

## **ANÁLISIS DE LA CONVECCIÓN NATURAL DE UN FLUIDO CON GENERACIÓN INTERNA DE CALOR EN UNA CAVIDAD CUADRADA**

**Javier León, Diego Celentano y Marcela Cruchaga**

*Departamento de Ingeniería Mecánica*

*Universidad de Santiago de Chile*

*Av. Lib. Bdo. O'Higgins 3363 – Santiago de Chile – CHILE*

*e-mail: [dcelenta@lauca.usach.cl](mailto:dcelenta@lauca.usach.cl)*

### **RESUMEN**

En el presente trabajo se realiza el análisis de la convección natural de un fluido con generación interna de calor utilizando el método numérico de elementos finitos. La metodología empleada para obtener la solución de las ecuaciones bidimensionales acopladas de Navier-Stokes para flujo incompresible y el balance de energía pertenece a las técnicas de ponderación a contracorriente. El sistema de ecuaciones resultante se resuelve mediante un esquema incremental iterativo convergido que no relaja el grado de acoplamiento. Para estudiar este fenómeno se analiza una cavidad cuadrada, con paredes isotérmicas rígidas, para regímenes laminares del movimiento del fluido y para diferentes números de Rayleigh. Los resultados obtenidos son comparados con otras soluciones existentes en la bibliografía.

### **ABSTRACT**

A finite element analysis of the natural convection of a fluid with internal heat generation is presented. The numerical solution for the thermally coupled incompressible Navier-Stokes equations is obtained in the framework of the generalized streamline operator technique. The resulting system of equations is solved via an incremental-iterative-converged scheme that preserves the degree of coupling. A laminar thermally induced cavity flow is studied for different Rayleigh numbers. The obtained results are compared with other existing solutions.

### **INTRODUCCIÓN: OBJETIVOS Y METODOLOGÍA DE ANÁLISIS**

Las motivaciones del análisis de la convección natural originada en un fluido producto de la generación interna de calor surgen de la necesidad de describir fenómenos como los que se producen en fluidos radioactivos, cambios de fase líquido-sólido, reacciones químicas, etc. El factor seguridad en el caso del enfriamiento de reactores nucleares o los aspectos de calidad y costos en el caso de la fabricación de productos con procesos térmicos, hacen indispensable tratar de predecir el comportamiento de este fenómeno.

Los objetivos planteados de este trabajo son: analizar el fenómeno de la convección natural en un fluido con generación interna de calor por medio de la metodología de elementos finitos, estudiar la incidencia en el comportamiento del fenómeno de la variación del número de Rayleigh (el cual indica el grado de acoplamiento entre el problema de la mecánica de fluidos y el problema térmico) y, por último, validar los resultados obtenidos con los de otros autores <sup>[1]</sup> para así aportar otra herramienta con distinta metodología en la solución de problemas similares.

La solución del sistema de ecuaciones que modela el problema planteado no se puede obtener en forma analítica, por lo que se debe recurrir al cálculo numérico para obtener soluciones aproximadas. En este caso se propone utilizar el método de elementos finitos para la discretización espacial de las ecuaciones diferenciales que describen

el fenómeno estudiado. La metodología utiliza funciones de ponderación a contracorriente definidas en forma generalizada <sup>[2,3]</sup> que permiten describir el problema en sus variables primitivas (velocidad, presión y temperatura) interpoladas con polinomios de igual orden. Para la discretización de la parte temporal de las ecuaciones diferenciales se utiliza un esquema de diferencias finitas implícito. La resolución del sistema de ecuaciones resultante se realiza mediante un esquema del tipo Newton-Rapshon incremental iterativo convergido en donde el criterio de convergencia se escribe en base a los residuos y no se avanza en el tiempo hasta asegurar simultáneamente la convergencia numérica deseada en ambas ecuaciones <sup>[2,3]</sup>.

