

## **ESTUDIO DE UNA ESTRUCTURA COMPUESTA POR DOS LOSAS CURVAS**

**Fernando Gomensoro\*, Federico P. Liseno\*, Federico Martín\*,  
Ing. Elvio Villafaña + y Carlos García Garino \*\***

*\* Alumnos de 6<sup>o</sup> año, Facultad de Ingeniería*

*+ Profesor titular de la cátedra Estructuras Especiales.*

*\*\* LAPIC-ITU, UNC & CONICET*

*Universidad Nacional de Cuyo, Centro Universitario, Parque Gral. San Martín  
Mendoza, Argentina*

### **RESUMEN**

Se realizó el cálculo de solicitaciones y deformaciones en un depósito cilíndrico empotrado con cúpula esférica en la parte superior. El estado de carga, producido por un líquido volátil fue de presiones constantes en la cúpula y variables linealmente en el cilindro.

En primer término fue calculado analíticamente utilizando el texto Belluzzi [1]. Por no existir solución directa para estructuras compuestas fue necesario separarlas en cilindro y cúpula y compatibilizar los movimientos.

En segundo término fue calculado numéricamente por el Método de los Elementos Finitos, utilizando los programas PC-FEAP [2] y Elástico, basado en [3].

Por último se realizó una comparación entre las solicitaciones y deformaciones obtenidas por los distintos procesos.

### **ABSTRACT**

In the paper the structural analysis of a tank has been performed in order to compute strains and stresses. The geometry is cylindrical shell fixed in the basis closed with a spherical dome. The tank is under internal pressure, a linear one in the cylinder due to the hydrostatic pressure caused by the liquid and a constant pressure acts on the dome.

The shell was solved analytically following the textbook of Belluzzi [1]. There is no solution available for the joint shell, consequently membranal solutions for the cylinder and the dome were computed under the above cited loads. The forces (M, N and Q) in the junctions were computed in order to compatibilize the displacements in the junction.

On the other hand the structure was numerically solved using the codes PCFEAP [2] and Elastico [3] both based on the Finite Element Method.

Finally a comparison of the different results obtained was done in order to assess the different techniques used in the work.

### **INTRODUCCIÓN**

El cálculo de esta estructura se realizó para la cátedra de Estructuras Especiales como trabajo de fin de curso, ya que durante el desarrollo de la materia se estudió la resolución analítica de membranas y losas curvas. Además se contaba con algunas nociones sobre el método numérico de los elementos finitos, pero sin aplicaciones a este tipo de problemas.

Por estas razones los objetivos propuestos fueron: 1- Calcular la estructura analíticamente. 2- Calcular la estructura numéricamente por el Método de los Elementos Finitos. 3- Comparar resultados obtenidos por los métodos anteriores. 4- Evaluar las ventajas y desventajas de cada uno de los procesos.

El trabajo se desarrolla en cuatro etapas: 1- Características de la estructura y estado de carga. 2- Solución analítica. 3- Solución numérica por el Método de los Elementos Finitos. 4- Comparación de resultados. 5- Conclusiones.

## 1- Características de la estructura y estado de carga

La estructura elegida para el trabajo está compuesta por dos losas curvas de espesor constante, un cilindro en la parte inferior y una cúpula esférica en la parte superior. Ambas losas se encuentran unidas solidariamente, siendo el vínculo exterior un empotramiento en la parte inferior del cilindro.

Las características del material, como las dimensiones fueron elegidas a fines prácticos sin responder a ninguna necesidad en particular ( $E=240000 \text{ kg/cm}^2$ ,  $\nu=0.20$ ).

El estado de carga (ver fig. 1) se consideró producido por un líquido volátil, es decir, presiones constantes en la cúpula y trapecoidales en el cilindro. No se tubo en cuenta el peso propio como estado de carga.

