resonancia.

UN ÚNICO MODO FORZANTE

Consideremos la ecuación de Burgers:

$$u_t + \left(\frac{1}{2}u^2\right)_x = f(x - \omega t), \tag{1}$$

donde f y u son funciónes 2π periódicas en el espacio y f y la condición inicial son tales que la solución del sistema es suave a trozos para todo t y tiene un número finito de choques.
La ecuación (1) admite una solución exacta y existe una solución con una esquina que es la transición entre el comportamiento resonante y el casi resonante en un valor crítico de la frecuencia $\omega = \omega_{cr}$.
Estas soluciones son llamadas ondas viajeras y pueden expresarse con una fórmula cerrada. Más aún estas soluciones describen el comportamiento para t grande de la solución general de la ecuación (1).
Buscaremos soluciones de la ecuación (1) de la forma:

$$u(x,t) = G(x - \omega\, t). \tag{2}$$

Definiendo $z = x - \omega t$, la ecuación (1) se transforma en la siguiente ecuación diferencial ordinaria:

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{2}(G-\omega)^2\right) = f(z). \tag{3}$$

La ecuación (3) tiene por solución a:

$$G(z) = \omega \pm \sqrt{2F(z)} \tag{4}$$

donde $F(z)$ es una primitiva de $f(z)$ y la constante de integración es elegida para que $F(z) \geq 0$ para todo z.
Llamaremos F_{cr} a una elección particular de $F(z)$ tal que $min_{z\in[0,2\pi)}F_{cr}(z) = 0$. Para F_{cr} podemos definir:

$$\omega_{cr} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sqrt{2F_{cr}(z)}\, dz \tag{5}$$

Genéricamente pueden distinguirse tres casos con la solución determinada unívocamente por ω cuando F_{cr} tiene un único mínimo global por período. Estos casos son:

1. $F > F_{cr}$,
2. $|\omega| < \omega_{cr}$
3. $\omega = \omega_{cr}$

En la figura 1 se ejemplifican estos tres casos para un caso donde el término forzante es un armónico simple.

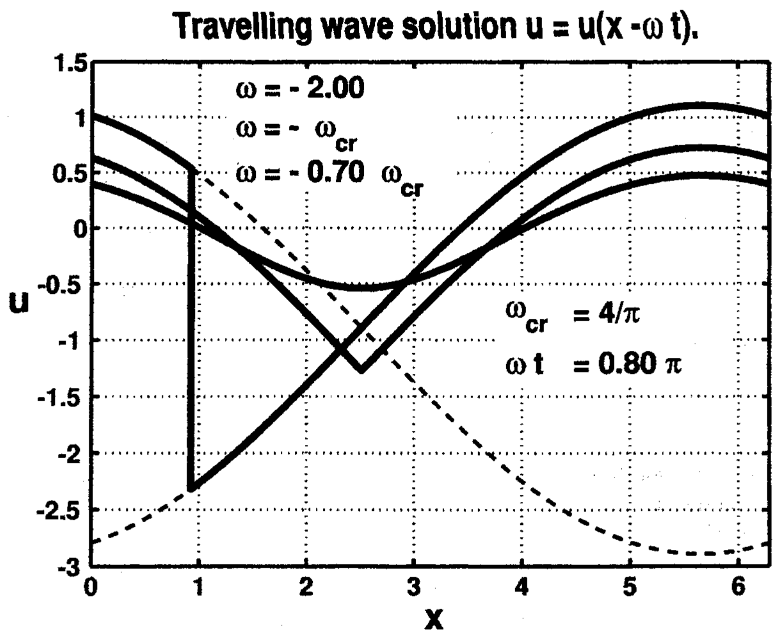

Figura 1: Ejemplo de ondas viajeras para la ecuación $u_t + (0.5\,u^2)_x = \sin(x - \omega\, t)$.
Se muestran tres soluciones: (a) Solución suave para $\omega = -2.00 < -\omega_{cr}$.
(b) Solución crítica, con una esquina, para $\omega = \omega_{cr} = 4/\pi$.
(c) Solución con choque, para $\omega = -0.70\,\omega_{cr}$.