## ECUACIONES QUE GOBIERNAN EL PROBLEMA

Las ecuaciones que gobiernan el fenómeno de la convección natural en régimen laminar para un fluido Newtoniano se presentan a continuación (escritas en forma vectorial):

- Ecuación de continuidad:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad \text{en } \Omega \times \tau$$

- Ecuación de balance de la cantidad de movimiento:

$$\rho \partial \mathbf{v} / \partial t + \rho (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \nabla p - \nabla \cdot (2\mu \boldsymbol{\varepsilon}) = \rho \mathbf{b} \quad \text{en } \Omega \times \tau$$

- Ecuación de energía:

$$\rho c (\partial T / \partial t + \mathbf{v} \cdot \nabla T) = \nabla \cdot (k \nabla T) + \rho r \quad \text{en } \Omega \times \tau$$

En las ecuaciones anteriores la notación empleada es:  $\rho$  es la densidad,  $\mu$  es la viscosidad dinámica,  $c$  es el calor específico,  $k$  es el coeficiente de conductividad térmica,  $\mathbf{v}$  es el vector velocidad,  $T$  es la temperatura,  $p$  es la presión,  $\boldsymbol{\varepsilon}$  es el tensor velocidad de deformación,  $\nabla$  es el operador gradiente,  $r$  es la fuente de calor específica,  $\mathbf{b}$  es la fuerza de volumen teniendo en cuenta la aproximación de Boussinesq ( $\mathbf{b} = g[1 - \beta(T - T_{ref})]$  en donde  $\beta$  es el coeficiente de dilatación térmica,  $g$  es la aceleración de gravedad y  $T_{ref}$  es una temperatura de referencia),  $\Omega$  es el dominio y  $\tau$  es el intervalo de tiempo del análisis. Para obtener la solución del problema, además de las ecuaciones anteriores se deben definir apropiadamente las condiciones de contorno y las condiciones iniciales del mismo.

## ANÁLISIS DE UNA CAVIDAD CUADRADA

El estudio de la convección natural de un fluido con generación interna de calor en una cavidad cuadrada ha sido realizado en [1], por lo que se presenta este ejemplo para validar los resultados obtenidos con la metodología propuesta para resolver problemas de flujo con transferencia de calor. En la cavidad predomina la convección natural en dos dimensiones generada por la fuente de calor volumétrica interna. En la figura 1 se puede apreciar la geometría y condiciones de contorno del problema donde  $H=L$ , sus paredes se consideran rígidas y sin espesor. Las paredes son isotérmicas, por lo que se prescribe la temperatura de éstas en un valor igual a cero ( $T_w=0$ ), la velocidad del fluido en las mismas es nula ( $\mathbf{u}=\mathbf{v}=0$ ) y la presión se prescribe en el centro de la pared inferior de la cavidad en un valor igual a cero. Las condiciones iniciales del problema son temperatura y velocidad igual a cero en todo el dominio ( $T_0=u_0=v_0=0$ ). En la discretización espacial de esta cavidad se utiliza una malla uniforme de  $40 \times 40$  elementos. Las propiedades físicas del fluido se consideran constantes a excepción de la densidad, la cual varía linealmente con respecto a la temperatura de acuerdo con la aproximación de Boussinesq. El número de Prandtl que se utiliza en este problema es siete  $Pr=7$  ( $Pr=\mu\rho/k$ ).