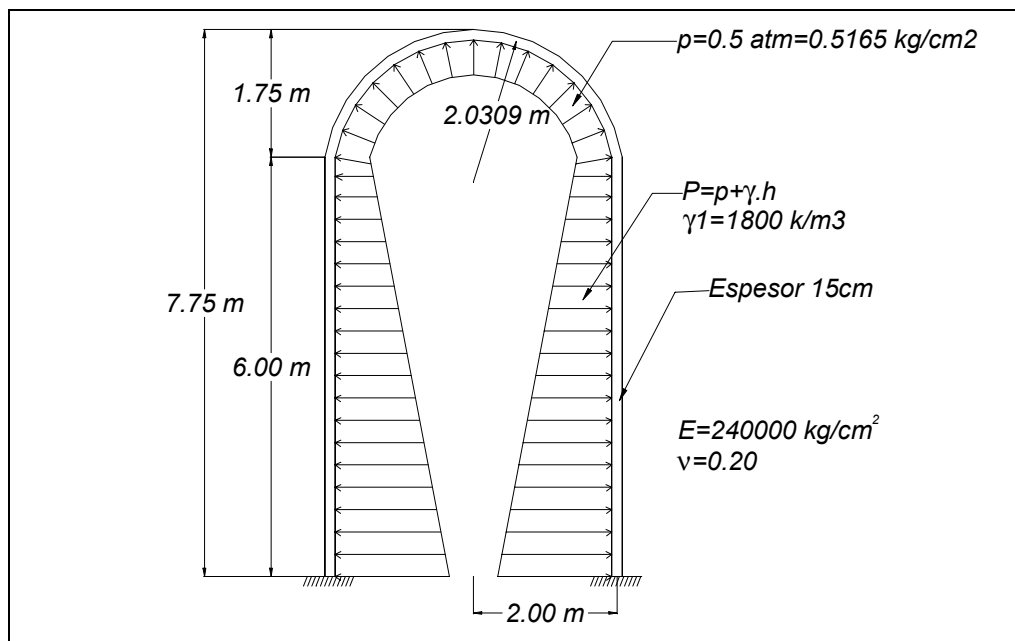


Figura N° 1: Esquema de la estructura

## 2- Solución analítica

Al ser la estructura en estudio compuesta (ver fig. 1), se hace necesario separarla para el cálculo en dos estructuras simples, ya que no hay solución directa para la estructura completa. Los esfuerzos finales en las láminas se obtienen superponiendo los esfuerzos en régimen de membrana (provocados por las cargas), con los provocados por las acciones de borde unitarias multiplicados por los verdaderos valores de las acciones de borde que se obtienen de las ecuaciones de compatibilidad en desplazamientos.

### Cálculo de interacciones

Las interacciones a calcular son  $H_c$ ,  $M_c$  y  $V$ , como la cúpula no termina tangente al cilindro es necesario descomponer  $V$  en  $N_1$  (tangencial a la cúpula) que sólo origina esfuerzos normales y  $H_1$  (horizontal), la suma de  $H_1$  y  $H_c$  dan la resultante horizontal  $H'_c$  en la cúpula. (ver fig. 2).

Hc: Fuerza de interacción horizontal entre cilindro y cúpula. Mc: Momento de interacción entre cilindro y cúpula.  
 V: Fuerza de interacción vertical entre cilindro y cúpula.

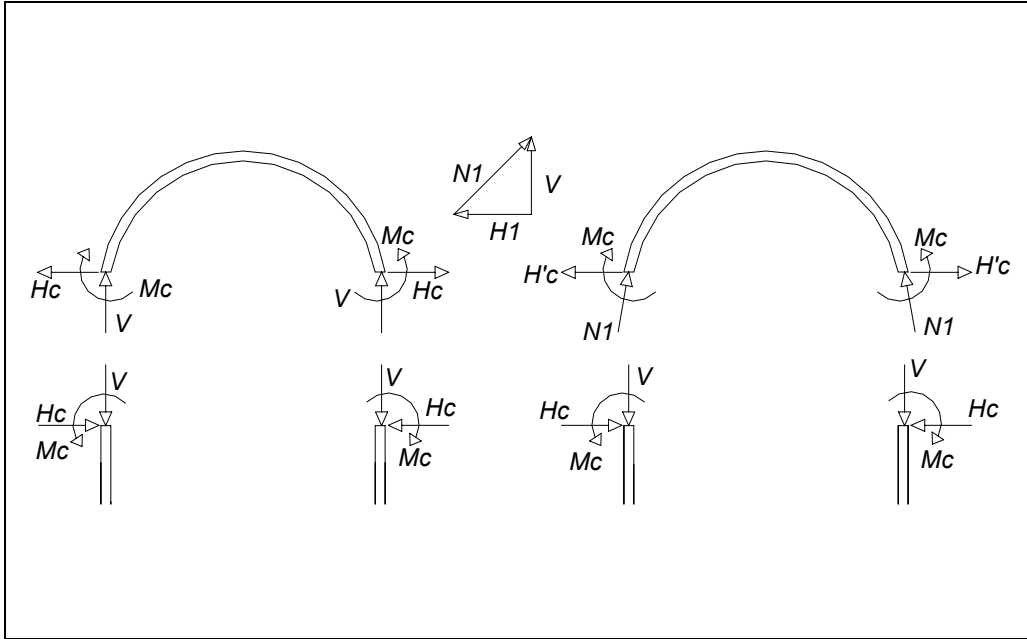


Figura N° 2: Interacciones entre cilindro y cúpula

La interacción vertical V se obtiene en forma directa al plantear el equilibrio de fuerzas verticales.

$$V = \frac{-Q}{2 \cdot \pi \cdot Rci} \quad (1)$$

Q: resultante de las presiones internas sobre la cúpula y Rci: radio medio del cilindro. Las restantes interacciones se obtienen de plantear las ecuaciones de compatibilidad en deformaciones en la intersección de las dos losas curvas.

$$\begin{aligned} \xi_{cu} + (Hc + H1) \cdot \xi_{hcu} + Mc \cdot \xi_{mcu} &= \xi_{ci} - Hc \cdot \xi_{hci} + Mc \cdot \xi_{mci} \\ \phi_{cu} + (Hc + H1) \cdot \phi_{hcu} + Mc \cdot \phi_{mcu} &= -\phi_{ci} + Hc \cdot \phi_{hci} - Mc \cdot \phi_{mci} \end{aligned} \quad (2)$$

Donde:

$\xi_{cu}$ : Deformación horizontal de la cúpula en régimen membranar.