Tambien se muestra, en línea de puntos, la envolvente de las soluciones con choques dada por $u = \omega \pm \sqrt{2\,F}$. En cada caso la solución coresponde al tiempo t tal que $\omega\, t = 0.80\,\pi$.

Caso 1. $F(z)$ **estrictamente mayor que** $F_{cr}(z)$.
En este caso la solución debe ser suave y en (4) debe adoptar un único signo. Esto es consecuencia del hecho que la condición de entropía obliga a que los saltos en los choques sean de mayor a menor cuando x crece, por lo tanto los choques sólo permiten que la solución pase de la raíz positiva a la negativa. Como $g(z)$ debe ser periódica no puede tener choques cuando $min_{z\in[0,2\pi)}F(z) > 0$.
En este caso el signo de la raíz cuadrada y el valor de la constante de integración que define $F(z)$ se obtienen imponiendo la condición de que la media de $u(z)$ sea nula.
Podemos escribir las soluciones correspondientes a este caso como dos familias de soluciones ($\omega > 0$, $\omega < 0$) parametrizadas por un único parámetro $\delta > 0$ de la siguiente forma:

$$u = \omega - \text{sign}(\omega)\sqrt{2\,(\delta + F_{cr}(z))} \tag{6}$$

ya que la condición $\int_0^{2\pi} u(x,t)\,dx = 0$ determina que:

$$\omega = \pm\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sqrt{2(\delta + F_{cr}(z))}\,dz \tag{7}$$

donde $z = x - \omega t$ y $F(z) = F_{cr}(z) + \delta$.
De esta manera para $\omega > \omega_{cr}$ las soluciones ondas viajeras son tan suaves cuanto $F_{cr}(z)$ y son unívocamente determinadas por la función $f(z)$ y por la frecuencia ω.

Caso 2, $\omega < \omega_{cr}$.
En este caso no podemos encontrar un $\delta > 0$ tal que la solución (4) satisfaga la condición de media nula (ecuación (7)) y la condición $\omega < \omega_{cr}$, por lo tanto debemos tomar $F(z) = F_{cr}(z)$ y permitir a la solución que salte entre la raíz positiva y la raíz negativa pués la solución puede retornar suavemente de la raíz negativa hacia la positiva a través de un punto donde $F_{cr}(z) = 0$. En este caso el parámetro ajustable que permite que la solución tenga media nula es la posición del choque $z = s$. Para ser más específicos supongamos que $F_{cr}(z)$ tiene un único mínimo global por período y llamemos z_m a la posición de este mínimo. La posición del choque puede ser determinada por la ecuación:

$$\omega = -\frac{1}{2\pi}\int_{z_m}^{s}\sqrt{2F_{cr}(z)}\,dz + \frac{1}{2\pi}\int_{s}^{z_m+2\pi}\sqrt{2F_{cr}(z)}\,dz \tag{8}$$

donde $z_m \leq s \leq z_m + 2\pi$. Ya que $\frac{d\omega}{ds} < 0$ hay un único s solución de (8).

Caso 3, $\omega = \omega_{cr}$.
En el caso límite cuando $\omega < \omega_{cr}$ la posición del choque (s) y el punto de transición suave entre la raíz negativa y la positiva (z_m) coinciden y por lo tanto desaparecen dejando lugar a una esquina que se mueve con velocidad ω_{cr} siendo ésta la única singularidad de la solución.

EJEMPLO: UN ARMÓNICO SIMPLE

Consideremos el caso con un término forzante simple de tipo sinusoidal:

$$f(x,t) = \sin(x - \omega t). \tag{9}$$

Puede demostrarse que en este caso:

$$F_{cr}(z) = 1 - \cos(z) = 2\,\sin\left(\frac{z}{2}\right) \tag{10}$$

y

$$\omega_{cr} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 2\,\sin\left(\frac{z}{2}\right)dz = \frac{4}{\pi}. \tag{11}$$

Soluciones con choque
Estas soluciones aparecen cuando $|\omega| < \omega_{cr} = \frac{4}{\pi}$ y tienen la forma:

$$u(x,t) = G(z) = \omega \pm 2\left|\sin\left(\frac{x-\omega t}{2}\right)\right| \tag{12}$$

