MECOM 99
Mendoza
6-10 de septiembre de 1999

LA ECUACION DIFERENCIAL ORDINARIA DE ORDEN N CON COEFICIENTES VARIABLES . Casos NL1-1/2 , NL2B-1/2

Horacio Retamales

Grupo LAMA UTN-FRM
Rodríguez Nº 273 - Mendoza

Resumen

En este trabajo se extiende, al caso de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales(edonl), el procedimiento recursivo presentado en la referencia [1], para el cálculo del Taylor de la solución de la edo en un punto de su dominio. Se plantean diferentes alternativas algorítmicas según la forma de las condiciones iniciales del problema diferencial. Se plantean además alternativas según el tipo de no linealidad de la edonl. Los algoritmos resultantes se adaptan a implementaciones en FORTRAN y/o MATLAB. Se desarrollan ejemplos numéricos

Abstrac

In this paper, the recursive procedure for calculating of a Taylor of the edo's solution at a domain point, presented in reference [1], is extended to nonlinear ordinary differential equations (edonl). Different algorithmic alternatives are presented here depending on type of initial conditions of the differential problem. Also alternatives depending on edonl's non linearity types are presented. Resulting algoritmics are able to be implemented in Fortran and/or Matlab codes. Numerical examples are presented.

Introducción

Sea la siguiente edo de orden n con coeficientes variables

$$\sum_{i=0}^{n} a_j(x)\, y^{(i)}(x) = f(x) \qquad (1)$$

La propiedad que sigue es la planteada en la referencia [1] y adaptada al caso presente:

Propiedad:

Si $f : x \to y = f(x)\ ;\ x \in [a,b]$ (2)

es solución de la ecuación diferencial ordinaria (edo) de coeficientes variables (1), entonces el vector(el Taylor de y en x):

$$Y'(x) = \{y, y', y'', \ldots., y^{(i)}, \ldots.\}_x \qquad (3)$$

de valores de función y derivadas de (2) en x, es tal que:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i(x)\, y^{(r+i)}(x) = f^{(r)};\quad para\ todo\ r > 0\ y\ todo\ x \in (a,b) \qquad (4)$$

En la referencia [1] hemos planteado el problema de resolver numéricamente una edo lineal de coeficientes constantes por un procedimiento recursivo que adaptaremos al caso de una edonl como (1) y adecuadas condiciones iniciales. La matriz del sistema de ecuaciones algebraicas no lineales (senl) que permite calcular el Taylor de la solución en un punto interior de [a,b], contendrá en las primeras filas una por cada una de estas condiciones iniciales y las filas inferiores serán tantas como necesarias hasta completar el número de componentes del Taylor y se plantean por aplicación de la propiedad enunciada arriba, que denominaremos las ***filas correspondientes a las relaciones diferenciales***. La forma de tal matriz será entonces como sigue:

$$\begin{bmatrix}
1 & \Delta x_1 & . & \Delta x_1^{''} & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
a_0 & a_1 & . & a_n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
a_0^{'} & a_1^{'}+a_0 & . & a_{n-1}+a_n^{'} & a_n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
a_0^{''} & . & . & a_{n-2}+a_{n-1}^{'}+a_n^{(2)} & a_{n-1}+a_n^{'} & a_n & 0 & 0 & 0 & 0 \\
a_0^{(3)} & . & . & a_{n-3}+a_{n-2}^{'}+a_{n-1}^{(2)}+a_n^{(3)} & . & a_{n-1}+a_n^{'} & a_n & 0 & 0 & 0 \\
a_0^{(4)} & . & . & . & . & . & a_{n-1}+a_n^{'} & a_n & 0 & 0 \\
a_0^{(5)} & . & . & . & . & . & . & a_{n-1}+a_n^{'} & a_n & 0 \\
a_0^{(6)} & a_1^{(6)}+a_0^{(5)} & . & \sum_{i=0}^{5} a_{n-1}^{(6-i)} & \sum_{i=0}^{4} a_{n-1}^{(5-i)} & \sum_{i=0}^{3} a_{n-1}^{(4-i)} & \sum_{i=0}^{2} a_{n-1}^{(3-i)} & a_{n-2}+a_{n-1}^{'}+a_n^{(2)} & a_{n-1}+a_n^{'} & a_n
\end{bmatrix} \quad (*)$$

El vector de términos independientes del senl de arriba tendrá sus primeras componentes dadas por las condiciones iniciales correspondientes y las últimas filas serán las derivadas del término independiente de (1).