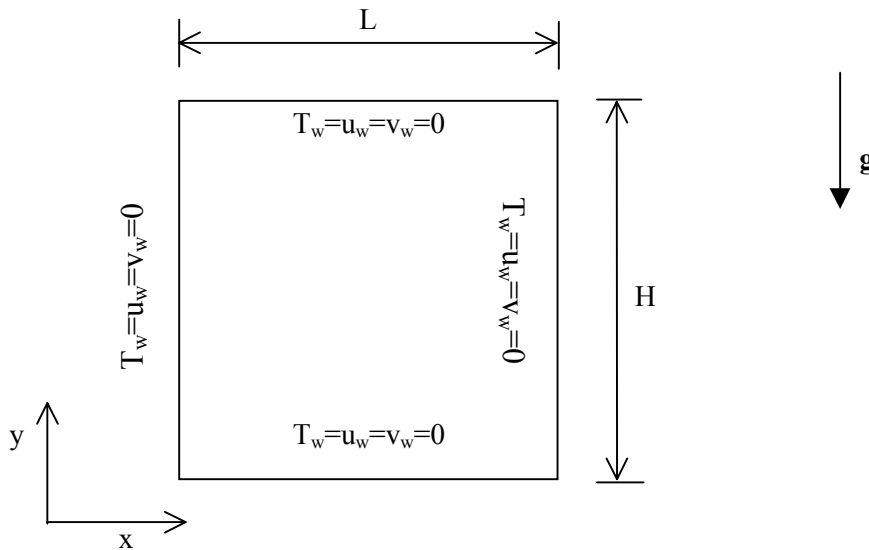


Figura 1. Descripción geométrica del problema

Además se considera en la solución de este problema que el régimen del flujo es laminar y el fluido es incompresible. Para estas mismas condiciones geométricas, de contorno e iniciales se analizó el problema para dos números de Rayleigh diferentes:  $Ra=6.4 \times 10^5$  y  $Ra=3.2 \times 10^6$  ( $Ra=g\beta r H^3 cp^2 / \mu k^2$  es el número de Rayleigh modificado en función de la fuente  $r$  de generación de calor volumétrico <sup>[1]</sup>).

## PRESENTACIÓN Y DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS

Se resuelve el problema descrito anteriormente para un número de Rayleigh igual a  $6.4 \times 10^5$  en forma transitoria hasta alcanzar un régimen estacionario. La figura 2 muestra las variables del ejemplo en estudio para dicho régimen. De esta figura se observa en los vectores velocidad del fluido una simetría con respecto al eje vertical del centro de la cavidad. Claramente se ve que el flujo se produce desde el centro hacia ambas paredes verticales de la cavidad y que los vectores de mayor módulo se encuentran a una distancia cercana a dichas paredes. Esto último se debe a que el gradiente de temperatura en ese sector es mayor, por lo que el fluido se enfría rápidamente precipitándose a mayor velocidad hacia el fondo de la cavidad. De la gráfica de temperatura también se observa una simetría con respecto al eje vertical del centro de la cavidad. Las isotermas se incrementan desde un valor mínimo desde el contorno de la cavidad hacia el centro de ésta. También se puede apreciar que existen dos temperaturas locales máximas en la mitad superior de la cavidad. Con respecto a la gráfica de líneas de corriente, éstas son simétricas con respecto al mismo eje de las variables anteriores y muestran que el movimiento de una partícula del fluido se produce desde el centro hacia las paredes verticales de la cavidad. Los vórtices también son simétricos al mismo eje. La presión se incrementa desde la pared inferior de la cavidad hacia la superior, debido al movimiento del fluido que se genera por las diferencias de temperatura, que es mayor en esa zona. Se observa claramente que el flujo de calor se produce desde el centro de la cavidad hacia las paredes de ésta, y a mayor escala donde se encuentran los mayores gradientes de temperatura, es decir, en la pared superior y en las paredes verticales. Comparando cuantitativamente los resultados obtenidos con los de [1] se tiene que el valor de la temperatura adimensional máxima es de 0.048 y el de la citada referencia es de 0.0477. Estos valores y los de líneas de corriente se observan en la tabla 1, de la cual se extrae que existe una muy buena concordancia entre los resultados de este trabajo y los de la referencia.