$\phi_{cu}$ : Rotación de la cúpula en régimen membranar.

$\xi_{ci}$ : Deformación horizontal del cilindro en régimen membranar.

$\phi_{ci}$ : Rotación del cilindro en régimen membranar.

$\xi_{hcu}$ : Deformación horizontal de la cúpula bajo una carga horizontal unitaria en su base uniformemente distribuida.

$\xi_{mcu}$ : Deformación horizontal de la cúpula bajo un momento unitario en su base uniformemente distribuido.

$\xi_{hci}$ : Deformación horizontal del cilindro bajo una carga horizontal unitaria en la cabeza uniformemente distribuida.

$\xi_{mci}$ : Deformación horizontal del cilindro bajo un momento unitario en la cabeza uniformemente distribuido.

### Cálculo del cilindro

Las solicitaciones y deformaciones en el cilindro se obtienen por superposición de los estados de carga que muestra la figura 3.

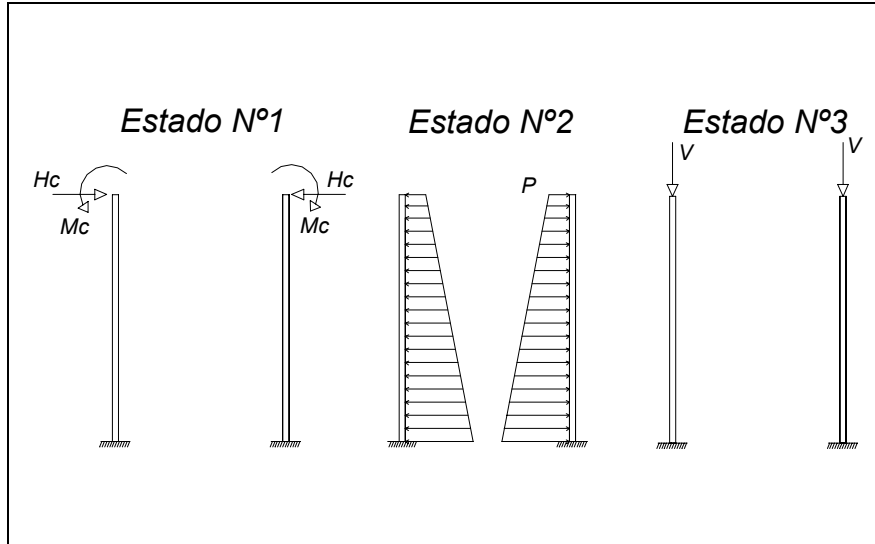


Figura N° 3: Estados de carga del cilindro

Las ecuaciones que rigen el cálculo de este tipo de losa curvas en régimen flexional fueron extraídas del texto Belluzzi [1]. La solución de la ecuación diferencial de la elástica para el caso de cilindros (ver ec. 4) está compuesta por una solución particular, que tiene en cuenta el estado de carga, y una general que tiene en cuenta las condiciones de borde de la estructura, y por ende las constantes de integración obtenidas en cada caso son diferentes.

$$\frac{E}{12 \cdot (1 - \nu^2)} \cdot \frac{d^2}{dx^2} \cdot (s^3 \xi'') + \beta \xi = p \quad (4)$$

La solución general de la ecuación diferencial (ver ec. 5) resuelve los estados de carga N°1 y N°3 bajo la hipótesis de tubo largo, calculando sus respectivas constantes; para el caso del estado de carga N°2, debido a las presiones internas aparece una solución particular (ver ec. 6)

$$\xi = C \cdot e^{-(\alpha \cdot x)} \cdot \text{sen}(\alpha \cdot x + \psi) \quad (5)$$

Donde: C y  $\psi$  son constantes de integración que dependen de las condiciones de borde,  $\alpha = \frac{2 \cdot \pi}{\lambda}$  y  $\lambda$  es la longitud de onda con que varían los desplazamientos a lo largo del cilindro  $\lambda \approx 4.83 \cdot \sqrt{R \cdot s}$ , siendo R el radio y s el espesor.

$$\xi = K_1 + K_2 \cdot x \quad (6)$$

Donde:  $K_1$  y  $K_2$  son constantes que se obtienen al remplazar  $\xi$  en la ecuación diferencial.

Una vez resuelta la ecuación diferencial y obtenido  $\xi$ , las solicitaciones y deformaciones son calculadas en función de éste.

#### Cálculo de la cúpula

En este caso también las solicitaciones y deformaciones se obtienen por superposición de distintos estados (ver fig.4). Uno membranar debido a las cargas y otro flexional debido a las acciones de borde.

