

FRECUENCIAS ARBITRARIAMENTE PRECISAS DE PLACAS RECTANGULARES APOYADAS EN SUS VÉRTICES

Marta B. Rosales

*Departamento de Ingeniería, Universidad Nacional del Sur, Alem 1253
8000 Bahía Blanca, Argentina. Email: mrosales@criba.edu.ar*

Carlos P. Filipich

*Departamento de Ingeniería, Universidad Nacional del Sur, Alem 1253
Grupo de Análisis de Sistemas Mecánicos,
FRBB, Universidad Tecnológica Nacional, 8000 Bahía Blanca, Argentina.*

Mario R. Escalante

*Departamento de Ingeniería, Universidad Nacional del Sur, Alem 1253
8000 Bahía Blanca, Argentina.
FRCU, Universidad Tecnológica Nacional, 3260 Concepción del Uruguay, Argentina.
Email: escalam@frcu.utn.edu.ar*

RESUMEN

El problema de vibraciones de placas delgadas es analizado dentro de la teoría de Germain-Lagrange. El caso de placas rectangulares con apoyos puntuales rígidos es tratado con la aplicación de dos metodologías. Una de ellas, denominada MEC (Método del Elemento Completo), es un método variacional directo previamente desarrollado por los autores para problemas de borde, de condiciones iniciales y/o gobernados por ecuaciones diferenciales a derivadas parciales, en dominios uni, bi y tridimensionales, conservativos o no y lineales o no. Se trata de la propuesta de una secuencia minimizante para este problema, que es combinación lineal de funciones pertenecientes a conjuntos completos en el espacio L_2 . Las condiciones de borde esenciales, si las hubiera, son impuestas a dicha secuencia completa y no —en general— a cada función coordinada. Si tales condiciones no fueran satisfechas por la misma se recurre al empleo de multiplicadores de Lagrange. La generación de las secuencias es sistemática, asegura la completitud y no requiere del estudio previo de las formas modales. La exactitud de los autovalores y la convergencia uniforme de las funciones esenciales del problema ha sido demostrada. La segunda metodología, utilizada a modo de comparación, es el MEF (Método de los Elementos Finitos). La resolución del presente problema con el MEF se abordará por medio de dos alternativas: a) un elemento para placas desarrollado por Bogner, Fox y Schmit y b) con el código ALGOR que utiliza el elemento Veuvecke. Son resueltos varios ejemplos de placas rectangulares. También se grafican las formas modales correspondientes.

ABSTRACT

The vibrational problem of thin plates is analysed within the Germain-Lagrange theory. The case of rectangular plates with rigid point supports is dealt with two methodologies. One of them, named WEM (Whole Element Method), is a direct variational method previously developed by the authors for boundary value and/or initial problems, in one, two and three dimensional domains, conservative or not, linear or not. A minimizing sequence is stated which is a linear combination of functions belonging to a complete set in L_2 . The essential boundary conditions, in case they exist, are imposed to the complete sequence and not —in general— to each coordinate function. If they are not identically satisfied, the Lagrange multiplier method is employed. The sequence generation is systematic, ensures the completeness and a previous study of the modal shapes is not required. The exactness of the eigenvalues and uniform convergence of the essential functions of the problem has been demonstrated. The second methodology, which is herein included for the sake of comparison, is the FEM (Finite Element Method). The title problem is addressed by means of two alternatives: a) with the plate element developed by Bogner, Fox and Schmit and, b) using the code ALGOR with the plate element Veuvecke. Numerical examples are solved. The modal shapes are also shown.