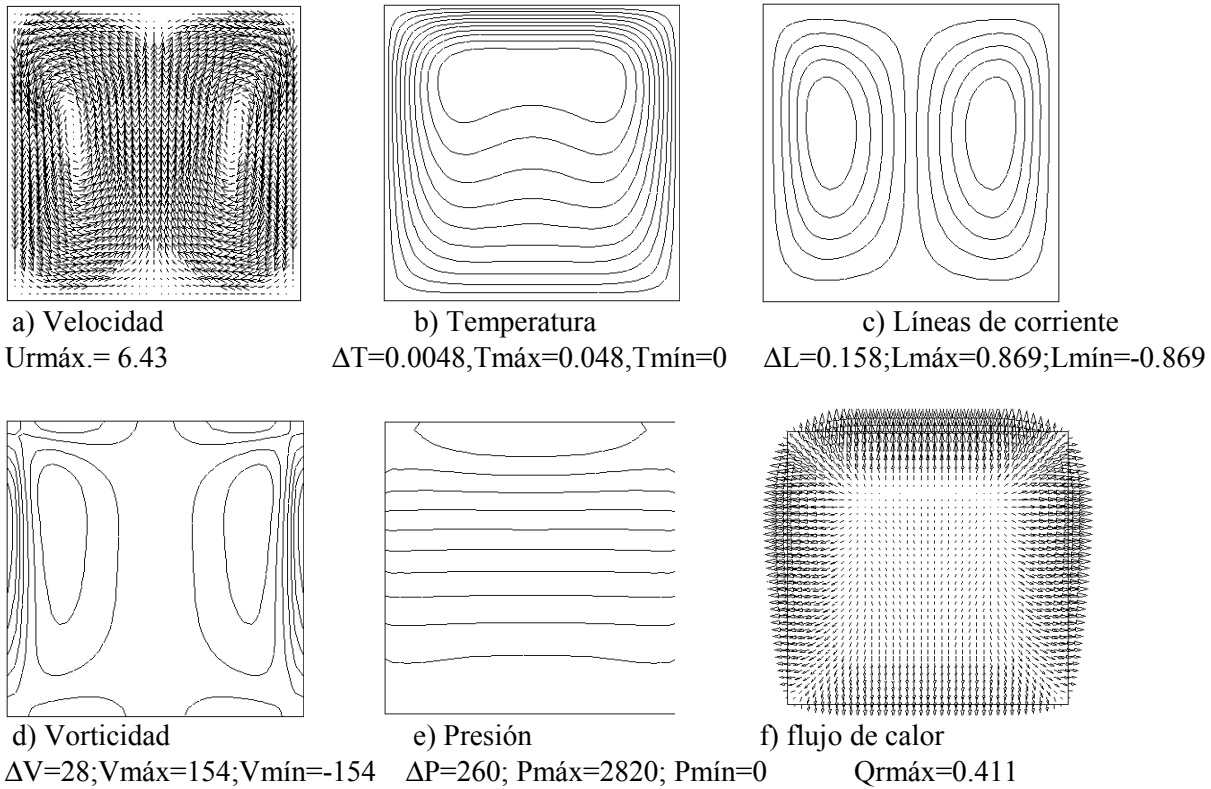


Figura 2. Resultados gráficos obtenidos de una malla uniforme de  $40 \times 40$  elementos para un número de Rayleigh de  $6.4 \cdot 10^5$  en régimen estacionario.

Al analizar los resultados del problema para un número de Rayleigh de  $3.2 \cdot 10^6$ , se desprende que el sistema se comporta según dos regímenes diferentes en el transcurso del tiempo: un primer régimen transiente y un segundo estacionario periódico. Estos regímenes se aprecian claramente en los gráficos de temperatura máxima, número de Nusselt promedio en la pared superior y número de Nusselt promedio en la pared izquierda, con respecto al tiempo (figura 3). Es importante destacar que la evolución de la temperatura máxima graficada no ocurre, en general, en el mismo punto. El análisis de este problema se centrará en el último régimen, por esto se realizó un detallado seguimiento de la evolución de las variables durante un determinado intervalo de tiempo, con el objeto de discernir la magnitud del período del ciclo.