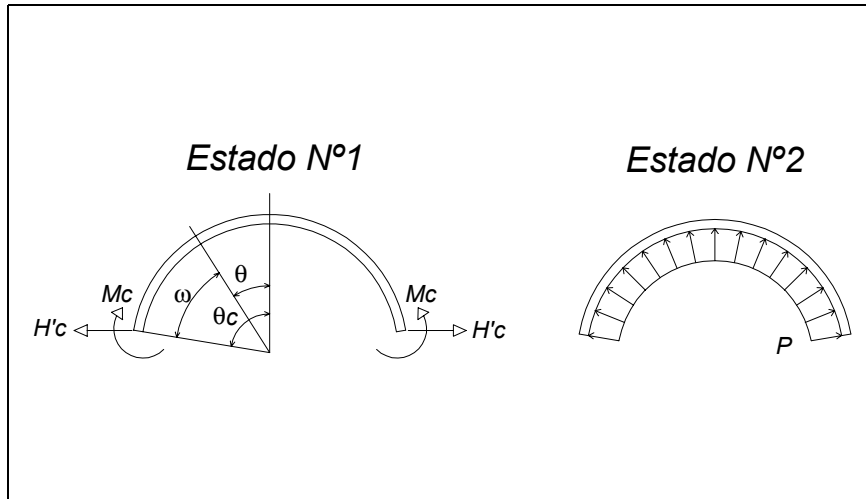


Figura N° 4: Estados de carga de la cúpula

La solución de losas curvas está dada por un sistema de ecuaciones diferenciales [4], la solución de este sistema de ecuaciones está compuesto por una solución general, y una solución particular.

Como solución general se utilizó la ecuación diferencial simplificada de Geckeler (ver ec. 7) cuya solución (ver ec. 8) tiene en cuenta la acción de borde en la cúpula y su rápido amortiguamiento antes de llegara a la cúspide.

$$\frac{d^4 T}{d\theta^4} + 4 \cdot \gamma^4 \cdot T = 0 \quad (7)$$

$$T = C \cdot e^{-(\gamma \cdot \omega)} \cdot \text{sen}(\gamma \cdot \omega + \psi) \quad (8)$$

Donde: C y  $\psi$  son constantes de integración que dependen de las condiciones de borde,  $\gamma = R \cdot \alpha$ , quedando la

longitud de onda  $\lambda = \frac{2 \cdot \pi}{\gamma} \approx 4.83 \cdot \sqrt{\frac{s}{R}}$  y  $\omega = (\theta_c - \theta)$ ;  $\theta$ ,  $\theta_c$ ,  $\omega$  se ven indicados en la figura 4.

La solución particular puede obtenerse en forma aproximada mediante el régimen de membrana y tiene en cuenta el estado interno de carga. Ésta es más exacta cuanto menor es el espesor de la losa.

### 3- Solución numérica por el Método de los Elementos Finitos

La estructura se resolvió como un problema axil simétrico, debido a la simetría de revolución, de la geometría de vínculos y cargas. Las mallas fueron densificadas en las zonas donde los esfuerzos presentaban grandes variaciones, como ser cerca del empotramiento y en la zona de encuentro cilindro-cúpula; estas zonas se conocían debido a que se había calculado la longitud de onda de esfuerzos y deformaciones (cilindro  $\lambda=2.64\text{m}$ , cúpula  $\lambda=1.31\text{m}$ ).

Los vínculos se impusieron restringiendo todos los grados de libertad en los nodos inferiores (empotramiento), y los desplazamiento horizontales en los nodos ubicados sobre el eje de simetría (continuidad de la cúpula), ya que estos puntos no se desplazan horizontalmente por la axil simetría.

Se adoptó más de un elemento en el espesor para poder captar la variación de tensiones en el mismo. Para la malla procesada en el programa Elástico [3] se colocaron dos elementos de ocho nodos cada uno (Q8) en el espesor; y para la procesada con PCFEAP, cuatro elementos de cuatro nodos cada uno (Q4).

Los resultados obtenidos de los programas de elementos finitos son tensiones en las direcciones x e y (horizontal y vertical), en consecuencia para poder realizar la comparación con solución analítica (cuyos resultados son esfuerzos) fue necesario transformar dichas tensiones en esfuerzos. Esto se logra calculando la resultante de la distribución de las tensiones en el espesor y reduciéndola al eje baricéntrico de la sección; luego el momento que resulta de la reducción es el que se considera como sollicitación de flexión. Además los programas entregan siempre las tensiones según las dos direcciones de trabajo (horizontal y vertical), en consecuencia para calcular las sollicitaciones en la cúpula fue necesario realizar la rotación de las tensiones, para obtener las tensiones normales y tangenciales al espesor.

