

## **ACOPLAMIENTO DE MODELOS UNIDIMENSIONALES Y MULTIDIMENSIONALES PARA LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS HEMODINÁMICOS**

Santiago Urquiza<sup>1</sup>, Alejandro Reutemann<sup>1</sup>, Marcelo Vénere<sup>2</sup> y Raul Feijóo<sup>3</sup>

1. Lab. de Bioingeniería, Facultad de Ingeniería UNMdP. Av. J.B. Justo 4302, (7600) Mar del Plata.

SantiagoUrquiza@fi.mdp.edu.ar

2. PLADEMA-CNEA, Facultad de Exactas UNCPBA. Pinto 399, (7000) Tandil.

venerem@exa.unicen.edu.ar

3. Laboratorio Nacional de Computación Científica. Getulio Vargas 333, Petropolis RJ, Brasil.

feij@lncc.br

### **RESUMEN**

En el presente trabajo se propone un método de acoplamiento directo entre un modelo unidimensional de la Hemodinámica Arterial Humana y modelos focalizados multidimensionales de segmentos arteriales. El principal objetivo es proveer a los modelos detallados multidimensionales con apropiadas condiciones de contorno generadas por un modelo global unidimensional que resuelve las ecuaciones reducidas de Navier-Stokes en tubos compliantes. De esta manera se logra resolver en detalle las condiciones hidrodinámicas de un segmento arterial teniendo en cuenta los acoplamientos existentes con el resto del árbol arterial modelado unidimensionalmente. Tanto los dominios unidimensionales como multidimensionales, son resueltos numéricamente por el método de los Elementos Finitos, discretizándose las Ecuaciones de Navier-Stokes en su forma reducida para las zonas 1D y completas para las zonas multidimensionales.

Se incluye una aplicación al caso de una estenosis en la carótida, en la que se observa la formación de vórtices en el extremo distal, efecto que no puede ser capturado por el modelo unidimensional por sí solo.

### **ABSTRACT**

In this work a method for direct coupling one-dimensional with multidimensional models of the Human Arterial Dynamic is presented. The main purpose is to provide the more detailed multidimensional zones with appropriate boundary conditions coming from the global 1D model.

The Finite Element Method is used to numerically solve the resulting reduced and complete Navier-Stokes equations in compliant domains.

An application to the analysis of a simulated stenotic arterial disease in the Common Carotid Artery is included, showing the occurrence of a non-stationary vortex downstream the stenosis, a fact that is impossible to capture with the 1D model. Substantial changes in pulse waveforms are observed, suggesting the possibility of using them in early detection of the arterial obstruction.

## INTRODUCCIÓN

Recientemente, el problema del acoplamiento entre modelos multidimensionales de Navier-Stokes en tubos compliantes con modelos reducidos unidimensionales o de parámetros concentrados ha sido tratado con detalle por Quarteroni et.al.[3] [5]. Estos autores han planteado la resolución de dicho problema con la técnica de Iteración de Subdominios, proponiendo para cada parte del modelo individualmente, las condiciones de borde apropiadas para el buen planteo de los subproblemas asociados, homogéneos en dimensionalidad. Asimismo, han reportado dificultades en la convergencia y observándose en sus resultados reflexiones espurias, aunque mucho más reducidas que en los antecedentes por ellos analizados.

En este trabajo se propone una alternativa para la resolución del acoplamiento de modelos de distinta dimensionalidad del sistema arterial (propagación de ondas en tubos flexibles, en general) distinguiendo entre las condiciones existentes en las interfaces de acoplamiento y las condiciones de borde (en estas últimas no se posee información de lo que pasa más allá de la frontera) y, por lo tanto, se plantean condiciones apropiadas de continuidad para las variables del problema original y no para las variables transformadas según el método de las características, tal cual lo propuesto por Formaggia et.al.<sup>[3]</sup>.