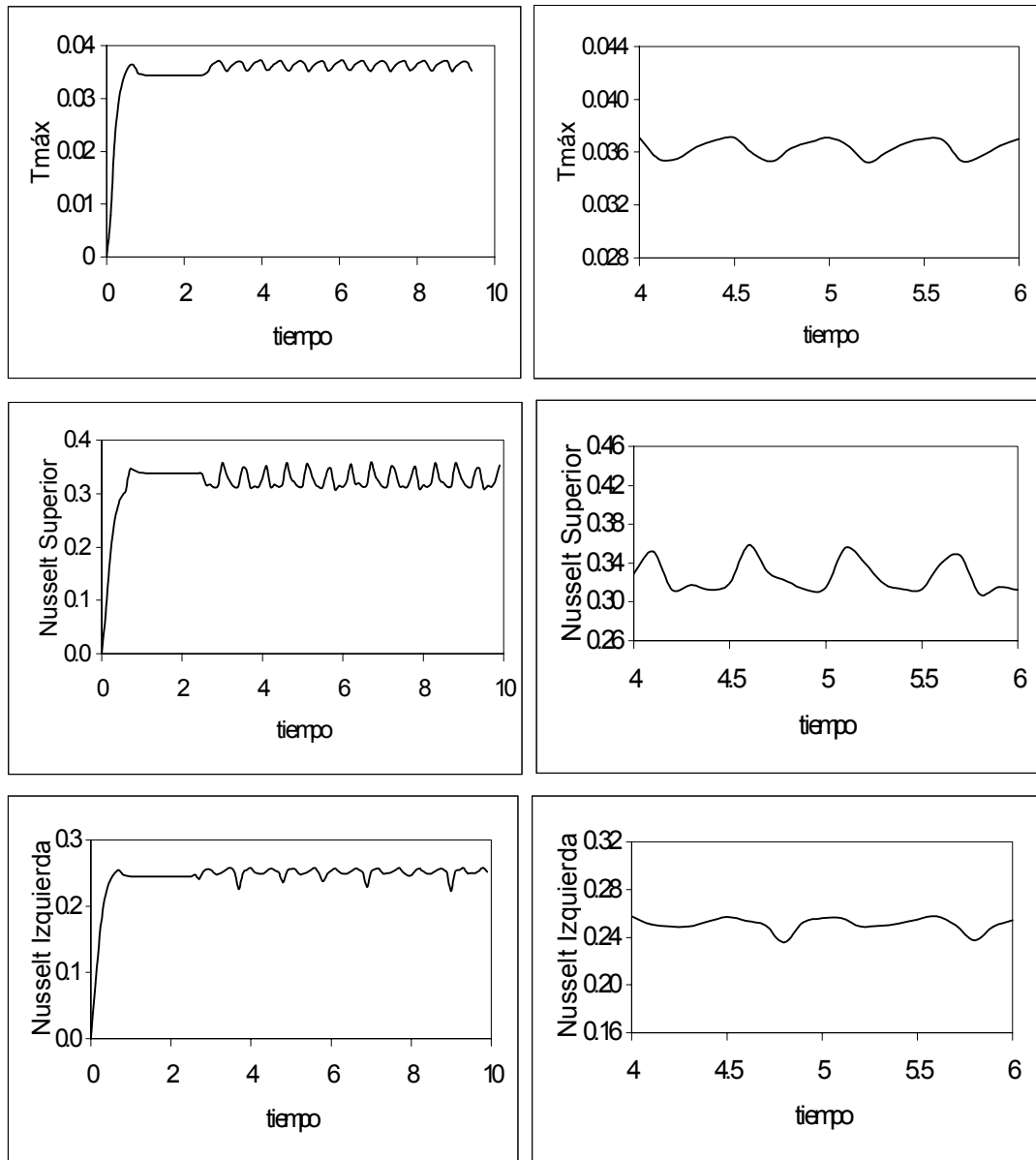
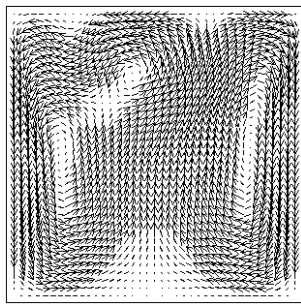
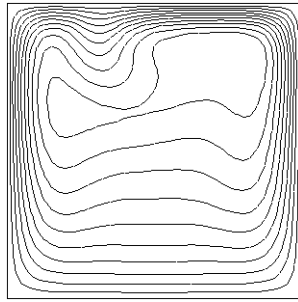


Figura 3. Evolución de la temperatura máxima, del número de Nusselt promedio en la pared superior y del número de Nusselt promedio en la pared izquierda de la cavidad obtenido en una malla uniforme de  $40 \times 40$  elementos para un número de Rayleigh de  $3.2 \cdot 10^6$ .

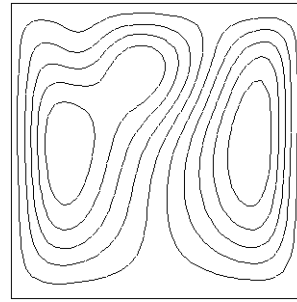
Se concluyó que el período es del orden de 1.06. Además, en las figuras 4 y 5 se presentan las gráficas de diferentes variables del problema para los tiempos 10 y 10.37 respectivamente. Se eligieron estos tiempos por ser representativos de la simetría y asimetría que se observa en los resultados de este problema. En la figura 4 se presenta uno de los estados de mayor asimetría. Se observa un vórtice cerca del vértice superior izquierdo, el cual es el responsable de la disminución del flujo de calor en ese sector, ya que al existir fluido que se mueve a baja velocidad inhibe la transferencia de calor hacia el exterior de la cavidad. En las gráficas de líneas de corriente de esta figura se puede observar claramente el movimiento del fluido, el cual se mueve rodeando los vórtices que se forman dentro de la cavidad. En la figura 5 se observa un estado prácticamente simétrico con respecto al eje vertical del centro de la cavidad en los resultados obtenidos para este problema. Se ve la formación de dos vórtices simétricos cerca de la pared superior de la cavidad, los cuales disminuyen el flujo de calor en el centro de la dicha pared de la cavidad hacia el exterior. En [1] el autor entrega resultados para dos estados distintos: uno simétrico y otro asimétrico, este último con el vórtice formado cerca del vértice superior izquierdo



