

## **ESTUDIO DE LA CONVECCIÓN NATURAL EN CANALES CON OBSTRUCCIONES MÚLTIPLES**

**Gabriel Corral, Diego Celentano y Marcela Cruchaga**  
*Departamento de Ingeniería Mecánica*  
*Universidad de Santiago de Chile*  
*Avda. Bdo. O'Higgins 3363 – Santiago de Chile – CHILE*  
*e-mail: [dcelenta@lauca.usach.cl](mailto:dcelenta@lauca.usach.cl)*

### **RESUMEN**

En este trabajo se presenta el análisis de la convección natural en canales verticales bidimensionales con obstrucciones múltiples utilizando el método de los elementos finitos (MEF). Para la descripción de dicho problema se utilizan las ecuaciones de Navier-Stokes para un fluido newtoniano incompresible (ecuaciones de cantidad de movimiento y de continuidad) térmicamente acopladas con la ecuación de la energía. La formulación utilizada en el contexto del MEF se basa en la metodología de ponderación a contracorriente. El sistema de ecuaciones resultantes se resuelve utilizando un esquema tipo Newton-Raphson incremental-iterativo. A partir del modelo, se obtienen curvas del número de Nusselt promedio y local a lo largo de las paredes del canal considerando distintos números de Rayleigh y diferentes relaciones de aspecto ancho/longitud. Finalmente, los resultados se contrastan con estudios anteriores referidos a este tema y que se encuentran en la literatura.

### **ABSTRACT**

In this work, the natural convection in bidimensional vertical channels with obstructions is analyzed using the finite element method (FEM). The mathematical model used to describe this problem are the thermally coupled incompressible Navier-Stokes equations. The solution of the finite element system, discretized in the context of the generalized streamline operator methodology, is attempted with a Newton-Raphson algorithm. Local and average Nusselt numbers along the channel walls are obtained for different Rayleigh numbers and aspect ratios. Finally, these results are compared with other numerical and experimental data of the literature.

### **INTRODUCCIÓN: OBJETIVOS Y METODOLOGÍA DE ANÁLISIS**

El estudio de procesos de convección natural, que se origina en canales verticales con obstrucciones múltiples, es de gran interés por presentarse este tipo de problemas en diferentes áreas de la ingeniería. Una de estas aplicaciones está orientada al enfriamiento de equipos electrónicos, intercambiadores de calor, dispositivos que poseen aletas, etc. Especial atención requiere el enfriamiento de equipos electrónicos por el tamaño reducido de sus componentes y el cuidado y control que se debe tener con la temperatura. Las tarjetas que componen un sistema electrónico están alineadas en forma vertical o inclinadas, separadas a muy corta distancia una de otra. La entrada y salida de estos canales se encuentran abiertas a las condiciones ambientales. Conocer el efecto de las obstrucciones en la transferencia de calor es importante en el diseño y montaje de estos.

Los objetivos propuestos al realizar este trabajo se enuncian a continuación. Se tiene como primer objetivo realizar un análisis de la convección natural en canales verticales bidimensionales con obstrucciones múltiples utilizando el método de los elementos finitos (MEF). Por otro lado, se desea estudiar a partir de este modelo, los efectos en el comportamiento del flujo, del número de Rayleigh y de la relación de aspecto (ancho/longitud). Finalmente, contrastar los resultados obtenidos con estudios numéricos y experimentales que se encuentran en la literatura referidos a este tema<sup>[1,2]</sup>.

En el presente trabajo se utilizan, para describir el problema planteado, las ecuaciones de Navier-Stokes para un fluido newtoniano incompresible (ecuaciones de cantidad de movimiento y de continuidad) térmicamente acopladas con la ecuación de la energía. La formulación utilizada en el contexto del MEF se basa en la técnica conocida como ponderación a contracorriente<sup>[3]</sup>. El sistema de ecuaciones resultantes se resuelve utilizando un esquema del tipo Newton-Raphson incremental-iterativo, donde la convergencia numérica se define en función de los residuos<sup>[3,4]</sup>. Para la discretización de la parte temporal de las ecuaciones diferenciales se emplea un esquema de diferencias finitas implícito.

## FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

Las ecuaciones que rigen el problema de la convección natural en canales verticales, considerando régimen laminar, fluido newtoniano, incompresible, sin generación interna de calor, bidimensional y propiedades constantes, se presentan a continuación:

- Ecuación de continuidad:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad \text{en } \Omega \times \tau$$

- Ecuación de cantidad de movimiento:

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \nabla p - \nabla \cdot (2\mu \boldsymbol{\varepsilon}) = \rho \mathbf{b} \quad \text{en } \Omega \times \tau$$

- Ecuación de la energía:

$$\rho c \left( \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T \right) = \nabla \cdot (k \nabla T) + \rho r \quad \text{en } \Omega \times \tau$$