El modelo propuesto consta básicamente de tres módulos:

- \* Un módulo 1D utilizando las ecuaciones de flujo unidimensional combinadas con las ecuaciones del movimiento de la estructura.
- \* Un módulo multidimensional que resuelve las ecuaciones de Navier-Stokes completas y lleva en cuenta el movimiento de la pared. En este caso se presenta la dificultad adicional del dominio deformable, que es tratada con la formulación Arbitrariamente Lagrangiana Euleriana ALE<sup>[1]</sup>
- \* Un módulo de acople entre los dos módulos anteriores

Cada módulo se describe en secciones separadas, dejándose para el final ejemplos de aplicación. Se muestran una aplicación al sistema arterial completo, modelado con elementos unidimensionales, salvo una porción de la arteria Carótida que es reemplazada por un modelo en simetría de revolución y en la cual se ha simulado la presencia de una Estenosis (estrechamiento arterial).

## MODELO UNIDIMENSIONAL

La estructura geométrica del árbol arterial puede ser idealizada como un conjunto de tubos compliantes interconectados y de sección variable. A partir de esta abstracción, pueden obtenerse ecuaciones que vinculen las principales variables teniendo en cuenta solamente su variación en la dirección de desarrollo del tubo, es decir, en función de la longitud de arco media o dirección axial, promediándose las variaciones en el plano transversal a dicha curva. Las ecuaciones diferenciales que gobiernan el fenómeno de eflujo de ondas de presión y caudal se obtienen a partir de las ecuaciones de conservación de la masa y del momentum lineal en la dirección axial, y son de carácter hiperbólico en concordancia con los fenómenos propagatorios que representan. Es abundante la bibliografía donde se detalla la obtención de las mismas, así que no se entrará en detalles aquí<sup>[2]</sup>. Las ecuaciones diferenciales no lineales resultantes son entonces,

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \alpha \frac{Q^2}{A} \right) = - \frac{A}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\pi D}{\rho} \tau_0 \quad (2)$$

con

$$\alpha = \frac{A \int u^2 dA}{Q^2} ; \quad \tau_0 = f_r \cdot \frac{\rho \bar{u} |\bar{u}|}{8} ; \quad Q = \bar{u} \cdot A ;$$

donde  $A$  es el área de la sección transversal,  $u$  es la velocidad axial ( $\bar{u}$  el correspondiente valor medio);  $x$  es la coordenada axial,  $P$  la presión media,  $\rho$  es la densidad de la sangre,  $\tau_0$  es la tensión viscosa en la pared arterial,  $\alpha$  es un factor de corrección de la cantidad de movimiento axial que depende de la forma del perfil de velocidades.

Como ley de cierre de las ecuaciones anteriores se utilizó, como ya fue anticipado, una relación lineal para la correspondencia Presión - Diámetro, que expresada en función del área resulta:

$$P = P_0 + E h_0 / R_0 \left[ \sqrt{\frac{A}{A_0}} - 1 \right] \quad (3)$$

En la cual  $R_0$ ,  $h_0$ ,  $A_0$  son el radio, el espesor y el área de la sección transversal al vaso, respectivamente, cuando  $P$  iguala a la presión de referencia  $P_0$ , y  $E$  es el módulo de Young efectivo.

Por otra parte, conviene definir a la celeridad de propagación de ondas como:

$$C = \sqrt{\frac{A}{\rho} \frac{dP}{dA}} \quad (4)$$

Ahora (1) puede reescribirse como,

$$\frac{A}{\rho C^2} \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (5)$$

Resolviendo el correspondiente problema de autovalores, el sistema (5)(2) puede ser reformulado en su forma canónica a lo largo de las líneas características definidas por las velocidades de propagación  $f^+$  y  $f^-$ :

$$\frac{DQ}{Dt} - \frac{1}{Z^-} \frac{DP}{Dt} = g \quad \text{sobre } x = f^-(x(t), t) \quad (6)$$

$$\frac{DQ}{Dt} - \frac{1}{Z^+} \frac{DP}{Dt} = g \quad \text{sobre } x = f^+(x(t), t) \quad (7)$$

con

$$g = - \frac{1}{\rho} \frac{f_r |Q| Q}{4R} \quad (8)$$

$$f^+ = \alpha \frac{Q}{A} + \sqrt{\alpha \frac{Q^2}{A^2} (\alpha - 1) + C^2} \quad (9)$$

$$f^- = \alpha \frac{Q}{A} - \sqrt{\alpha \frac{Q^2}{A^2} (\alpha - 1) + C^2} \quad (10)$$

$$(Z^-)^{-1} = \frac{f^+ A}{\rho C^2} \quad (11)$$

$$(Z^+)^{-1} = \frac{f^- A}{\rho C^2} \quad (12)$$

Normalmente se utiliza la denominación de Impedancia Característica para los términos  $Z^*$ , que para el caso de números de Mach pequeños coinciden en magnitud,  $Z = \rho C / A$ .