INTRODUCCIÓN

La metodología variacional que es usada aquí para resolver el problema del título ha sido desarrollada, fundamentada y aplicada por los autores a una gran variedad de problemas de valores de contorno (aún no lineales) en dominios de una, dos y tres dimensiones. También ecuaciones diferenciales ordinarias con condiciones iniciales así como en derivadas parciales han sido satisfactoriamente abordadas con este método¹⁻⁶. Básicamente el Método del Elemento Completo (MEC) consiste primero en la proposición de un funcional adecuado. Luego una secuencia extremante es introducida. Tal secuencia es una combinación lineal de funciones que pertenecen a un conjunto completo en L_2 . La satisfacción de las condiciones de borde esenciales (o geométricas) solamente es requerida a la secuencia (no a cada función coordenada). Esto es, si el problema es gobernado por una ecuación diferencial de orden $2k$, las condiciones esenciales o funciones son aquellas que involucran derivadas de orden $\leq (k - 1)$. Los autores han establecido y demostrado los teoremas y corolarios que aseguran la exactitud de los autovalores y la convergencia uniforme de las funciones esenciales (aquí las formas modales y las respectivas derivadas primeras⁶). Lograr tales funciones para un problema bidimensional o aún de mayor orden⁵ es probablemente una de las principales contribuciones del MEC. Las secuencias extremantes son sistemáticamente generadas aún en diversos problemas. No hay necesidad de encontrar "buenas" funciones de prueba en cada caso. Aún más, el MEC, es capaz de abordar problemas en los que el funcional no existe en el sentido clásico. En efecto, se ha mostrado a través de teoremas, que todo el planteo de la solución con MEC equivale a un *seudo* trabajo virtual en aquellas secuencias particulares.

En este trabajo las vibraciones naturales de una placa rectangular con bordes libres y simplemente soportada en sus cuatro vértices es estudiada usando la formulación de Germain-Lagrange. La generación de la secuencia extremante es detallada en la siguiente sección. Las formulaciones de las condiciones necesarias y suficientes de los teoremas que teóricamente fundamentan el MEC son detalladas en Rosales⁶. Los resultados son comparados con el ya conocido Método de los Elementos Finitos (MEF). Son empleados dos códigos. Uno basado en el elemento de placa cuyo algoritmo fue desarrollado por Bogner, Fox y Schmit⁷. También resultados del software Algor⁸, usando el elemento Veuvecke, son mostrados para comparación.

CONCEPTOS TEÓRICOS

En esta sección se incluye el planteo del problema fundamental, y como es requerido por el MEC, un funcional adecuado. Se explica la generación de la secuencia extremante. Esta secuencia extremante que satisface las eventuales condiciones geométricas es llamada solución MEC.

Ecuación diferencial gobernante y el correspondiente funcional

Como se sabe, el estudio de las vibraciones naturales conduce a problemas de autovalores. En el caso de una placa rectangular delgada de dimensiones a y b en las direcciones x e y del plano respectivamente, el dominio es R^2 (Una vez dimensionalizado $\{R^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$). La ecuación diferencial gobernante, después de asumir modos normales, es

$$w'''' + 2\alpha^2 \bar{w}'' + \alpha^4 \bar{\bar{w}} - \Omega^2 w = 0 \quad (1)$$

con $\alpha = a/b$ y donde $\partial(\cdot)/\partial x \equiv (\cdot)'$, $\partial(\cdot)/\partial y \equiv (\cdot)\bar{\bar{}}$, etc. Si $w \in C^4$ y satisface simultáneamente la ecuación diferencial (1) y todas las restricciones del problema, es llamada *solución clásica*. Ω son los autovalores del problema (proporcionales a las frecuencias naturales de vibración)

$$\Omega = \omega a^2 \sqrt{\frac{\rho h}{D}} \quad (2)$$

donde ω es la frecuencia circular, ρ es la densidad, h es el espesor de la placa, $D = Eh^3/12(1 - \nu^2)$ es la rigidez a flexión de la placa, E es el módulo de elasticidad y ν es el coeficiente de Poisson. Se muestra en Rosales⁶ que la propuesta de una función con ciertos requerimientos, que pertenezca a conjunto más amplio que el de la solución clásica, permite lograr la convergencia uniforme de las funciones modales esenciales y la exactitud de sus autovalores. La demostración de las condiciones necesarias y suficientes que dan la justificación a la solución MEC de la vibración de una placa delgada puede verse en Rosales⁶ y Filipich y Rosales⁹. Las condiciones esenciales de borde para el caso de apoyos rígidos en los vértices son:

$$w(0,0) = w(1,1) = w(0,1) = w(1,0) = 0 \tag{3}$$

Una secuencia extremante

Aquí son presentados los requerimientos a ser satisfechos por las secuencias. Tales secuencias son llamadas secuencias *extremantes* ya que, en general, conducen a la condición estacionaria de cierto funcional $\mathcal{F}[\cdot]$. En el caso de placas rectangulares el funcional es