Además de las ecuaciones anteriores propuestas en forma vectorial, se deben definir adecuadamente las condiciones de contorno y las condiciones iniciales del problema. La nomenclatura usada en las ecuaciones es:  $\Omega$  es el dominio de análisis y  $\tau$  es el intervalo de tiempo de interés,  $\rho$  es la densidad,  $\mu$  es la viscosidad dinámica,  $c$  es el calor específico,  $k$  es el coeficiente de conductividad térmica,  $\mathbf{v}$  es el vector velocidad,  $T$  es la temperatura,  $p$  es la presión,  $\boldsymbol{\varepsilon}$  es el tensor velocidad de deformación,  $\nabla$  es el operador gradiente,  $r$  es la fuente de calor específica,  $\mathbf{b}$  es la fuerza de volumen teniendo en cuenta la aproximación de Boussinesq ( $\mathbf{b} = \mathbf{g}[1 - \beta(T - T_{\text{ref}})]$ ) en donde  $\beta$  es el coeficiente de dilatación térmica,  $\mathbf{g}$  es la aceleración de gravedad y  $T_{\text{ref}}$  es una temperatura de referencia).

## ANÁLISIS DE UN CANAL CON OBSTRUCCIONES

El estudio de la convección natural en canales verticales con obstrucciones múltiples ha sido analizado numéricamente por [1], y además en [2] mediante estudios numéricos y experimentales. Estos trabajos realizados anteriormente sirven para validar los resultados obtenidos en el presente estudio. En la figura 1, se observa un canal vertical con obstrucciones con sus correspondientes dimensiones. Se considera una longitud del canal  $L = 1$  y anchos  $a$  de 0.2 y 0.3. Las dimensiones de las obstrucciones se mantienen constantes y son de  $h = 0.01334$  y  $W = 0.0667$ .

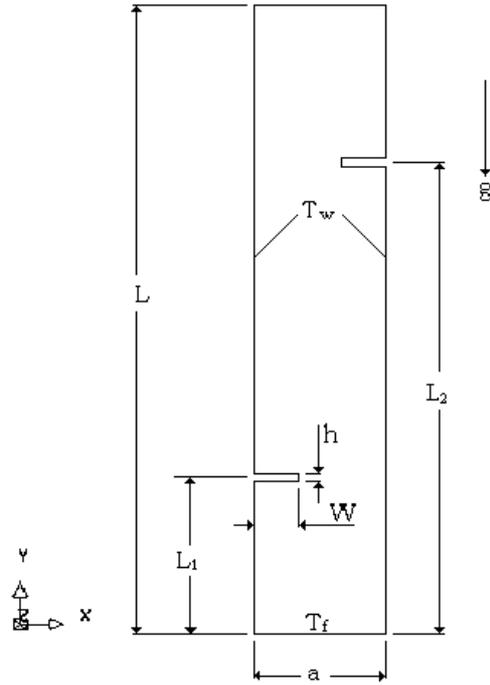


Figura 1: Geometría del problema.

Los parámetros a variar en este estudio son: la relación de aspecto ( $Ar = a/L$ ), el número de Rayleigh ( $Ra = g\beta\Delta T a^3/\alpha\nu$ ) y las longitudes  $L_1$  y  $L_2$ . Los casos analizados para canales sin y con obstrucciones se presentan en las tablas 1 y 2 respectivamente. Para todos estos casos se obtuvieron los números de Nusselt promedio con el objeto de comparar con resultados experimentales [2] y numéricos obtenidos para canales [1].

CASO	Ar	Ra
1	0.2727	$10^2$
2	0.2727	$10^3$
3	0.2727	$10^4$
4	0.2727	$2 \cdot 10^4$
5	0.2	$10^2$
6	0.2	$10^3$
7	0.2	$10^4$
8	0.3	$10^2$
9	0.3	$10^3$
10	0.3	$10^4$

Tabla 1: Casos estudiados para un canal sin obstrucciones.

El rango del número de Rayleigh en este estudio para un canal con y sin obstrucciones fue  $10^2 \leq Ra \leq 2 \cdot 10^4$  y el número de Prandtl ( $Pr = \mu c/k$ ) utilizado es 0.71, que corresponde al número de Prandtl del aire.

Las condiciones de contorno aplicadas en las paredes del canal son: se prescribe la temperatura en un valor igual a uno ( $T_w = 1$ ) y la velocidad del fluido en las paredes en ambas direcciones es nula ( $u = v = 0$ ). A la entrada del canal, es decir en  $y = 0$  y para  $0 \leq x \leq 1$ , la componente x de la velocidad y la temperatura se prescriben en cero ( $u = 0$  y  $T_f = 0$ ). A la salida del canal, en  $y = 1$  y para  $0 \leq x \leq 1$ , la componente x de la velocidad se prescribe en cero ( $u = 0$ ) y se consideran condiciones de adiabaticidad ( $\partial T/\partial y = 0$ ). Además la presión se prescribe en las secciones de entrada y salida del canal en un valor igual a cero.