#### Método Numérico para el modelo 1D

Para la resolución numérica del sistema (6-7) se impone la implementación de un método que lleve en cuenta la naturaleza propagatoria e hiperbólica de las ecuaciones. Esto se logra implementando una técnica de Least-Squares Fem<sup>[7]</sup>.

#### MODELO MULTIDIMENSIONAL

Para la modelización del flujo sanguíneo en zonas multidimensionales (MD), restringiremos nuestra exposición al tipo de caso presentado en los resultados, considerando dominios con simetría de revolución como el que se observa en la fig. 1, aunque los desarrollos subsecuentes no tienen ningún tipo de condicionamientos para ser extendidos a geometrías completamente tridimensionales.

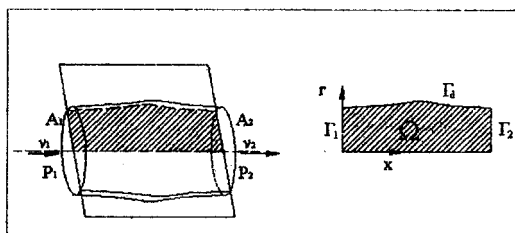


Figura 1

Las secciones proximal  $\Gamma_1$  y distal  $\Gamma_2$  de áreas  $A_1$  y  $A_2$  respectivamente están destinadas a ser acopladas con el modelo unidimensional. Por simplicidad en la exposición presentaremos el problema de Navier-Stokes (NS) incompresible y su correspondiente formulación variacional asumiendo dominio fijo y condiciones de borde de adherencia (velocidades nulas en  $\Gamma_d$  frontera de Dirichlet) sobre el contorno lateral. Dado que el modelo reducido 1D entrega valores de presión uniformes en  $A_1$  y  $A_2$ , en virtud que sus ecuaciones se plantean para valores promediados en la sección, las caras 1 y 2 estarán sometidas a valores de tensión normal uniforme en toda la sección, resultando un problema con condiciones de Neumann tanto a la entrada como a la salida. Este tipo de problemas ha sido tratado extensivamente en la referencia [6], por lo que aquí nos limitaremos a su presentación. Se plantea entonces la resolución de las ecuaciones de NS de acuerdo a las siguientes ecuaciones diferenciales y condiciones de contorno referidas:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \cdot \left( \frac{\partial \vec{v}_f}{\partial t} + \vec{v}_f \cdot \nabla \vec{v}_f \right) = -\nabla p + \mu \cdot \nabla^2 \vec{v}_f + \rho \cdot \vec{g} \\ \operatorname{div} \vec{v}_f = 0 \\ \mu \cdot \frac{\partial \vec{v}_f}{\partial n} - p \cdot \vec{n} = P_i \cdot \vec{n} \text{ sobre } \Gamma_i, \quad i = 1, 2 \\ \vec{v}_f = \vec{0} \text{ sobre } \Gamma_d \end{array} \right. \quad (13)$$

Se ha denotado con  $\vec{v}_f$  a la velocidad del fluido, asumiéndose además una viscosidad constante  $\mu$ . Esta última hipótesis se considera suficiente para los propósitos del presente trabajo, aunque es bien sabido que la sangre presenta comportamientos reológicos complejos[5].