Características de las mallas procesadas:

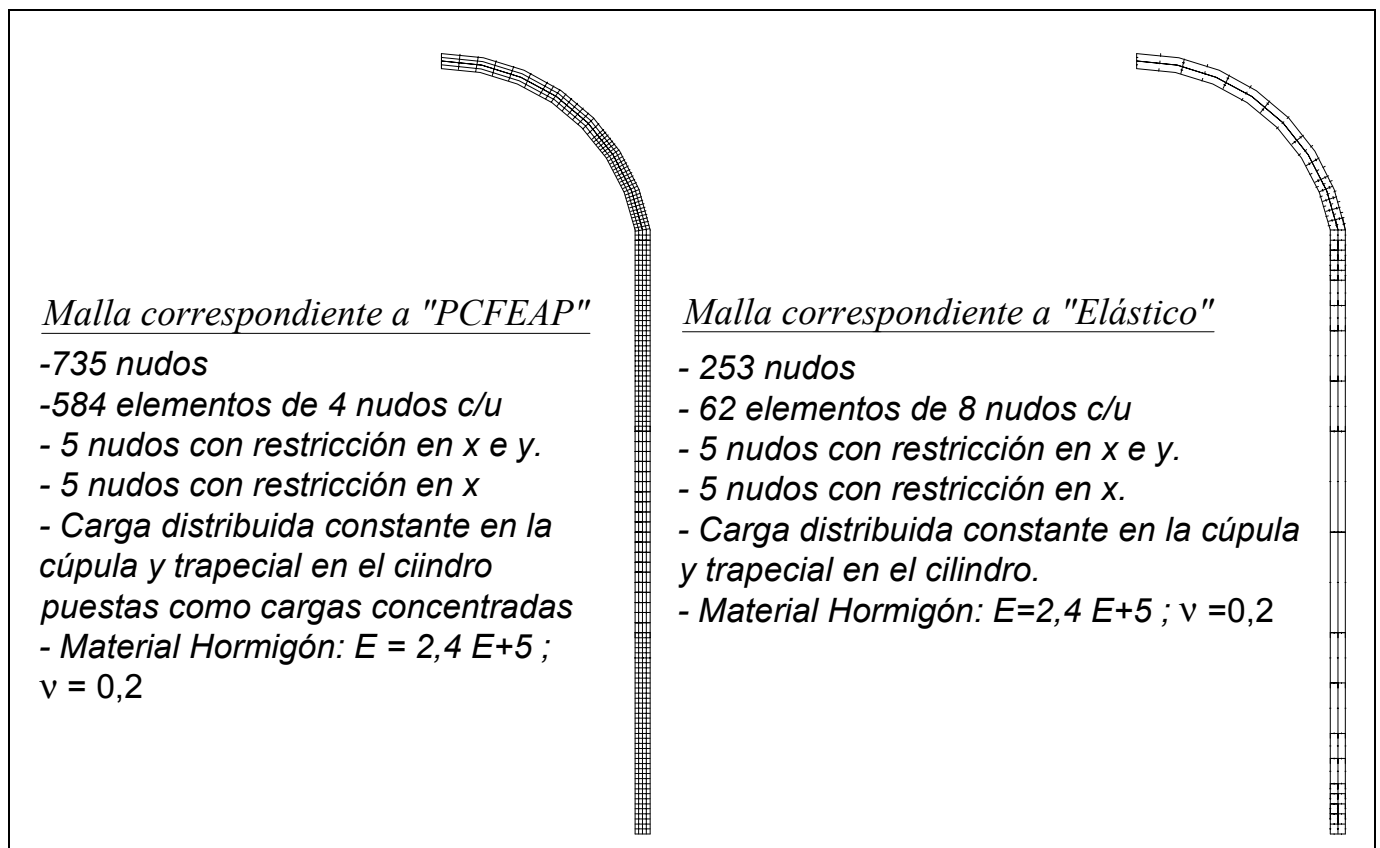


Figura N° 5: Características de las mallas

Puede observarse en la figura 5 que la presión interna en el programa PCFEAP, fue introducida como cargas concentradas, siendo esta en realidad distribuida. La causa de esto fue que el programa no contaba con una herramienta para introducirla como distribuida. La carga concentrada se cálculo teniendo en cuenta su área de influencia (de un radian de ancho), por la intensidad de la carga distribuida.

#### 4- Comparación de resultados

Para una comparación visual, se realizaron gráficos superponiendo los tres resultados obtenidos en una misma figura. La comparación se compone de cuatro gráficos: deformada de la cúpula (ver fig. 6); deformada del cilindro (ver fig. 7); momento en el plano del meridiano (M1) en la cúpula (ver fig. 8); y momento en el plano del meridiano (M1) del cilindro (ver fig. 9).