El vector de incógnitas del senl, será el Taylor de la solución de la edonl, en un punto interior de [a,b].

La no linealidad del senl anterior puede presentarse en dos tipos:

-NL1:Dependiente de la posición del punto en el dominio, ó
-NL2:Dependiente de las componentes del Taylor (incógnitas del senl).

La extensión de la recursividad (desarrollada para edo lineal)al caso NL1, puede plantearse como **recursividad con relación variable** cuando el del caso lineal sería entonces **recursividad con relación constante**.
Por otra parte, el caso NL1, como en el caso lineal, se dividiría en dos alternativas:

-NL1-1.-Los valores iniciales de la sucesión recursiva coinciden con las condiciones iniciales del problema diferencial, y
-NL1-2.Los valores iniciales de la sucesión recursiva no coinciden con las condiciones iniciales del problema diferencial.

La primera alternativa NL1-1, se resuelve mediante la generación de la sucesión recursiva de relación variable. Lo que supone el paso previo de generación de la matriz (*) en la que cada fila de relaciones diferenciales contiene los coeficientes de la relación recursiva en función del índice de la sucesión.
La segunda alternativa NL1-2, incorpora un paso adicional: el cálculo de los valores iniciales (vi) de la sucesión recursiva(sr) a partir de las condiciones iniciales del problema diferencial.

El cuadro que sigue muestra la clasificación descripta arriba y los procedimientos que corresponden a cada caso.

Se observa que la recursividad es aplicable a todos los casos excepto al NL2A-2.
La compactación del seanl es necesaria en los casos NL1-2 y NL2B-2 para el cálculo de los
vi de la sucesi'on recursiva mediante la que se calcula el Taylor. En el caso NL2B-2 el grado de compactación depende de la diferencia entre el grado de las derivadas de las componentes del Taylor que aparecen en la matriz del seanl y la correspondiente componente del Taylor.

Cuadro 1. CLASIFICACION DE CASOS SEGUN EL TIPO DE NOLINEALIDAD Y CONDICIONES INICIALES.

	No linealidad dependiente de la posición	No linealidad dependiente de las componentes del Taylor	No linealidad dependiente de las componentes del Taylor
		Baja dependencia	Alta dependencia
Vi coinciden con cond. iniciales	NL1-1 Procedimiento: 1.Construcción de la matriz del seal y columna de los términos independientes. 2.Cálculo del Taylor recursivamente. 3.Cálculo de los valores nodales sobre la red que discretiza el dominio	NL2B-1 Procedimiento: 1.Construcción de la matriz del seal y columna de los términos independientes. 2.Cálculo del Taylor recursivamente. 3.Cálculo de los valores nodales sobre la red que discretiza el dominio	NL2A-1 Procedimiento: 1.Construcción de la matriz del seal y columna de los términos independientes. 2.Cálculo del Taylor recursivamente con relación variable y pasos no lineales. 3.Cálculo de los valores nodales sobre la red que discretiza el dominio
Vi no coinciden con cond. iniciales	NL1-2 Procedimiento: 1.Construcción de la matriz del seal y columna de los términos independientes. 2.Compactación del seanl. 3.Cálculo de los vi de la sucesión recursiva a partir de las cond. iniciales 4. Cálculo del Taylor recursivamente. 5.Cálculo de los valores nodales sobre la red que discretiza el dominio	NL2B-2 Procedimiento: 1.Construcción de la matriz del seal y columna de los términos independientes. 2.Compactación parcial del seanl. 3.Cálculo de los vi de la sucesión recursiva a partir de las cond. iniciales 4.Cálculo del Taylor recursivamente. 5.Cálculo de los valores nodales sobre la red que discretiza el dominio	NL2A-2 Procedimiento: 1.Construcción de la matriz del seal y columna de los términos independientes. 2.Cálculo del Taylor mediante pasos no lineales sucesivos. 3.Cálculo de los valores nodales sobre la red que discretiza el dominio