Es fácil demostrar que las condiciones de Neumann adimensionalizadas toman la forma,

$$\frac{1}{\operatorname{Re}} \cdot \frac{\partial \vec{v}_f^*}{\partial n^*} - p^* \cdot \vec{n} = P_i^* \cdot \vec{n} \quad (14)$$

Se observa entonces que el efecto de las fuerzas viscosas disminuye con el número de Reynolds  $Re$ , y que por lo tanto para  $Re$  grandes (lo cual se verifica en el caso que nos ocupa) la presión en las caras proximales y distales coincidirá con  $P_i$ , al menos de manera débil, de acuerdo a la formulación variacional que se presenta a continuación.

De acuerdo con Quarteroni et. al.<sup>[5]</sup>, el problema variacional correspondiente queda formulado de la siguiente forma:

Definiendo los espacios de funciones usuales en  $\Omega : L^2(\Omega)$  las funciones de cuadrado integrable,  $H^1(\Omega)$  las funciones cuyas derivadas hasta el orden 1 pertenecen a  $L^2$ , y  $H^1_d(\Omega)$  las funciones de  $H^1$  que se anulan en  $\Gamma_d$ . Los correspondientes espacios vectoriales asociados se denotarán con negrilla, además  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  es el producto escalar en  $L^2$ .

Para todo  $t > 0$  encontrar  $\mathbf{v}_f(\mathbf{x}, t) \in \mathbf{H}^1_d$  tal que

$$\left\langle \rho \frac{\partial \mathbf{v}_f}{\partial t}, \mathbf{w} \right\rangle + \left\langle \rho \mathbf{v}_f \cdot \nabla \mathbf{v}_f, \mathbf{w} \right\rangle - \left\langle p, \text{div}(\mathbf{w}) \right\rangle + \mu \left\langle \nabla \mathbf{v}_f, \nabla \mathbf{w} \right\rangle = \left\langle \rho \mathbf{g}, \mathbf{w} \right\rangle + \int_{\Gamma_i} -P_i \mathbf{n} \cdot \mathbf{w} dS \quad (15)$$

$$\left\langle \lambda, \text{div}(\mathbf{v}_f) \right\rangle = 0$$

para todo  $\mathbf{w} \in \mathbf{H}^1_d$ ,  $\lambda \in L^2$ .

Con apropiadas condiciones iniciales y  $\mathbf{g}$  suficientemente regular, este problema es equivalente a la formulación diferencial (13)<sup>[5]</sup>.

#### Formulación ALE

Debido a la compliancia elástica de la pared lateral, considerada de igual forma que para el caso 1D, en el problema del apartado anterior deben introducirse las modificaciones necesarias que permitan su abordaje teniendo en cuenta la deformabilidad del dominio  $\Omega$  y el movimiento de la frontera móvil  $\Gamma_d$ . Un técnica particularmente conveniente para el tratamiento del acoplamiento fluido-estructura presente en esta situación es la formulación Arbitrariamente Lagrangiana Euleriana<sup>[11]</sup>. Es bien conocido que la implementación de este método requiere la modificación del término convectivo de la aceleración, en cuanto a que las ecuaciones se plantean ahora sobre un dominio en movimiento (Dominio de Referencia) y entonces la velocidad de convección será relativa a dicho dominio, modificándose el termino referido de acuerdo a :

$$\rho \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{v}_f}{\partial t} + \mathbf{v}_f \cdot \nabla \mathbf{v}_f \right) \rightarrow \rho \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{v}_f}{\partial t} + (\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_r) \cdot \nabla \mathbf{v}_f \right) \quad (16)$$

donde  $\mathbf{v}_r$  es la velocidad del Dominio de Referencia. Debe además tenerse en cuenta que en el paréntesis de la derecha, la derivada parcial temporal es ahora sobre un mismo punto del dominio móvil. Por último, con la hipótesis de adherencia del fluido a la pared se tiene,

$$\mathbf{v}_f = \mathbf{v}_p \equiv \frac{\partial R_p}{\partial t} \text{ sobre } \Gamma_d \quad (17)$$

en la cual  $R_p$  es el radio de la pared arterial.

Por otra parte, el Dominio de Referencia será movido acompañando la pared arterial. Como modelo de pared arterial se adopta un modelo de anillos independientes<sup>[5]</sup> compatible con las hipótesis asumidas para el caso 1D.