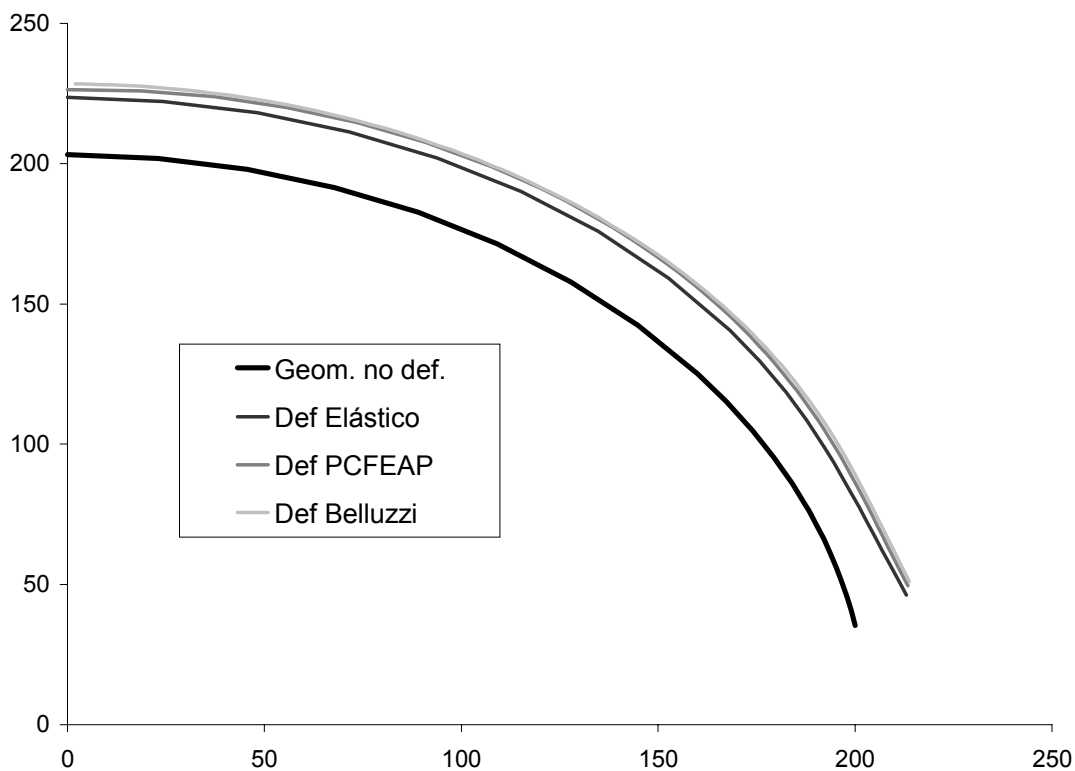


Figura N° 6: Deformada de la cúpula

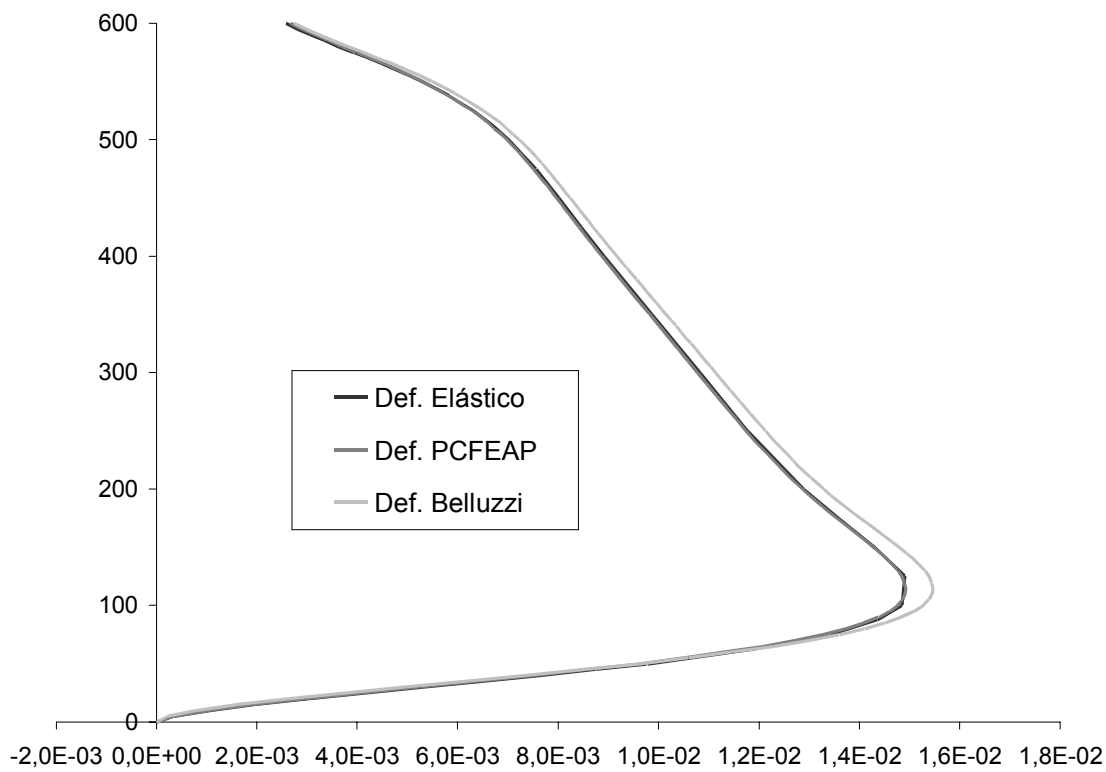