CASO	Ar	L <sub>1</sub>	L <sub>2</sub>	GEOMETRIA	Ra
1	0.2	0.25	0.75	I	10 <sub>2</sub>
2	0.2	0.25	0.75	I	10 <sub>3</sub>
3	0.2	0.25	0.75	I	10 <sub>4</sub>
4	0.2	0.5	0.5	II	10 <sub>2</sub>
5	0.2	0.5	0.5	II	10 <sub>3</sub>
6	0.2	0.5	0.5	II	10 <sub>4</sub>
7	0.3	0.25	0.75	III	10 <sub>2</sub>
8	0.3	0.25	0.75	III	10 <sub>3</sub>
9	0.3	0.25	0.75	III	10 <sub>4</sub>
10	0.3	0.5	0.5	IV	10 <sub>2</sub>
11	0.3	0.5	0.5	IV	10 <sub>3</sub>
12	0.3	0.5	0.5	IV	10 <sub>4</sub>

Tabla 2: Casos estudiados para un canal con obstrucciones.

## PRESENTACIÓN Y DISCUSIÓN DE RESULTADOS

Los resultados que se muestran a continuación corresponden a estados estacionarios.

El primer problema estudiado es un canal sin obstrucciones de relación de aspecto  $Ar = 0.2727$ , para el cual se consideran las condiciones de borde planteadas en la sección anterior y un rango para el número de Rayleigh de  $10^2 \leq Ra \leq 2 \cdot 10^4$ . La figura 2 muestra los resultados numéricos del número de Nusselt promedio en la pared izquierda a diferentes números de Rayleigh. Los resultados encontrados, se comparan con resultados numéricos y experimentales encontrados en la literatura [2], de lo cual, se observa una diferencia global promedio pequeña de 6%, con los resultados experimentales, inferior a las diferencias obtenidas por resultados numéricos de otros autores. Además se observa que a altos números de Rayleigh el presente estudio numérico tiende con mayor precisión a los resultados experimentales presentados.

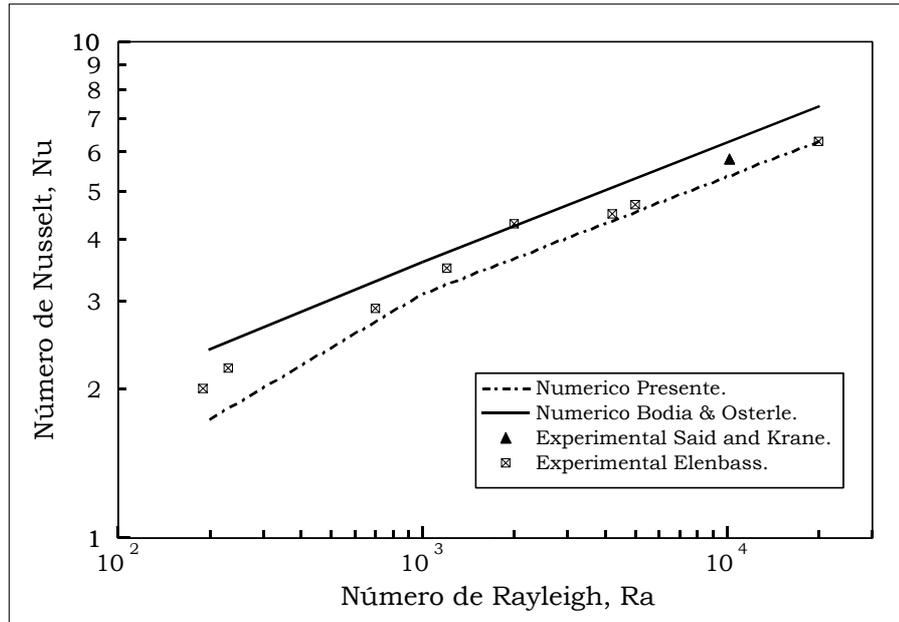


Figura 2: Comparación entre la presente solución numérica y resultados numéricos y experimentales encontrados en la literatura para canales sin obstrucciones.

La figura 3 muestra los diagramas de las variables para la geometría I a  $Ra = 10^2$ . Del trazado de las isoterms, se observa que a pequeños números de Rayleigh, toda la transferencia de calor toma lugar en la región de entrada del canal, existiendo grandes gradientes de temperatura en zonas cercanas a la obstrucción más baja ( $L_1=0.25$ ). En la zona superior del canal, la temperatura del fluido se aproxima a la temperatura de la pared y no se observa transferencia de calor. Con respecto a las gráficas de las líneas de corriente éstas muestran el desplazamiento de una partícula desde la entrada del canal hacia la salida de él y se observa que la velocidad del fluido aumenta en las regiones cercanas a las obstrucciones producto de la reducción en la sección del canal. Como el fluido enfrenta y pasa sobre cada obstrucción, está sometido a una secuencia de desaceleración y aceleración. Las presiones alcanzan su máximo valor adimensional en el extremo inferior de cada obstrucción y sus mínimos valores en el extremo superior de las mismas.