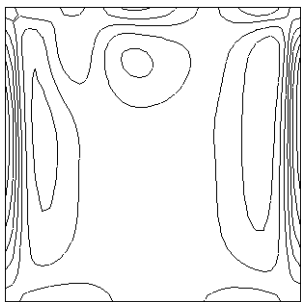
a) Velocidad  
 $U_{r\text{máx.}} = 13.4$



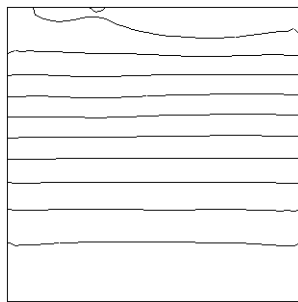
b) Temperatura  
 $\Delta T = 0.00354, T_{\text{máx}} = 0.0354, T_{\text{mín}} = 0$



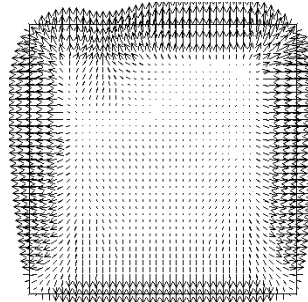
c) Líneas de corriente  
 $\Delta L = 0.281; L_{\text{máx}} = 1.39; L_{\text{mín}} = -1.44$



d) Vorticidad  
 $\Delta V = 77; V_{\text{máx}} = 393; V_{\text{mín}} = -379$

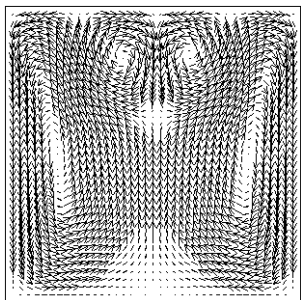


e) Presión  
 $\Delta P = 1080; P_{\text{máx}} = 10800; P_{\text{mín}} = 0$

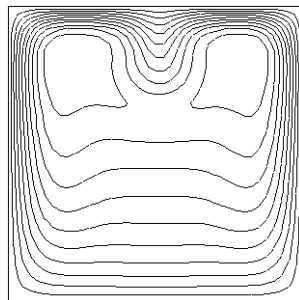


f) flujo de calor  
 $Q_{r\text{máx}} = 0.436$

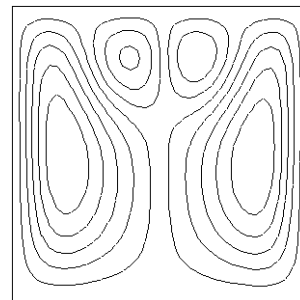
Figura 4. Resultados gráficos obtenidos de una malla uniforme de  $40 \times 40$  elementos para un número de Rayleigh de  $3.2 \cdot 10^6$  y  $t = 10$ .



a) Velocidad  
 $U_{r\text{máx.}} = 12.6$



b) Temperatura  
 $\Delta T = 0.00366, T_{\text{máx}} = 0.0366, T_{\text{mín}} = 0$



c) Líneas de corriente  
 $\Delta L = 0.261; L_{\text{máx}} = 1.31; L_{\text{mín}} = -1.3$