Veamos los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1:

a.Recursividad con relación variable(NL1-1).Los vi de la sr coinciden con las condiciones iniciales del problema diferencial.

b.Recursividad con relación variable(NL1-2).Los vi de la sr no coinciden con las condiciones iniciales del problema diferencial.

Sea la edo:

$$-2y'' + 2xy + y = x^2 + 1$$

Las condiciones iniciales:

$$x_1 = 1.5\ ;\ y_1 = 0$$
$$x_2 = -1\ ;\ y_2 = 3$$

El punto de cálculo del Taylor es:

Mediante la aplicación del MIF planteamos el siguiente seanl:

$$\begin{bmatrix} 2x_0 & \Delta x & \dfrac{\Delta x^2}{2!} & \dfrac{\Delta x^3}{3!} & & & \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ 1 & 2x_0 & -2 & & & & \\ & 3 & 2x_0 & -2 & & & \\ & & 5 & 2x_0 & -2 & & \\ & & & 7 & 2x_0 & -2 & \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} y_0 \\ y_0^I \\ y_0^{II} \\ y_0^{III} \\ y_0^{IV} \\ . \\ . \\ . \\ . \\ . \\ . \\ \\ \\ \\ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ x_0^1 + 1 \\ 2x_0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ . \\ . \end{bmatrix} \qquad \text{(iii)}$$

El seal (iii) se resolvió para Taylors de 10, 25, 30 y 35 componentes y los resultados del cálculo del valor de y en 0 , se indican a continuación:

Nro. de Componentes del Taylor	$y(x_3)$	f3
n=20	1.77811311297623	1.77789290706550
n=25	1.78018151308610	1.78018286169641
n=30	1.78013756616032	1.78013756142858
n=35	1.78013808918774	1.78013808919782
n=50	1.78013808522930	1.78013808524224

La segunda columna corresponde a los valores de $y(x_3)$ a partir del Taylor de y en x_0 como solución del sistema (iii)(Caso NL1-2) . La tercera columna corresponde a los valores de $y(x_3)$ a partir del Taylor de y en x_1 calculado mediante una sucesión recursiva con vi calculados a partir del Taylor en x_0 (Caso NL1-1).

El caso NL2, se presenta también con dos alternativas:

-NL2B.No linealidad con baja dependencia de las componentes del Taylor.
-NL2A.No linealidad con alta dependencia de las componentes del Taylor.

Indicamos por ***No linealidad con baja dependencia de las componentes del Taylor*** al caso en que los coeficientes de la relación diferencial contengan a la solución y/o derivadas de la misma **hasta un orden inferior** al de la máxima derivada que aparece en la ecuación diferencial. E indicamos por ***No linealidad con alta dependencia de las componentes del Taylor*** al caso en que los coeficientes de la relación diferencial contengan a la solución y/o derivadas de la misma **hasta un orden igual** al de la máxima derivada que aparece en la ecuación diferencial.
En cada una de estas alternativas se pueden presentar los dos casos de coincidencia entre los vi con las condiciones iniciales del problema diferencial, como en el caso de recursividad de relación variable. El caso no lineal de baja dependencia de las componentes del Taylor (NL2B-1 y NL2B-2)no presentan diferencia. Tampoco aparece diferencia esencial en el caso NL2A-1.La diferencia entre aquellos y el caso presente, aparece en la alternativa de alta dependencia con las componentes del Taylor con condiciones iniciales no coincidentes con los vi de la sc (NL2A-2), constituída en el tipo de no linealidad del paso recursivo. Cada término de la sc se calcula resolviendo una ecuación no lineal.
En los casos NL1-1, NL2B-1 la sr se calcula directamente de las condiciones iniciales, previo calculo de la matriz de las relaciones recursivas variables.
En los casos NL1-2 y NL2B-2 se deben calcular los vi de la sr a partir de las condiciones iniciales del problema diferencial para iniciar el de la sr. En NL1-2 se puede introducir la compactación del seanl para el cálculo de los vi de la sr.
NL2A-1 y NL2A2-2 requieren tratamiento específico.