Figura N° 7: Deformada del cilindro

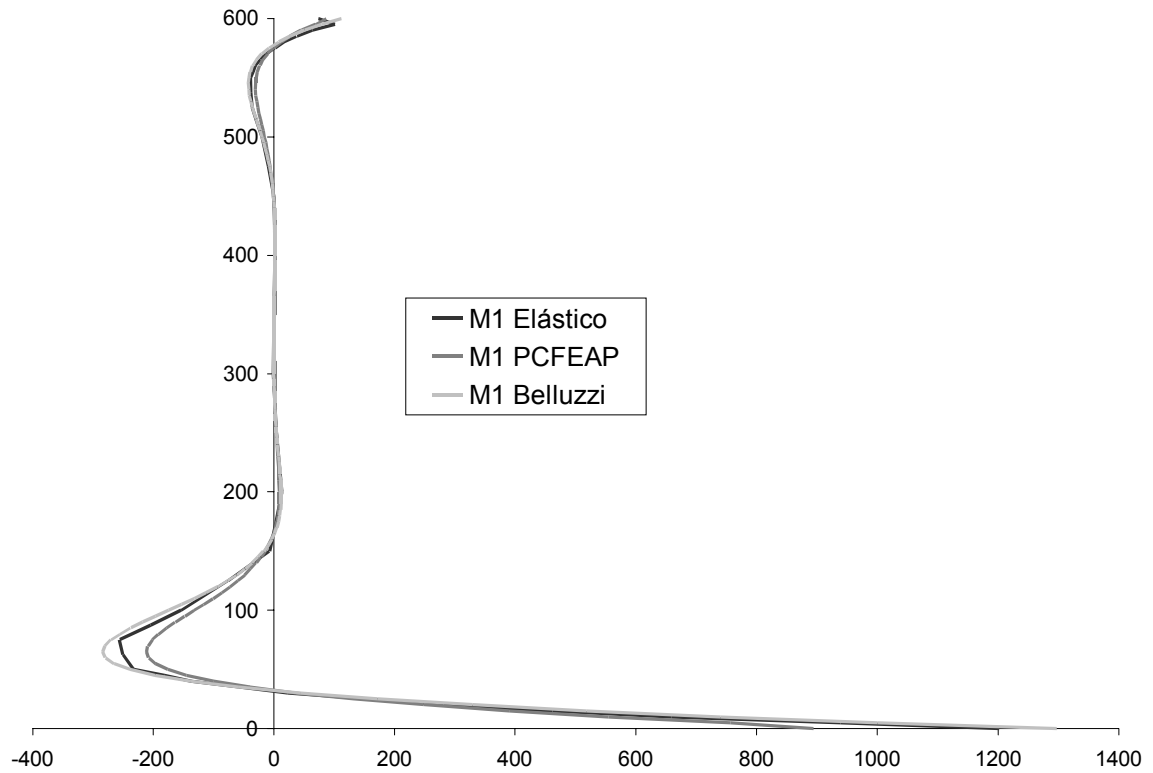


Figura N° 8: Momento en el plano del meridiano para el cilindro (M1)