En cada período ($0 \leq z \leq 2\pi$) hay un cambio continuo entre la raíz negativa y la positiva a través del choque en algún punto $z = s$. La posición del choque se puede determinar de la condición de media 0:

$$0 = \int_0^s G^+(z)dz + \int_s^{2\pi} G^-(z)dz = 2\pi\omega - 8\,cos\left(\frac{s}{2}\right), \tag{13}$$

donde

$$G^+(z) = \omega + 2\left|\sin\left(\frac{x-\omega t}{2}\right)\right| \tag{14}$$

y

$$G^{-}(z) = \omega - 2 \left| \sin\left(\frac{x-\omega t}{2}\right) \right| \tag{15}$$

y por lo tanto:

$$s = 2 \arccos\left(\frac{\pi}{4}\omega\right), \quad \text{con} \quad 0 \leq s < 2\pi. \tag{16}$$

El trabajo realizado por el término forzante es:

$$W_f = \int_0^{2\pi} f(z)u(z)dz = \frac{16}{3}\left(1 - \left(\frac{\pi\omega}{4}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}} \tag{17}$$

Nota: en el caso de $\omega \geq \omega_{cr} = \frac{4}{\pi}$ la solución de (9) no forma choques y por lo tanto no hay disipación de energía ni trabajo realizado por el término forzante. Esto muestra un abrupto cambio en el comportamiento de la solución el cual puede ser interpretado como la frontera de la resonancia. Esto es, en $\omega = \omega_{cr}$ ocurre una transición abrupta del comportamiento resonante, en el cual el término forzante introduce continuamente energía en el sistema la cual es disipada por el choque, a un comportamiento no resonante, en el cual no hay trabajo desarrollado por la fuerza.

Soluciones suaves.
Cuando $\omega > \omega_{cr} = \frac{4}{\pi}$ la solución de (9) tiene la forma:

$$u(x,t) = \omega \pm \sqrt{2\ (\delta - \cos(x - \omega t))} \tag{18}$$

para $\delta > 1$. Utilizando la propiedad de media cero resulta que

$$\omega = \omega(\delta) = \pm\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sqrt{2\ (\delta - \cos(z))}dz \tag{19}$$

Soluciones críticas.
En el caso $\omega = \omega_{cr} = \frac{4}{\pi}$ la solución de (9) tiene la forma:

$$u(x,t) = \pm\left(\omega_{cr} - 2\left|\sin\left(\frac{x-\omega t}{2}\right)\right|\right). \tag{20}$$

CONVERGENCIA

En [6] se muestra analíticamente que la solución general para el problema (1) converge asintóticamente para tiempos grandes a la solución onda viajera, por lo menos en el caso en el cual la solución onda viajera es la única solución del sistema, i. e., cuando $F_{cr}(z)$ tiene un único mínimo global por período.
La figura 2 muestra los resultados numéricos que ilustran el proceso de convergencia. Por brevedad mostramos solo los resultados de convergencia para $|\omega| < \omega_{cr}$.