Ejemplo 2:
a.Caso NL2B-1:Recursividad con relación dependiente de las componentes del Taylor y de baja dependencia.Los valores iniciales de la sr coinciden con las condiciones iniciales del problema diferencial.
b.Caso NL2B-2:Recursividad con relación dependiente de las componentes del Taylor y de baja dependencia.Los vi de la sr no coinciden con las condiciones iniciales del problema diferencial.

Sea la edo:

$$y''' + 0.5\, y\, y'' = 0 \qquad \text{(iv)}$$

con las condiciones iniciales:

$$y(0) = 0\,;\; y'(0) = 0\,;\; y'(10) = 1 \qquad \text{(v)}$$

Para el calculo del Taylor de y en x_0, resolvemos progresivamente el sistema partiendo del seal de orden 3 formado con las tres primeras componentes del Taylor. La única componente incógnita es y"(0). Es posible incrementar el orden del nuevo seal a resolver, a 4 y calcular así la cuarta componente del Taylor y recalcular las tres primeras. Este proceso se continúa

$$\begin{bmatrix} 1 & \Delta x & \dfrac{\Delta x^2}{2!} & \dfrac{\Delta x^3}{3!} & & & \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & \dfrac{y_0}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{y_0^{'}}{2} & \dfrac{y_0}{2} & 1 & & \\ 0 & 0 & \dfrac{y_0^{''}}{2} & y_0^{'} & \dfrac{y_0}{2} & 1 & \\ 0 & 0 & \dfrac{y_0^{'''}}{2} & 3*\dfrac{y_0^{''}}{2} & 3*\dfrac{y_0^{'}}{2} & \dfrac{y_0}{2} & 1 \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} y_0 \\ y_0^{I} \\ y_0^{II} \\ y_0^{III} \\ y_0^{IV} \\ . \\ . \\ . \\ . \\ . \\ . \\ \\ \\ \\ \\ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{(0)} \\ y_{(0)}^{'} \\ y_{(10)}^{''} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ . \\ . \end{bmatrix} \qquad \text{(vi)}$$