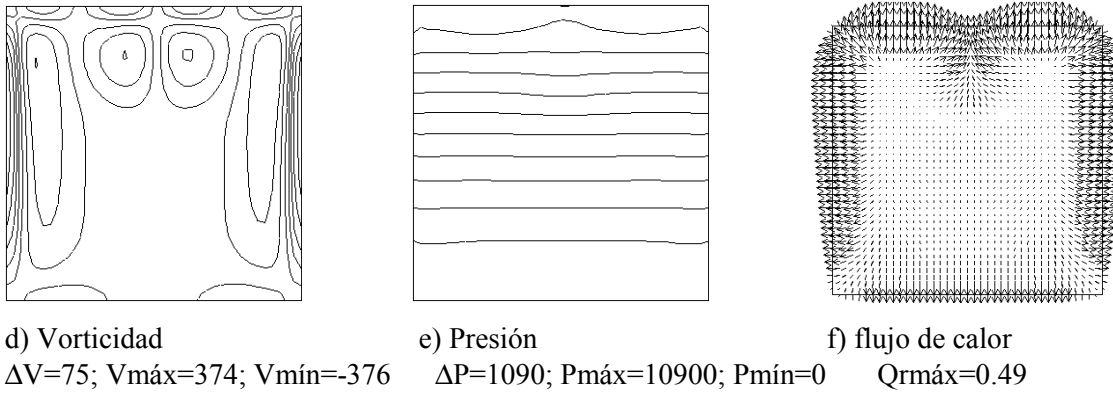


Figura 5. Resultados gráficos obtenidos de una malla uniforme de  $40 \times 40$  elementos para un número de Rayleigh de  $3.2 \cdot 10^6$  y  $t=10.37$ .

	<b>Ra</b>	<b>T<sub>máx</sub></b>	<b><math>\Psi_{\text{máx}}</math></b>	<b><math>\Psi_{\text{mín}}</math></b>
<b>Este trabajo</b>	$6.4 \cdot 10^5$	0.048	0.869	-0.869
<b>Referencia [1]</b>	$6.4 \cdot 10^5$	0.047	0.878	-0.878
<b>Este trabajo (resultados simétricos)</b>	$3.2 \cdot 10^6$	0.0366	1.31	-1.30
<b>Referencia [1] (resultados simétricos)</b>	$3.2 \cdot 10^6$	0.0364	1.34	-1.33
<b>Este trabajo (resultados asimétricos)</b>	$3.2 \cdot 10^6$	0.0354	1.39	-1.44
<b>Referencia [1] (resultados asimétricos)</b>	$3.2 \cdot 10^6$	0.0347	1.31	-1.41

Tabla 1. Comparación de los resultados obtenidos en este trabajo con la referencia [1]. (Ra: número de Rayleigh, T: temperatura,  $\Psi$ : línea de corriente)

de la cavidad. Analizando cuantitativamente los resultados se tiene que para el estado simétrico la temperatura máxima obtenida en este trabajo es de 0.0366 y la de la mencionada referencia de 0.0364. Para el estado asimétrico el valor obtenido de la temperatura máxima es de 0.0354 y el de la literatura de 0.0347. Los valores de temperatura anteriormente expuestos más los de líneas de corriente se encuentran en la tabla 1, en la cual se aprecia la buena concordancia de los resultados obtenidos en este trabajo con los encontrados en la referencia [1].

## CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS

De este trabajo se concluye que la metodología empleada para analizar la convección natural en un fluido con generación interna de calor es adecuada ya que al comparar los resultados obtenidos con los de otros autores el margen de diferencia no es significativo. La información que se obtiene de las distintas variables del problema es de gran ayuda para el correcto entendimiento del fenómeno estudiado. También a través de los resultados obtenidos se puede cuantificar la incidencia de los parámetros que afectan el desarrollo del fenómeno, como es el caso del número de Rayleigh. Por último, se concluye que el aporte de esta metodología en el análisis de otros problemas de mecánica de fluidos con transferencia de calor es totalmente factible y válida.

## AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen al DICYT y al FONDECYT N° 1980054 porque en el marco de sus proyectos ha sido desarrollado este trabajo.

## REFERENCIAS

- [1] A. G. Churbanov and P. N. Vabishchevich: “ A numerical study on natural convection of a heat-generating fluid in rectangular enclosures”, *International Journal Heat Mass Transfer*, vol. 37, No 18, pp. 2969-2984 (1994).
- [2] D. Celentano: “A finite element formulation for phase-change problems with advective effects”, *Communications in numerical methods in engineering*. 14 , 719-730 (1998).
- [3] M. A. Cruchaga and E. Oñate: “ A finite element formulation for incompressible flow problems using a generalized streamline operator”, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 143 (1997) 49-67.