Al aumentar el número de Rayleigh a  $10^4$ , se observan cambios importantes en el diagrama de temperaturas de la figura 4, donde la transferencia de calor toma lugar a lo largo de todo el canal. En las gráficas de las líneas de corriente se aprecia un aumento en la velocidad del fluido en la zona de las obstrucciones y aparecen zonas de recirculación del fluido bajo y sobre la obstrucción. Las zonas de recirculación debajo de la obstrucción son usualmente pequeñas, sin embargo, en la figura se presentan zonas de recirculación sobre las obstrucciones. Las presiones alcanzan valores mayores a los obtenidos para números de Rayleigh pequeños (ver fig. 3) y siguen la misma tendencia que para el caso anterior con respecto a sus máximos y mínimos.

La figura 5 muestra los diagramas de temperatura, líneas de corriente y presión para la geometría II ( $Ar = 0.2$  y  $Ra = 10^2$ ). Estas son simétricas con respecto al eje de simetría vertical del canal. Las observaciones anteriores son válidas también para esta geometría.

En la figura 6, se aumentan el número de Rayleigh a  $10^4$ . Se conserva la simetría de todas sus variables con respecto al eje de simetría vertical y se observa que la transferencia de calor toma lugar a lo largo de todo el canal. Las dos obstrucciones de esta geometría reducen la sección del canal en un 67% por lo que en esta zona aumenta la velocidad del fluido y la transferencia de calor. Se aprecian dos grandes zonas de recirculación que se forman justo sobre las obstrucciones que afectan de manera importante la transferencia de calor en esa región

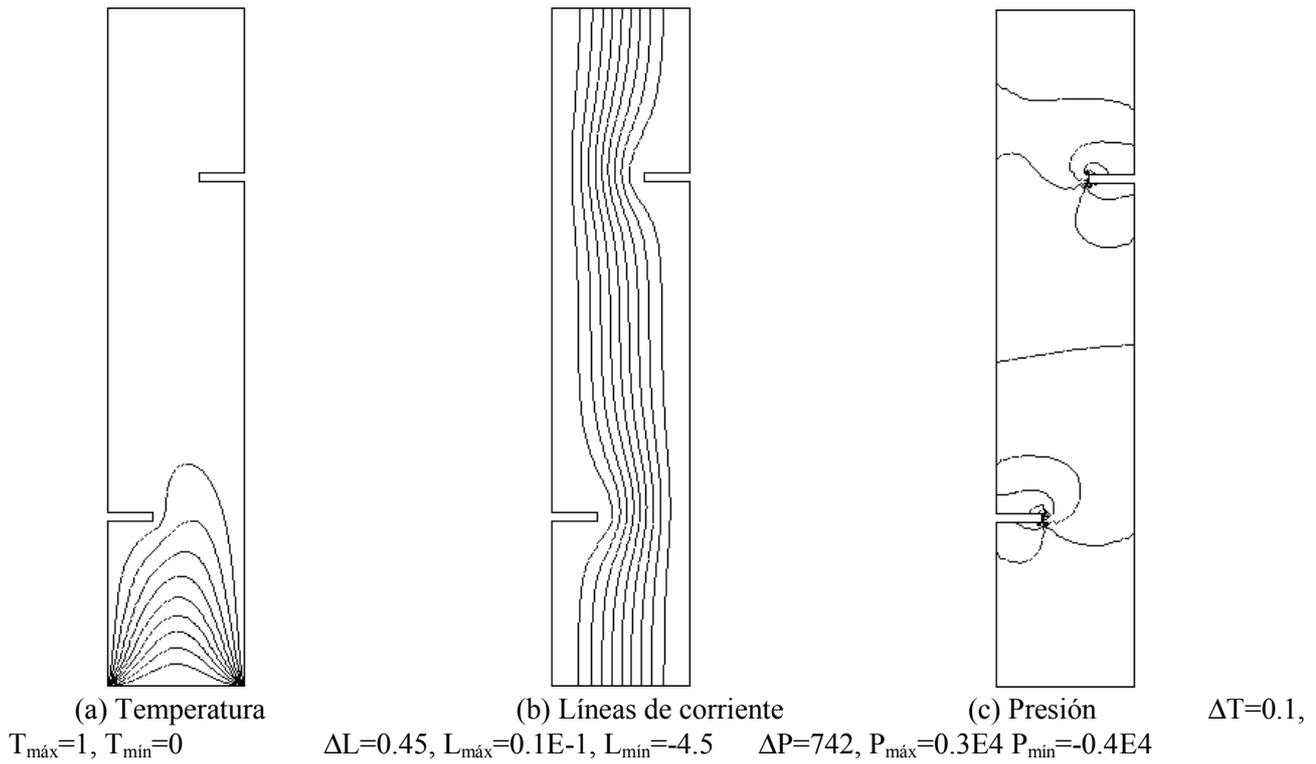


Figura 3: Diagrama de variables para la geometría I ( $Ar=0.2, Ra=10^2$ ).