$$\mathcal{F}[u] = \Omega^2[u] \equiv \Omega^2 = \frac{\|u'' + \alpha^2 \bar{u}\|^2 + 2\alpha^2(1 - \nu)[\|\bar{u}'\|^2 - (u'', \bar{u})]}{\|u\|^2} \tag{4}$$

donde fue introducida la notación del análisis funcional: El producto interno $(f, g) = \int_D fg dx dy$; la norma $\|f\|^2 = \int_D f^2 dx dy$. Dado que \mathcal{F} es simétrico y definido positivo para este problema particular las secuencias son minimizantes. Las series de Fourier que pueden ser usadas en dominios rectangulares son de la forma: $\sum \sum f_1 f_2$ en las que $f_1 f_2$ son cualquiera de las siguientes combinaciones $s_i s_j, s_i c_j, c_i s_j, c_i c_j$. La siguiente notación ha sido introducida

$$\alpha_i \equiv i\pi; \beta_j \equiv j\pi; ; s_i \equiv \sin \alpha_i x; s_j \equiv \sin \beta_j y; c_i \equiv \cos \alpha_i x; c_j \equiv \cos \beta_j y$$

con $(i, j) = 0, 1, 2, \dots$. Tales series garantizan, como es sabido, la convergencia en la media de cualquier función cuadrado integrable. Sin embargo, el MEC requiere la convergencia uniforme de las funciones esenciales continuas, que en nuestro problema son w, w' and \bar{w} . Seguidamente se mostrará brevemente, las forma en que se generan las series bidimensionales para una función continua. Sea $\phi = \phi(x, y)$ una función continua de dos variables para la que es requerida la convergencia uniforme en R^2 , puede ser representada por alguna de las siguientes dos expansiones:

$$\phi_M(x, y) = \sum_i^M B_i(y) \sin \alpha_i x + x B_0(y) + b b_0(y); \tag{a} \tag{5}$$

$$\phi_M(x, y) = \sum_i^M A_i(y) \cos \alpha_i x + A_0(y). \tag{b}$$

con $M \rightarrow \infty$. De (5a,b) y para tener convergencia uniforme (de la Teoría de Fourier con la función soporte) será suficiente que:

$$B_i(y) = 2 \int_0^1 [\phi(\eta, y) - \eta B_0(y) - b b_0(y)] \sin \alpha_i \eta d\eta \tag{6}$$

$$B_0(y) = \phi(1, y) - \phi(0, y); \quad b b_0(y) = \phi(0, y) \tag{7}$$

Por otro lado:

$$A_i(y) = 2 \int_0^1 \phi(\eta, y) \cos \alpha_i \eta d\eta; \quad A_0(y) = \int_0^1 \phi(\eta, y) d\eta \tag{8}$$

La ecuación (5b), tanto como la (5a), con la función soporte $-xB_0(y) + bb_0(y)$ da (como puede demostrarse fácilmente) convergencia uniforme para ϕ . Debería notarse que aún cuando tales funciones soporte, en algunos casos, surgirían naturalmente después de integrar, ellas son una de las bases para la demostración de la validez de la solución MEC. Ahora bien, si cualquiera de las funciones de y en (5a,b) son expandidas de forma análoga en la variable y formalmente igual a (5) serán consideradas todas las combinaciones posibles. Esto es, si uno comienza de (5a), y por ejemplo

$$\begin{aligned} B_i(y) &= \sum_j^N A_{ij} \sin \beta_j y + yA_{i0} + a_i; & B_0(y) &= \sum_j^N A_{0j} \sin \beta_j y + yA_{00} + a_0; \\ bb_0(y) &= \sum_j^N b_j \sin \beta_j y + yb_0 + k \end{aligned} \quad (9)$$

puede ser escrito lo siguiente

$$\phi_{MN}(x, y) = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N A_{ij} s_i s_j + F(x, y) \quad (10)$$

y la función soporte bidimensional $F(x, y)$ es escrita como:

$$F(x, y) \equiv x \left(a_0 + \sum_{j=1}^N A_{0j} s_j \right) + y \left(b_0 + \sum_{i=1}^M A_{i0} s_i \right) + A_{00} xy + \sum_{j=1}^N b_j s_j + \sum_{i=1}^M a_i s_i + k. \quad (11)$$