#### ACOPLAMIENTO DE ZONAS MULTIDIMENSIONALES CON EL MODELO 1D

El acoplamiento entre zonas de distinta dimensionalidad, como se observa en la figura 2, ha sido tratado en [6] ,[3] para los casos de pared fija y compliante. Dada la particular naturaleza del problema que nos ocupa, basaremos nuestra exposición siguiendo lo desarrollado en Formaggia et. Al.<sup>[3]</sup>. En dicho trabajo se plantea una vía de resolución por medio del análisis de los subproblemas

asociados a cada zona de dimensionalidad homogénea. Allí se proponen diversas alternativas de acoplamiento que involucran las condiciones de borde que hacen a cada uno de los subproblemas, individualmente bien planteados. La alternativa elegida para la resolución y discusión por parte de dichos autores resulta la siguiente:

- \* Continuidad de áreas
- \* Continuidad del invariante de Riemann entrante al dominio 1D
- \* Continuidad de la Tensión normal al área de la interfaz.

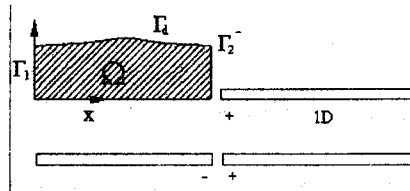


Figura 2

En el presente trabajo, la vía seguida para el acoplamiento es diferente en varios aspectos. En principio, se parte de la idea de que si se establece un corte artificial en un modelo 1D en un punto arbitrario, para su resolución simultánea bastará con plantear la continuidad de  $P$  y  $Q$  en los valores a cada lado de la interfaz. Es decir,

$$P^+ = P^- \text{ y } Q^+ = Q^-, \quad (18)$$

donde con (+) y (-) se han señalado posiciones a cada lado de la interfaz. Es importante señalar que la continuidad del área surge de la biunivocidad de la relación área-presión y de la continuidad de los parámetros involucrados en ella, no siendo necesario imponerla en absoluto.

Ahora bien, si una de las partes es retirada y reemplazada por un modelo MD compatible, por ejemplo si la zona designada con (-) es reemplazada por un modelo 2D en simetría de revolución, las condiciones (18) deben seguir siendo válidas.

Las condiciones de acoplamiento resultantes, surgen de reemplazar el valor de  $P_i$  (en la figura  $P_2$ ) en la formulación variacional (15) por  $P^+$  -presión en el extremo de la zona 1D-. La otra condición resulta de la continuidad en el caudal,

$$Q_{id}^+ = - \int_{\Gamma_f} \bar{v}_f \cdot \bar{n} dA \quad (19)$$

Esta condición queda asociada al extremo del modelo 1D. Una observación importante es que, en primer lugar, la continuidad de la presión no es exacta, dada la incompatibilidad de los modelos físico-matemáticos entre las zonas 1D y MD, en virtud de la presencia de esfuerzos viscosos en la dirección de la normal, ver (14). Esta incompatibilidad, siendo insalvable, es despreciable para los casos de  $Re$  altos y ondas largas, como es el caso del sistema arterial. En segundo lugar, en virtud de que la continuidad se plantea a través de la formulación variacional, en el término de potencias virtuales de los esfuerzos normales (Técnica referida en la literatura como "Do Nothing approach", ver [6]), la continuidad valdrá sólo en sentido débil. Pero he aquí una de las razones para no forzar la continuidad en áreas,  $A^+ = A^-$ , ya que esto implicaría una contradicción con la imposición débil de la continuidad en la presión.

Es importante resaltar, que esta manera de realizar el acoplamiento conlleva una implementación extremadamente sencilla, ya que está referida a las variables originales del problema, no siendo necesaria la descomposición en información progrediente y retrogrediente según el método de las características.

### IMPLEMENTACIÓN COMPUTACIONAL Y RESULTADOS NUMÉRICOS

Se implementa un modelo del árbol arterial completo con elementos unidimensionales<sup>[2]</sup> en el cual se reemplaza un tramo de la arteria Carótida Proximal por un modelo en simetría de revolución de 14.8

cm de longitud ( $L/R=40$ ), centrado entre ambos extremos y con una reducción (estenosis) del 60% en radio. En la figura 3 se observa un detalle de la red empleada, habiéndose dibujado elementos lineales uniendo los nodos de los triángulos cuadráticos, además puede observarse el dominio completo en escala. Las zonas 1D se resuelven de acuerdo al planteo numérico hecho más arriba y con los detalles adicionales de acuerdo a lo consignado en [2].