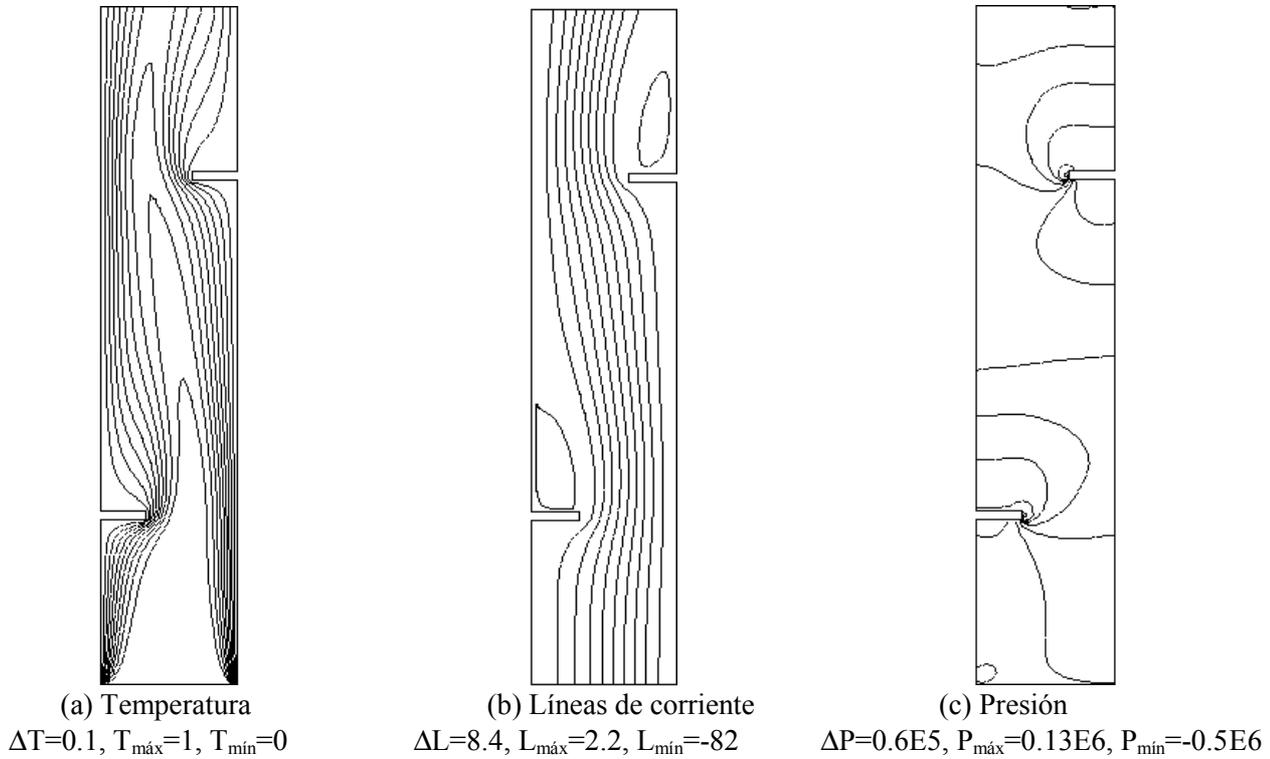


Figura 4: Diagrama de variables para la geometría I ( $Ar=0.2, Ra=10^4$ ).