(Una deducción análoga puede ser hecha comenzando de una expansión de cosenos) (5b)). Como puede observarse, la convergencia uniforme es lograda si se comienza de (5a). Esto también se logra con (5b). Otras combinaciones son evidentemente válidas y posibles. Debe ser seleccionada la más adecuada. Consecuentemente, la función ϕ_{MN} (10) a ser usada en este trabajo, es una secuencia minimizante del funcional \mathcal{F} ya que las segundas derivadas de ϕ_{MN} convergen —al menos— en L_2 hacia la correspondiente derivadas segundas. Todas las derivadas segundas contendrán al menos términos de la forma $\sum \sum f_1 f_2$ (como puede ser verificado fácilmente), con convergencia en L_2 . Las incógnitas son las constantes $\{A_{ij}\}$, $\{a_i\}$, $\{b_j\}$ y k con $i, j = 0, 1, 2, \dots$. En particular el requerimiento de satisfacción de las eventuales condiciones esenciales de borde (aquellas que involucran ϕ_{MN} , ϕ'_{MN} o $\bar{\phi}_{MN}$), reduce el número de incógnitas. Por ejemplo, la placa con dos bordes consecutivos simplemente apoyados y los otros dos libres (SSFF) conduciría a $\{a_i\} = \{b_j\} = k = 0$. Luego, se concluye que, cumplido el procedimiento de generación, la convergencia uniforme de las funciones esenciales (aquí ϕ' , $\bar{\phi}$ y ϕ) está asegurada. También $\mathcal{F}[\phi_{MN}] \rightarrow \mathcal{F}[\phi]$ cuando $M, N \rightarrow \infty$. De nuevo debería señalarse que las funciones esenciales clásicas deberían ser continuas para que sea lograda la convergencia uniforme.

PLACA RECTANGULAR SOPORTADA EN SUS VÉRTICES

La siguiente secuencia extremante es propuesta para los desplazamientos transversales de una placa libre,

$$\begin{aligned} w_{MN}(x, y) &= \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \frac{A_{ij}}{\beta_i \gamma_j} s_i s_j + x \left(a_0 + \sum_{j=1}^N \frac{A_{0j} s_j}{\gamma_j} \right) + y \left(b_0 + \sum_{i=1}^M \frac{A_{i0} s_i}{\beta_i} \right) + \\ &A_{00} xy + \sum_{j=1}^N \frac{b_j s_j}{\gamma_j} + \sum_{i=1}^M \frac{A_{i0} s_i}{\beta_i} + k. \end{aligned} \quad (12)$$

Es formalmente coincidente con (10). Los bordes libres dan origen a las condiciones naturales que no necesitan ser cumplida por la secuencia extremante. En el caso que nos ocupa, imponiendo las condiciones de borde para la placa apoyada rígidamente en sus vértices en los puntos como en (3), se obtiene la expresión

general de la función de los desplazamientos transversales propuesta (secuencia extremante) para el problema del título. Después de su reemplazo en el funcional (4) y posterior minimización se obtiene la solución.

Las formas modales estudiadas para este caso pueden ser adecuadamente agrupadas por sus tipos de simetrías y antisimetrías. Esto es, antisimétrico en los ejes x e y , simétricos en los ejes x e y , antisimétrico en el eje x y simétrico en el eje y y finalmente antisimétrico en el eje y y simétrico en el eje x . En particular y por brevedad, el algoritmo es detallado para el primer caso de simetría; para los otros casos son mostradas las secuencias propuestas. Las expresiones correspondientes pueden ser encontradas en Rosales⁶. Cada subconjunto es también completo en L_2 .