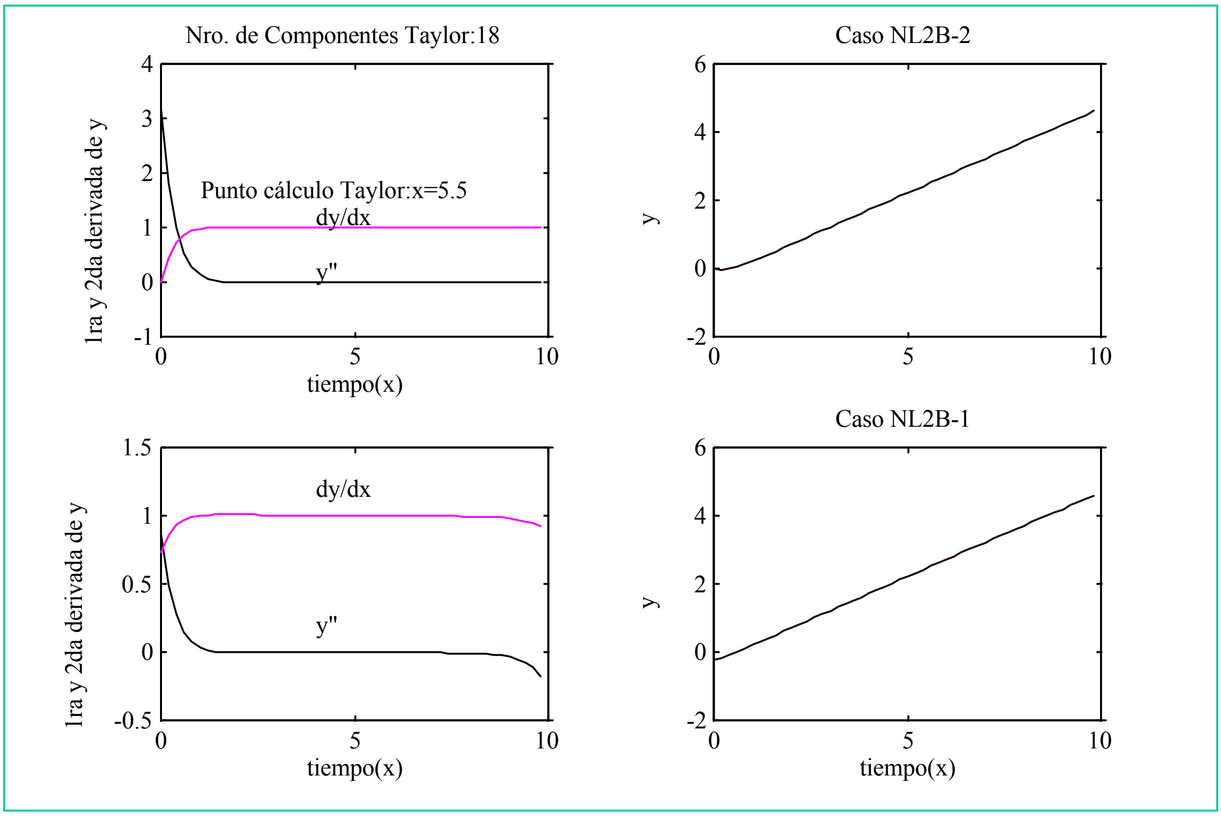
hasta el orden que exija la precisión prefijada.

Las gráficas adjuntas muestran los resultados obtenidos:

Las dos figuras superiores corresponden al caso NL2B-2. Las dos inferiores corresponden al caso NL2B-1, en donde valores iniciales corresponden a las tres primeras componentes del Taylor de y en el punto x=5.5 calculado a partir del sistema (iii) y el algoritmo descripto. Las restantes componentes del Taylor en x=5.5 se calcula aquí recursivamente.

La precisión de los resultados es muy sensible a la posición del punto de cálculo del Taylor. También se tienen dificultades en relación con el aumento del número de componentes del Taylor. Las pruevas para 19 y 20 componentes y diferentes puntos de cálculo del Taylor, no dieron buenos resultados.

Los casos NL2A-1 y NL2A-2 se presentan en trabajo separado.



Referencias

1. H.E.Retamales
 Solución numérica de ecuaciones diferenciales ordinarias por el método de los incrementos finitos (MIF). Una propiedad de las soluciones.
 LAMA-UTN.Mendoza, dic.1996.
2. H.E.Retamales
 S OLUCIÓN NUMÉRICA DE ECUACIONES DIFERENCIALES EN DERIVADAS PARCIALES POR EL MéTODO DE LOS INCREMENTOS FINITOS(MIF) .Una propiedad de las soluciones de eddp lineales con coeficientes constantes. PARTE 1
 LAMA-UTN-Mendoza, dic.1996
3. H.E.Retamales
 S OLUCIÓN NUMÉRICA DE ECUACIONES DIFERENCIALES EN DERIVADAS PARCIALES POR EL MéTODO DE LOS INCREMENTOS FINITOS(MIF) .Una propiedad de las soluciones de eddp lineales con coeficientes constantes. PARTE 2
 LAMA-UTN-Mendoza, dic.1996