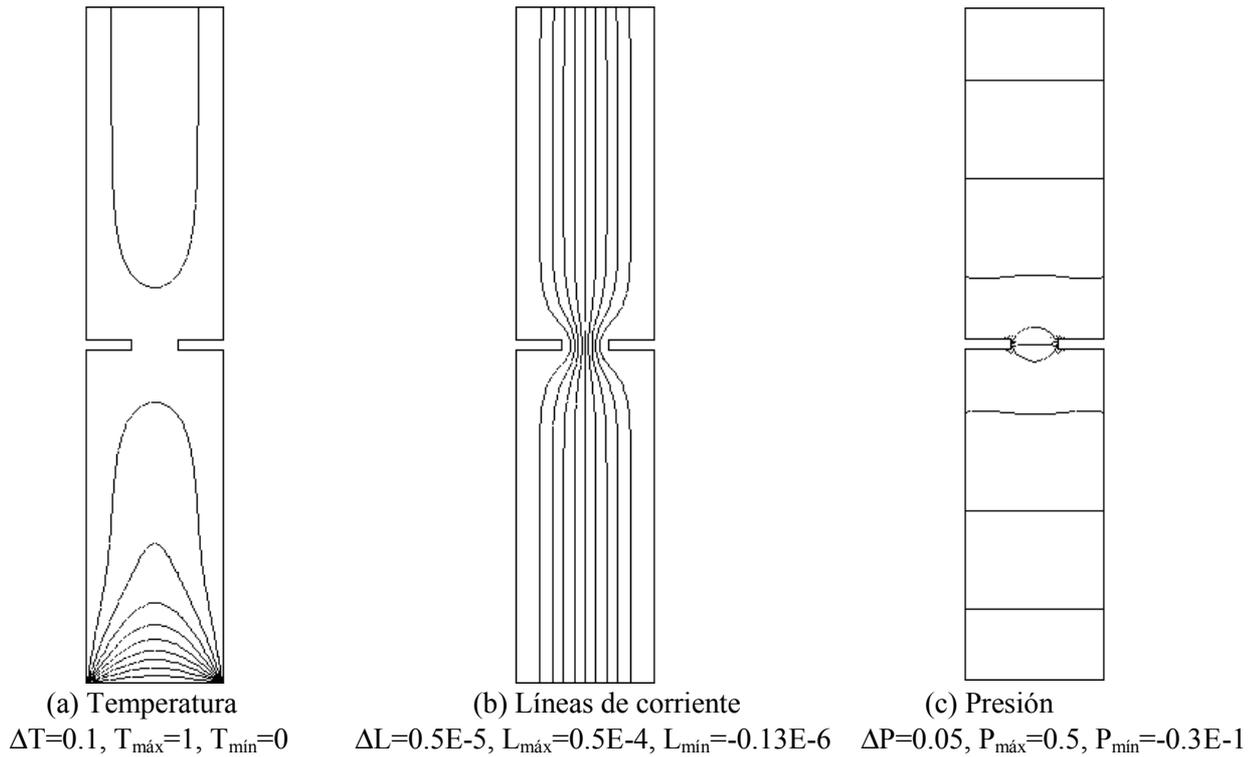


Figura 5: Diagrama de variables para la geometría II ( $Ar=0.2, Ra=10^2$ ).

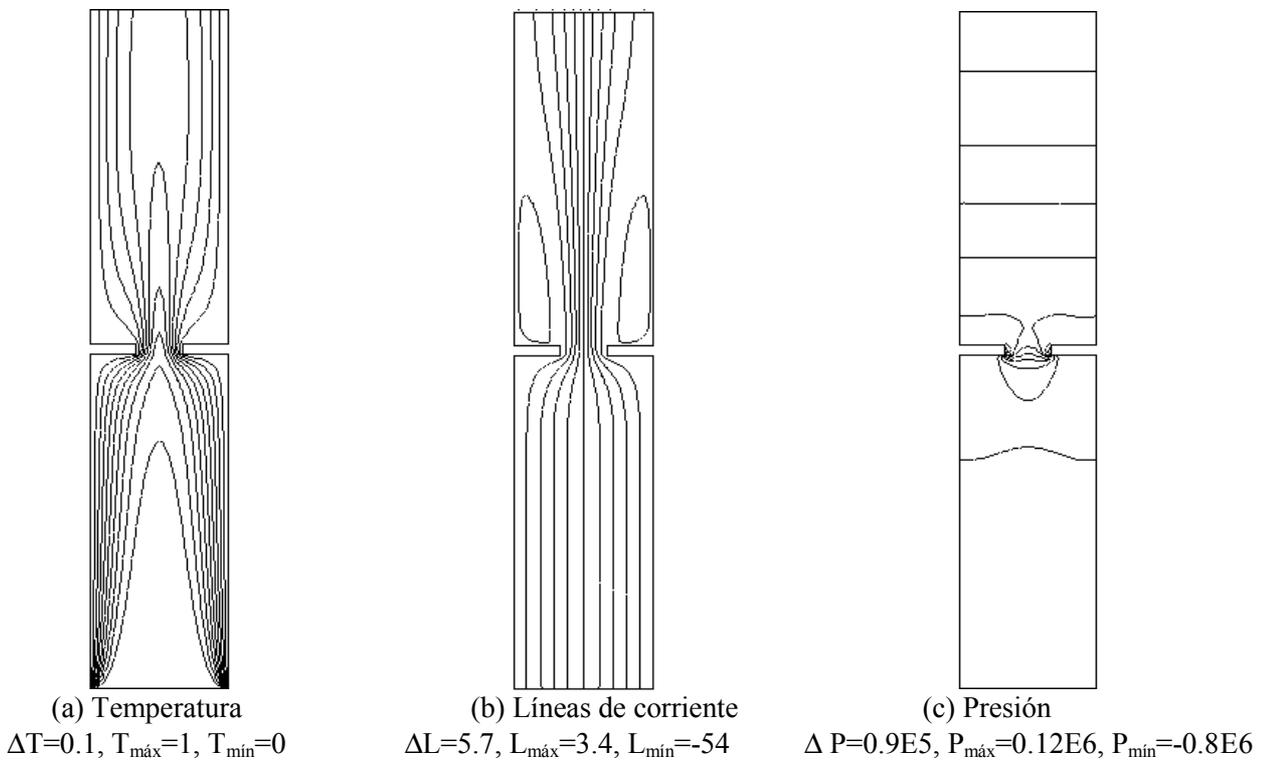


Figura 6: Diagrama de variables para la geometría I ( $Ar=0.2, Ra=10^4$ ).

Con el objetivo de estudiar el efecto de la distribución de las obstrucciones en la transferencia de calor, se trazaron las curvas del número de Nusselt local v/s la distancia a lo largo de la pared derecha ( $Y/L$ ), para un número de

Rayleigh de  $10^4$  y relaciones de aspecto de 0.2 y 0.3. Como se muestran en la figura 7 y 8, los números de Nusselt local más bajos se encuentran en la intersección de la obstrucción y la pared lo que se debe principalmente a la presencia de fluido detenido y recirculaciones del flujo. El número de Nusselt local alcanza sus máximos valores en la zona de entrada del canal, debido al marcado gradiente de temperaturas que existe en esa región. Como se mencionó anteriormente la velocidad del fluido aumenta al acercarse al extremo de las obstrucciones, lo que tiende a un aumento en el coeficiente de transferencia de calor local. Para una relación de aspecto de 0.2 en ambas figuras se aprecia una disminución en el número de Nusselt local a lo largo de toda la pared. Una tendencia similar se observa para el número de Nusselt local en la pared izquierda del canal.