Forma Modal: Modo Antisimétrico en x e y

Proponiendo la secuencia minimizante (con $P = 2, 4, 6, \dots$), y teniendo en cuenta (3)

$$w_{1MN}(x, y) = \sum_{i=P} \sum_{j=P} \frac{A_{ij}s_i s_j}{\beta_i \gamma_j} + (x - \frac{1}{2}) \sum_{j=P} \frac{A_{0j}s_j}{\gamma_j} + (y - \frac{1}{2}) \sum_{i=P} \frac{A_{i0}s_i}{\beta_i} \quad (13)$$

las ecuaciones resultantes obtenidas de la aplicación del MEC son

$$A_{0j} \left[\Delta_j - \sum_{p=P} \frac{U_{pj}m_{pj}}{D_{pj}} \right] + \sum_{p=P} A_{p0} \left[r_{pj} - \frac{V_{pj}m_{pj}}{D_{pj}} \right] = 0 \quad (14)$$

$$\sum_{q=P} A_{0q} \left[r_{iq} - \frac{n_{iq}U_{iq}}{D_{iq}} \right] + A_{i0} \left[\delta_i - \sum_{q=P} \frac{V_{iq}n_{iq}}{D_{iq}} \right] = 0 \quad (15)$$

La siguiente notación fue introducida (usando índices pares y/o impares):

$$\begin{aligned} D_{ij} &= [(\beta_i^2 + \alpha^2 \gamma_j^2)^2 - \Omega^2]; & U_{ij} &= 2\lambda_i \beta_i (\alpha^4 \gamma_j^4 + \alpha^2 \nu \beta_i^2 \gamma_j^2 - \Omega^2) \\ V_{ij} &= 2\mu_j \gamma_j (\beta_j^4 + \alpha^2 \nu \beta_i^2 \gamma_j^2 - \Omega^2); & W_{ij} &= 4\lambda_i \mu_i \beta_i \gamma_j \Omega^2 \\ \lambda_i &= I_i - \frac{L_i}{2}; & \mu_j &= J_j - \frac{M_j}{2}; & I_p &= (x, s_p) = \frac{(-1)^{p+1}}{\beta_p} \\ J_q &= (y, s_q) = \frac{(-1)^{q+1}}{\gamma_q}; & L_p &= (1, s_p) = \frac{1 - (-1)^p}{\beta_p}; & M_q &= (1, s_q) = \frac{1 - (-1)^q}{\gamma_q} \\ \Delta_j &= \frac{\gamma_j^2 \alpha^4}{24} + \alpha^2 (1 - \nu) - \frac{\Omega^2}{24 \gamma_j^2}; & m_{pj} &= -\frac{\lambda_p}{2} \left[\frac{-\gamma_j^2 \alpha^4}{\beta_p} - \nu \alpha^2 \beta_p + \frac{\Omega^2}{\beta_p \gamma_j^2} \right] \\ r_{pj} &= \nu \alpha^2 \lambda_p \mu_j \beta_p \gamma_j + \Omega^2 \frac{\lambda_p \mu_j}{\beta_p \gamma_j}; & k_j &= -\frac{\Omega^2 \mu_j}{12 \gamma_j} \\ n_{iq} &= -\frac{\mu_q}{2} \left[\frac{-\beta_i^2}{\gamma_q} - \nu \alpha^2 \gamma_q + \frac{\Omega^2}{\beta_i^2 \gamma_q} \right]; & \delta_i &= \frac{\beta_i^2}{24} + \alpha^2 (1 - \nu) - \frac{\Omega^2}{24 \beta_i^2} \end{aligned}$$

Forma modal: simétrica en x e y

Se propone la siguiente secuencia ($I = 1, 3, 5, \dots$)

$$w_{2MN}(x, y) = \sum_{i=I} \sum_{j=I} \frac{A_{ij}s_i s_j}{\beta_i \gamma_j} + \sum_{i=I} \frac{a_i s_i}{\beta_i} + \sum_{j=I} \frac{b_j s_j}{\gamma_j}. \quad (16)$$

Solución	Ω_1	$\Omega_2 = \Omega_3$	Ω_4	Ω_5
MEC	7.110911	15.77029	19.59589	38.43100
MEF1	7.110922	15.77035	19.59635	38.43252
MEF2	7.121289	15.75605	19.42410	38.51621

Tabla 1: Placa cuadrada apoyada en sus vértices ($\alpha = 1$). Comparación de resultados de las cinco primeras frecuencias halladas con MEC ($M = N = 8000$), MEF1 (225 elementos) y MEF2 (900 elementos).