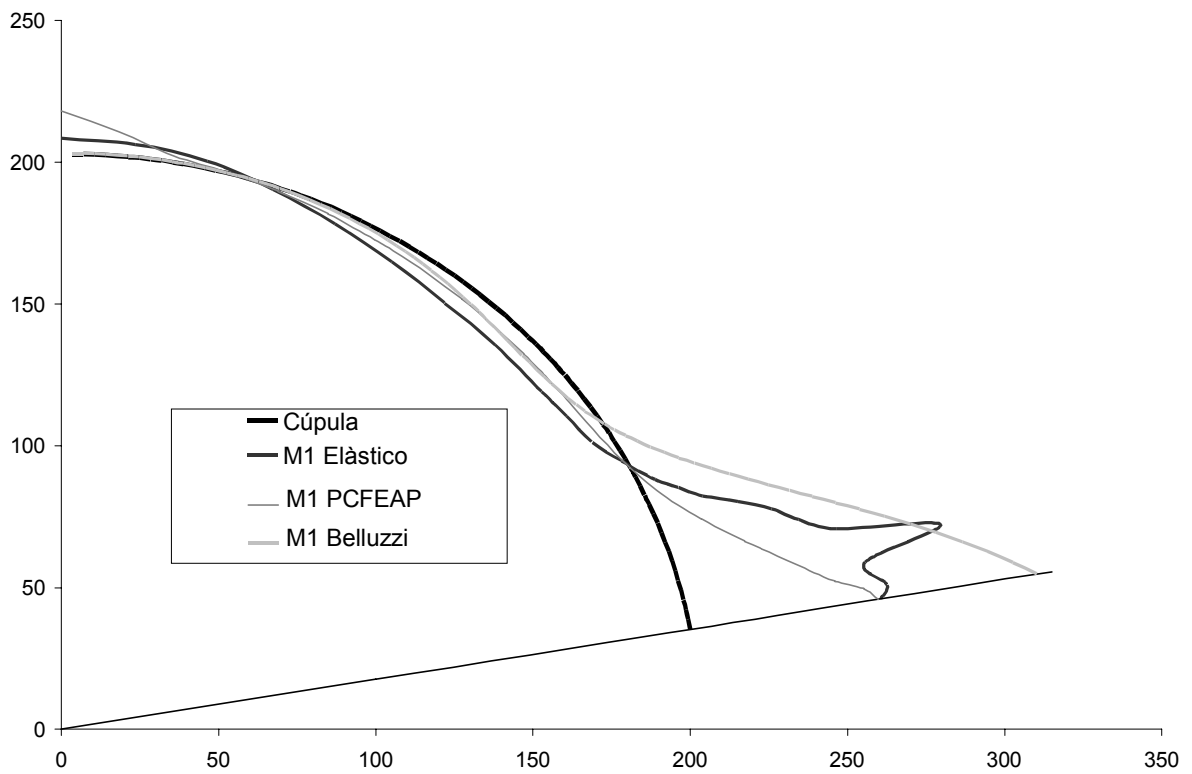


Figura N° 9: Momento en el plano del meridiano para la cúpula (M1)



Además se adjunta un cuadro comparativo de errores con respecto a la solución analítica. Estos errores fueron calculados para algunos valores significativos, pero de ninguna manera dan con exactitud el error del método.

<b>TABLA COMPARATIVA DE ERRORES</b>					
<i>parámetro</i>	<i>BELLUZZI</i>	<i>ELÁSTICO</i>	<i>PCFEAP</i>	$\varepsilon$ <i>Elástico %</i>	$\varepsilon$ <i>PCFEAP %</i>
$\xi_{ci}$ (6m)	0,002753	0,00258535	0,0026771	<b>6,09</b>	<b>2,76</b>
$\xi_{ci}$ (3m)	0,0111441	0,010828	0,0107758	<b>2,84</b>	<b>3,30</b>
$\xi_{cu}$ (40°)	0,00151186	0,00140268	0,001559432	<b>7,22</b>	<b>3,15</b>
$\eta_{ci}$ (6m)	0,00269375	0,00217367	0,002840312	<b>19,31</b>	<b>5,44</b>
$\sigma_{ci}$ (6m)	6,430541333	4,70576	5,9726	<b>26,82</b>	<b>7,12</b>
$\sigma_{ci}$ (3m)	3,369811733	3,15834	3,4375	<b>6,28</b>	<b>2,01</b>
$\sigma_{ci}$ (0m)	38,071984	36,2105	27,996	<b>4,89</b>	<b>26,47</b>
<b>promedio deformaciones</b>				<b>8,86</b>	<b>3,66</b>
<b>promedio tensiones</b>				<b>12,66</b>	<b>11,87</b>

## 5- Conclusiones

- A- La solución analítica es laboriosa debido a la resolución exacta de las ecuaciones diferenciales, pero tiene como ventaja que se pueden conocer las solicitaciones en forma directa.
- B- Aparentemente la resolución por el Método de los Elementos Finitos fue buena, pero seguramente se podrían haber logrado mejores resultados, si se hubiera contado con más experiencia en el modelado de éste tipo de problemas. Es importante señalar la necesidad de contar con usuarios muy bien formados como requisito para obtener buenos resultados.
- C- Para estos casos, en que es posible una comparación del método de los Elementos Finitos con una solución analítica, se puede tener una idea del grado de aproximación del programa y de su correcta forma de uso. Sin duda que el método numérico se hace imprescindible en numerosos problemas en los cuales no existe solución analítica alguna, y para una correcta utilización de éste es fundamental haber realizado primero trabajos de comparación para no cometer errores, que pueden ser muy groseros, en la utilización del método.
- D- Los resultados por MEF, correspondiente a desplazamientos dan mejor o se aproximan más que las solicitaciones, esto se debe a que el método basa su solución en la compatibilidad de deformaciones, para luego calcular las tensiones por medio de los desplazamientos ya obtenidos. Además debe tener en cuenta que las tensiones utilizadas corresponden a las tensiones nodales.
- E- La malla modelada con elementos Q8 fue más ventajosa que la malla modelada con Q4 debido a que, los elementos de 8 nudos pueden copiar la deformada real con menor cantidad de elementos a igual precisión que los elementos de 4 nudos, permitiendo que la carga de datos sea más ágil, y además que los tiempos de procesamiento sean menores.
- F- Es muy bueno utilizar como herramienta de cálculo el Método de los Elementos Finitos, siempre y cuando haya buen criterio en empleo del método y un análisis crítico y racional de los resultados.
- G- El trabajo realizado fue muy positivo como experiencia para el futuro y, sobre todo, como incentivo personal para encarar con más confianza trabajos futuros.

## Referencias

- [1] Belluzzi "Ciencia de la construcción", Tomo III, Cap. 27 y 28
- [2] O. C. Zienkiewicz and R. L. Taylor "The Finite Element Method", Volume 2, Chapter 16, 4<sup>th</sup> Edition, Mc Graw Hill, 1991
- [3] D. R. J. Owen and E. Hinton, "Finite Element in Plasticity: Theory and Practice", Pineridge Press, 1980.
- [4] Belluzzi "Ciencia de la construcción", Tomo III, Cap. 28, ec. [28-54]