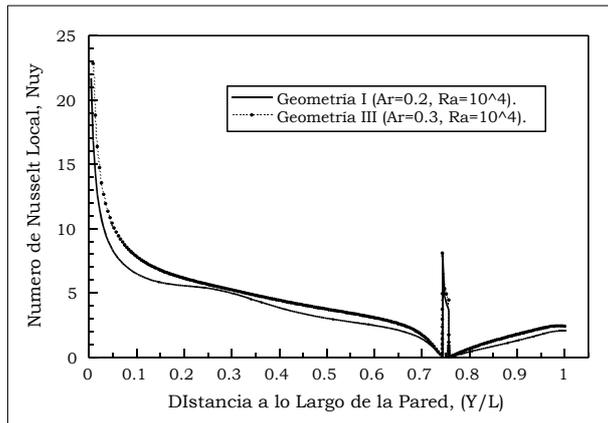


Figura 7: Distribución del número de Nusselt local a lo largo de la pared derecha del canal, para la geometría I, III y número de Rayleigh  $10^4$ .

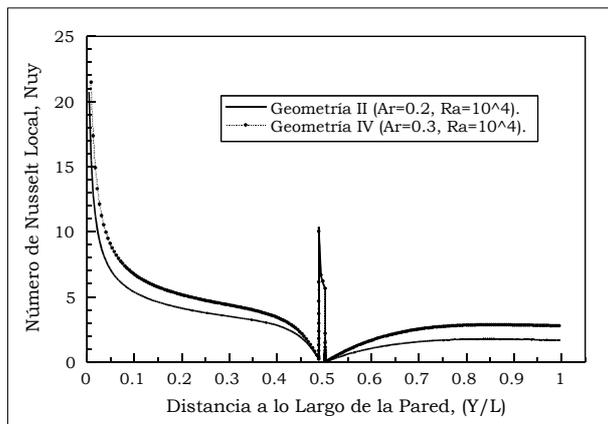


Figura 8: Distribución del número de Nusselt local a lo largo de la pared derecha del canal, para la geometría II, IV y número de Rayleigh  $10^4$ .

El efecto de las obstrucciones múltiples en la transferencia de calor también se analiza calculando el número de Nusselt promedio de la solución numérica obtenida para un canal con y sin obstrucciones v/s el número de Rayleigh. Esta comparación se presenta en la figura 9. Los números de Nusselt promedios para la geometría I son más altos que los de la geometría II y menores que en un canal sin obstrucciones, de lo que se desprende claramente de la figura que las obstrucciones reducen la transferencia de calor. Para determinar exactamente la reducción en la transferencia de calor debido a las obstrucciones se calculó el número de Nusselt promedio a diferentes números de Rayleigh, donde el mayor porcentaje de reducción fue para la geometría II. La máxima reducción en la transferencia de calor para la geometría I fue aproximadamente 30% y ocurre para un número de Rayleigh de  $10^3$ . La mínima reducción para la geometría I fue aproximadamente 16% y ocurre a un número de Rayleigh de  $10^2$ . Para la geometría II, la máxima reducción en la transferencia de calor fue aproximadamente 41% a  $Ra = 10^3$  y la mínima reducción en la transferencia de calor fue aproximadamente 22% a  $Ra = 10^2$ .

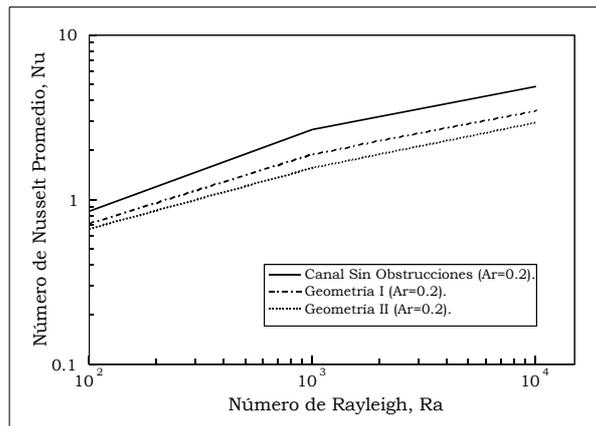


Figura 9: Comparación del número de Nusselt promedio, para un canal con y sin obstrucciones y  $Ar = 0.2$ .