Forma modal: antisimétrica en x y simétrica en y

La secuencia minimizante es ($I = 1, 3, 5, \dots$ and $P = 2, 4, 6, \dots$)

$$w_{3MN}(x, y) = \sum_{i=P} \sum_{j=I} \frac{A_{ij} s_i s_j}{\beta_i \gamma_j} + \sum_{i=P} \frac{a_i s_i}{\beta_i} + \left(x - \frac{1}{2}\right) \left[\sum_{j=I} \frac{A_{0j} s_j}{\gamma_j} \right]. \quad (17)$$

Forma modal: antisimétrica en y y simétrica en x

Los resultados se obtienen intercambiando i por j y viceversa, en (17).

RESULTADOS NUMÉRICOS Y CONCLUSIONES

A los efectos de ilustrar la utilización del MEC se han obtenido valores numéricos de los parámetros naturales de frecuencia para la placa rectangular con bordes libres y sus cuatro vértices apoyados. En la Tablas 1 y 2 se muestran los resultados hallados con los siguientes métodos:

- MEC (Método del Elemento Completo) con $M = N = 8000$ (no implica tamaño de matriz), desarrollado en este trabajo;
- MEF1 (Método de los Elementos Finitos). Mediante este método se obtuvieron los valores de los coeficientes de frecuencia correspondientes a los 5 primeros modos naturales de vibración libre de una placa rectangular apoyada en sus cuatro vértices. Se utilizó un elemento placa rectangular conforme de 16 grados de libertad, cuyo algoritmo fue desarrollado por Bogner, Fox y Schmit⁷. Se implementó el mismo a través de un programa codificado en Visual Basic¹⁰,
- MEF2 (Método de los Elementos Finitos con el código ALGOR). Usa elemento de placa Veubecke conforme con 6 grados de libertad. Para obtenerse el comportamiento de placa deben restringirse los 3 grados de libertad de momentos en el plano xy (T_x, T_y, R_z). Los resultados fueron hallados con 900 elementos.

La Tabla 1 contiene las cinco primeras frecuencias para la placa cuadrada apoyada en los vértices. Como se ha dicho arriba el MEC da lugar a valores exactos de la frecuencia si $M, N \rightarrow \infty$. Pueden así hallarse resultados numéricos arbitrariamente precisos fijando el número de dígitos de precisión deseados e incrementando M, N hasta alcanzar el objetivo. Cabe destacar que el valor de M o N no implica número de ecuaciones dado que el algoritmo conduce a un proceso iterativo. Además se trabaja con índices pares o impares. Puede observarse que los valores de MEF1 (cotas superiores) son excelentes ya que difieren a partir del 5^{to} decimal respecto de la solución del MEC.

α	Ω_i			
	Ω_1		Ω_2	Ω_3
	MEC	MEF1	MEF1	MEF1
1.5	8.92557	8.92565	21.53756	25.82085
2.0	9.26084	9.29092	27.49499	32.82599
2.5	9.38376	9.38383	33.61162	35.80821

Tabla 2: Placa rectangular apoyada en sus vértices ($\alpha = 1.5, 2, 2.5$). MEC con $M=N=8000$, MEF1 con 100 elementos.

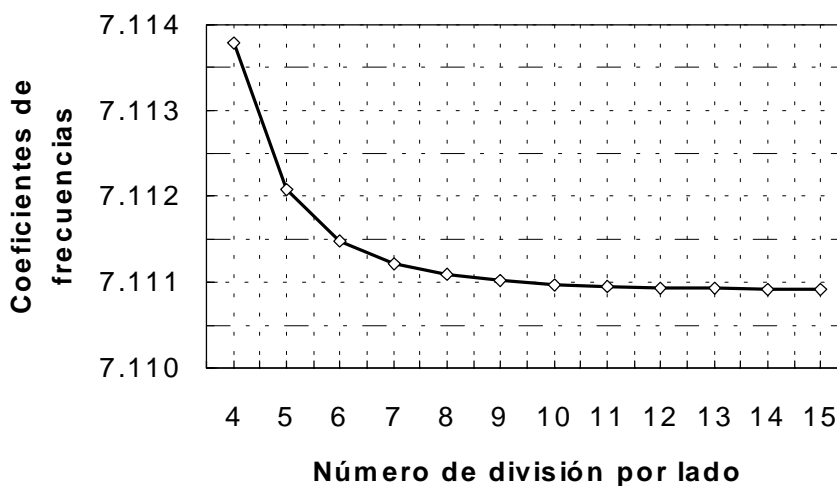


Figura 1: Gráfico de convergencia del algoritmo MEF1 utilizando el elemento Bogner,Fox y Schmit.