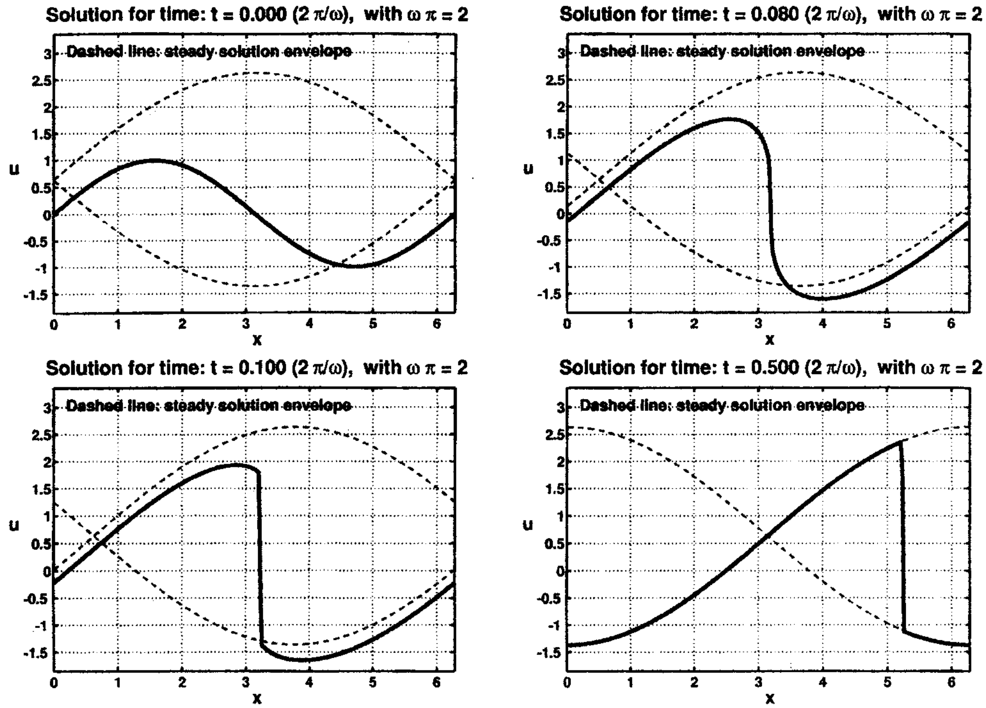

Figura 2: Término forzante $f = \sin z$ con $z = x - \omega t$ y $\omega = \omega_{cr}/2 = 2/\pi$. Cuando $t \to \infty$ la solución converge a la onda viajera $u = \omega \pm 2\,\sin(z/2)$, donde el cambio de signo ocure en la posición del choque. La onda viajera tiene período $2\pi/\omega$ en el tiempo.
De izquierda a derecha y de arriba hacia abajo se muestran la solución y la envolvente $\omega \pm 2\,\sin(z/2)$ (línea de puntos) para la onda viajera: **(a)** Condición inicial para $t = 0$. **(b)** Tiempo $t = 0.08\,(2\pi/\omega)$, un poco antes de la formación del choque. **(c)** Tiempo $t = 0.10\,(2\pi/\omega)$, un poco despues de la formación del choque. **(d)** Tiempo $t = 0.50\,(2\pi/\omega)$, una vez que la solución convergió a la onda viajera.

REFERENCIAS

[1] **Benney, D.J. and Newell, A.C.** *Random wave closures*, Stud. Appl. Math, vol. 48 (1969), págs. 29–53.

[2] **Benney, D.J. and Saffman, P.G.** *Nonlinear interactions of random waves in a dispersive medium*, Proc. Roy. Soc. A, vol. 289 (1965), pág. 301.

[3] **Cai, D.; Majda, A.J.; McLaughlin, D.W. and Tabak, E.G.** *Spectral Bifurcations in Dispersive Wave Turbulence*, PNAS, vol. 96 (1999), págs. 14216–14221.

[4] **Godunov, S. K.** *A difference scheme for numerical computation of discontinuous solutions of equations of fluid dynamics*, Mat. Sb., vol. 47 (1959), págs. 271–306.

[5] **Hasselmann, K.** *On the nonlinear energy transfer in a gravity wave spectrum. Part I: General theory*, J. Fluid Mech., vol. 12 (1962), págs. 481–500.

[6] **Menzaque, F.; Rosales, R.; Tabak, E. and Turner, C.** *The forced inviscid Burgers equation as a model for nonlinear interactions among dispersive wave*, to appear in Ameri-

can Mathematical Society's Contemporary Mathematics, vol. Advances in wave interaction and turbulence.

[7] **Majda, A.J.; McLaughlin, D.W. and Tabak, E.G** *A one-dimensional model for dispersive wave turbulence*, J. Nonlinear Sci., vol. 7 (1997), págs. 9–44.

[8] **Milewski, P.A.; Tabak, E.G. and Vanden Eijnden, E.**, *Resonant wave interaction with random forcing and dissipation*, to appear in Stud. Appl. Math. (2001).

[9] **Rosales, R.R.; Tabak, E.G. and Turner, C.V.**, *Resonant triads involving a nondispersive wave*, to appear in Stud. Appl. Math. (2001).

[10] **Strang, G.** *On the construction and comparison of difference schemes*, SIAM J. Num. Anal., vol. 5 (1968), págs. 506–517.

[11] **van Leer, B.** *Towards the ultimate conservative difference scheme V. A second order sequel to Godunov's method*, J. Comput. Phys., vol. 32 (1979), págs. 101–136.