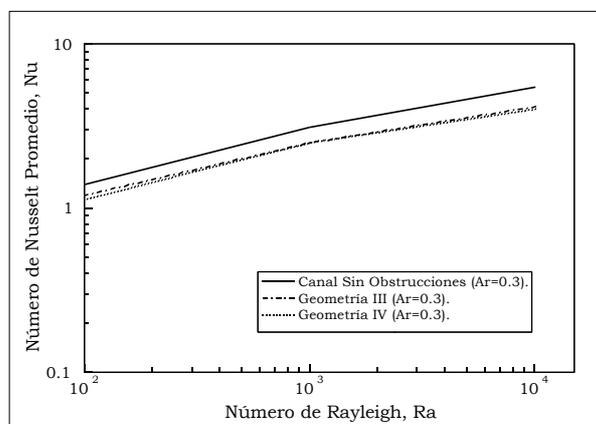


Figura 10: Comparación del número de Nusselt promedio, para un canal con y sin obstrucciones y  $Ar = 0.3$ .

La variación en la transferencia de calor puede ser explicada por alguno de los siguientes mecanismos: (i) aumento en la transferencia de calor por el aumento del área de las paredes, producto de las obstrucciones. (ii) aumento local de la transferencia de calor producto de la aceleración local del flujo cerca de la región obstruida, (iii) reducción en la transferencia de calor debido a la presencia de zonas de recirculación ubicadas sobre y bajo la obstrucción. Las zonas de recirculación reducen la transferencia de calor en estas regiones. Por esto el efecto de las múltiples obstrucciones en la transferencia de calor es una combinación de todos estos mecanismos. La transferencia de calor en los canales obstruidos aumenta o decrece dependiendo de los efectos acumulativos de estos mecanismos. El aumento en el área de transferencia de calor producto de las obstrucciones es igual para ambas geometrías, esto significa mayor transferencia de calor en ambos casos por el mecanismos (i). El campo de velocidades en los puntos cercanos a las obstrucciones es mayor en la geometría II que en la geometría I, este intervalo de altos coeficientes de transferencia de calor explica la alta aceleración del fluido cerca de las obstrucciones en la geometría II comparado con la geometría I, (mecanismo (ii)). El número de Nusselt promedio de la geometría II es mas bajo que los de la geometría I. Esto es porque predominan los efectos del mecanismo (iii) en la geometría II, que es la recirculación del fluido, disminuyendo substancialmente la transferencia de calor para esta geometría.

La geometría III y IV ( $Ar = 0.3$ ) fueron investigadas con el propósito de estudiar el efecto de la relación de aspecto en la transferencia de calor, conservando dimensiones y posiciones de las obstrucciones al igual que en las geometrías I y II. Los resultados del número de Nusselt promedio para los canales con y sin obstrucciones con  $Ar = 0.3$  se presentan en la figura 10. Se aprecia que el número de Nusselt promedio para cada canal con y sin obstrucciones, aumenta con la relación de aspecto. Esto se debe a que la definición de número de Nusselt usado en

este estudio es directamente proporcional al ancho del canal ( $a$ ), por esto al aumentar la relación de aspecto ( $Ar = a/L$ ) por el aumento de  $a$ , el número de Nusselt también aumenta.

Como se mostró anteriormente la reducción en el número de Nusselt local explica la presencia de obstrucciones para la geometría III y IV. De esto se observa que la reducción en la transferencia de calor para bajos números de Rayleigh fue mas pequeña que la correspondiente reducción para altos números de Rayleigh. La máxima reducción en la transferencia de calor para la geometría III fue aproximadamente 24.5% a  $Ra = 10^4$  y la mínima reducción en la transferencia de calor fue aproximadamente 14% a  $Ra = 10^2$ . La máxima reducción para la geometría IV fue 26.5% a  $Ra = 10^4$  y la mínima reducción fue aproximadamente 19% a  $Ra = 10^2$ .

Si se comparan las figuras 9 y 10, se observa que a mayores  $Ar$ , las obstrucciones tienen menos incidencia en el número de Nusselt promedio.

## CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS

En este trabajo se presentó el análisis de la mecánica de fluidos térmicamente acoplados para canales con obstrucciones múltiples. Los resultados obtenidos se comparan satisfactoriamente con los numéricos y experimentales presentados por otros autores, lo que confirma la validez de la metodología utilizada en este trabajo.

## AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen al DICYT y al FONDECYT N°1980054 porque en el marco de sus proyectos ha sido desarrollado este trabajo.

## REFERENCIAS

- [1] Prasad Viswatmula and M. Ruhul Amin: "Effects of multiple obstructions on natural convection heat transfer in vertical channels", *International Journal Heat Mass Transfer*. vol. 38, No. 11, pp. 2039-2046 (1995).
- [2] S. A. M. Said, and R. J. Krane: " An analytical and experimental investigation of natural convection heat transfer in vertical channels with a sigle obstruction", *International Journal Heat Mass Transfer*, 33, pp. 1121—1134 (1990).
- [3] Marcela A. Cruchaga , Eugenio Oñate: " A finite element formulation for incompressible flow problems using a generalized streamline operator", *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 143 (1997) 49-67.
- [4] Diego Celentano: "A finite element formulation for phase-change problems with advective effects", *Communications in numerical methods in engineering*.14 , 719-730 (1998).