La zona multidimensional de acuerdo con la formulación variacional (15) se resuelve por Elementos Finitos discretizando espacialmente con triángulos P2/P1 (cuadrático en velocidades y lineal en presiones) de modo que las condiciones LBB quedan automáticamente satisfechas. Se implementa un método SUPG aplicándose solamente sobre el término convectivo. En cuanto a la discretización temporal se implementa un esquema  $\theta$ -Euler, trabajándose con  $\theta = 0.5$  (Crank-Nicholson).

El movimiento del Dominio de Referencia para la formulación ALE se realiza desplazando la red de tal manera que acompañe a la pared del tubo (pared arterial), admitiéndose movimiento en la dirección radial únicamente.

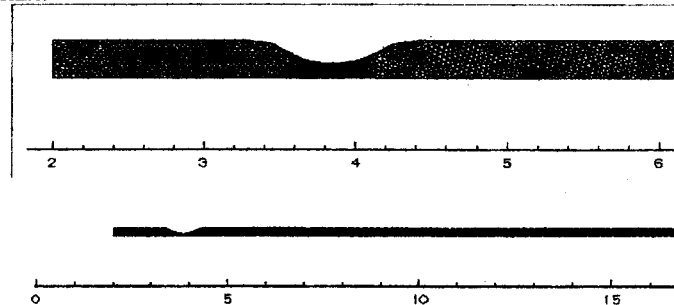


Figura 3

### DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS

Tal vez los resultados más interesantes de consignar se encuentran durante el periodo de la sístole (contracción del corazón) que comprende los primeros 0.2 seg del periodo cardiaco  $T=0.8$ seg.

En la figura 4 se observa una secuencia de imágenes representando la magnitud de la componente axial de la velocidad  $V_x$ [cm/seg]. Sobre la pared aguas abajo de la estenosis se observa una componente negativa de la velocidad, indicando la presencia de un vórtice no estacionario. Dicho vórtice se va estirando hacia la salida como producto de la interacción fluido-pared, ya que esta se contrae en la zona comprendida por el remolino aguas abajo del estrechamiento. Dicha zona está caracterizada por la baja presión, como es posible también observar en el gráfico correspondiente de las presiones [ $\text{dyn/cm}^2 \cdot 10^4$ ] en la misma figura. Es interesante observar que este efecto de separación del flujo no puede ser captado por el modelo unidimensional, que es insensible a dichos fenómenos. Más allá de que el caso no necesariamente representa las condiciones reales de escurrimiento por diversos factores que no vale la pena discutir aquí, es interesante la lección que brinda, en el sentido que la presencia de singularidades puede afectar las condiciones del flujo en distritos relativamente lejanos.

En la figura 5 se muestran los gráficos correspondientes a las curvas de presión  $P$ [ $\text{dyn/cm}^2 \cdot 10^4$ ] y caudal  $Q$ [ $\text{cm}^3/\text{seg}$ ] en los puntos proximal y distal de la zona MD, conjuntamente con la salida de un caso corrido con el árbol completo 1D y sin estenosis (normal). Se observa que en el caso de presencia de estenosis, la curva de flujo proximal se asemeja bastante a la curva impuesta por el corazón, habiendo desaparecido el intervalo de tiempo donde el flujo alcanza valores negativos importantes (retorno o backflow). Por otra parte se observa una considerable disminución en las amplitudes del flujo. Se verificó además la conservatividad en masa del esquema propuesto para la resolución del acoplamiento fluido estructura en la zona bidimensional, integrando la curva de caudal en los nodos proximal y distal, dando una diferencia relativa en volumen desplazado menor al 0.016%.

## CONCLUSIONES

El caso analizado, muestra la presencia de fenómenos que son sólo posibles de captar con modelos multidimensionales, resaltando el valor de las soluciones acopladas. Por otra parte, se han observado las importantes modificaciones en las formas de onda que pueden hallarse por presencia de estrechamientos, como asimismo la distancias que esas perturbaciones pueden alcanzar. La presencia de perturbaciones observables en la curvas de caudal para los niveles de estrechamiento empleados, pueden contener un interesante valor diagnóstico con vistas a la identificación y detección temprana de situaciones patológicas como la considerada.

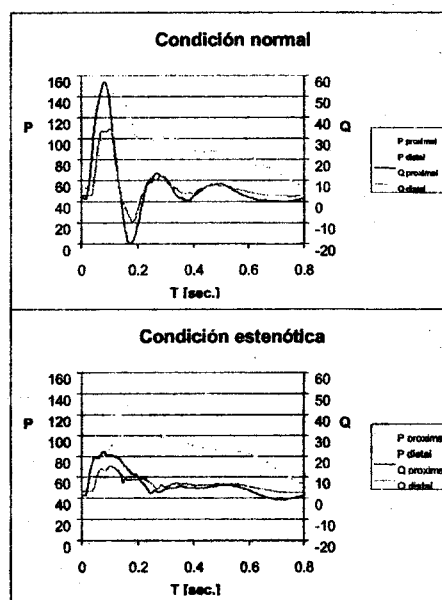


Figura 5

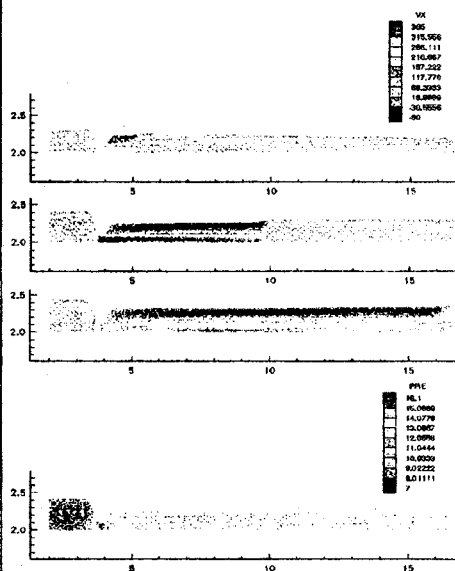


Figura 4

## REFERENCIAS

- [1] Hughes T.J.R., Liu W.K., Zimmermann, Lagrangian-Eulerian Finite Element Formulation for incompressible viscous flows, *Comp. Meth.Appl.Mech.Engrg.* V29,pp329-349,1981.
- [2] S. A. Urquiza, M. J. Venere, F.M.Clara and R.A.Feijoo, Finite Element (One-dimensional) Haemodynamic model of the Human Arterial System, European Community on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering, E. Oñate, G.Bugeda & B. Suarez Ed., Artes Gráficas Torres S.A., Barcelona, Spain.
- [3] Formaggia L.,Gerbeau J.F., Nobile F., Quarteroni A., On the Coupling of 3D and 1D Navier-Stokes Equations for Flow Problems in Compliant Vessels, *Comp. Meth.App. Mech & Eng.*, to appear,2000.
- [4] L. Formaggia, F.Nobile, J.-F. Gerbeau, A. Quarteroni, Numerical Treatment of Defective Boundary Conditions for the NavierStokes Equations, EPFL-DMA Analyse et Analyse Numerique Report n.20, 2000.
- [5] Alfio Quarteroni, Massimiliano Tuveri and Alessandro Veneziani, Computational Vascular Fluid Dynamics: Problems, Models and Methods, *Computing and Visualisation in Science*, 2000, vol 2, 163-197.
- [6] J.R.Heywood, R. Rannacher and S. Turek. Artificial boudaries and flux and pressure conditions for incompressible Navier-Stokes equations. *Int. Journal for Numerical Methods in Fluids*, 22: 325-352, 1996.
- [7] Young B.N. and Carey G.F., "A stable least-squares fem for non-linear hyperbolic problems", *Int. J. Num. Meth. Fluids*, 8, 933-942, (1988).