Como es conocido e inevitable los errores numéricos de redondeo impiden el incremento arbitrario del número de elementos o términos en algunos ejemplos. Como muestra, todos los cálculos con MEC y MEF1 fueron realizados con doble precisión (16 dígitos). Se probó un caso particular de incrementar en MEF1 la precisión a 24 dígitos (con el aumento correspondiente de memoria y tiempo de computación), obteniéndose el valor de $\Omega_1 = 7.119161$. Se observa que MEF1 da resultados extremadamente precisos.

Es evidente que el hecho de disponer de la solución MEC "exacta" (arbitrariamente precisa) permite llegar a esta conclusión. Además es conocido que las frecuencias obtenidas con MEF van perdiendo precisión al aumentar su orden. Este no es el caso del MEC como puede observarse en la Tabla 1 que los valores numéricos de las frecuencias superiores difieren en mayor medida. Debe aclararse que estos comentarios se encuadran en un estudio académico y de validación de un método numérico ya que desde el punto de vista ingenieril los tres métodos proveen de resultados totalmente aceptables.

Adicionalmente se muestra la forma de convergencia cuando se utiliza MEF1 en la Tabla 3 y Figura 1.

Otro detalle que merece comentarse son los resultados hallados con MEF2, el código ALGOR. A pesar de tratarse del elemento de placas Veuvecke que es conforme, la convergencia de los autovalores es alternada. Esto es, para modos simétricos es cota superior (en Tabla 1: Ω_1, Ω_5) y para modos antisimétricos ($\Omega_2 = \Omega_3$,

No. elem.	Ω_1
1	8.063853583
4	7.155383073
9	7.119836171
16	7.113785991
25	7.112101666
36	7.111485860
49	7.111217867
64	7.111086374
81	7.111016105
100	7.110976177
121	7.110952545
144	7.110938241
169	7.110929606
196	7.110924539
225	7.110921876

Tabla 3: Convergencia del método MEF1. Valores de Ω_1 hallados incrementando el número de elementos de una placa completa.

Ω_4) es cota inferior (ver Tabla 1). Este comportamiento puede explicarse con la forma de plantear la matriz de masa. En este código se utilizan masas concentradas (lumped masses) y la existencia de bordes libres induce a este comportamiento. En un problema similar (vibraciones de placas libres) estudiado por los autores⁹ este algoritmo dió como resultado todas cotas inferiores.

A modo de ilustración se muestran las formas modales correspondientes a las 5 primeras frecuencias, para una placa cuadrada apoyada en sus cuatro vértices (Figuras 2 a 5). Por ser $\alpha = 1$ los modos 2 y 3 coinciden.

Respecto a una extensión del presente trabajo, actualmente está en desarrollo la implementación del MEC para apoyos puntuales, lineales o curvos, rígidos y arbitrariamente localizados en la placa. Nuevamente el objetivo es obtener valores "exactos" (arbitrariamente precisos) que permitan confrontar otros métodos aproximados.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo fue parcialmente financiado por CONICET y la SGCyT de la Universidad Nacional del Sur. La primera autora es investigadora científica del CONICET. El tercer autor es becario del Proyecto FOMEC 801 de la Facultad Regional Concepción del Uruguay de la Universidad Tecnológica Nacional. Todas las instituciones son de Argentina.

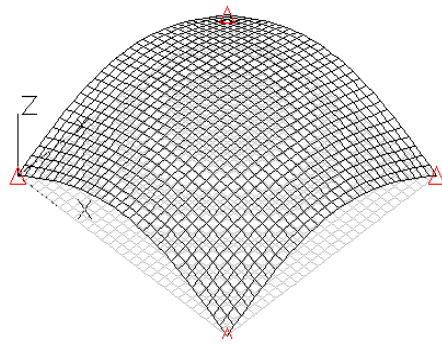


Figura 2: Placa cuadrada apoyada en sus vértices. Primer modo de vibración.

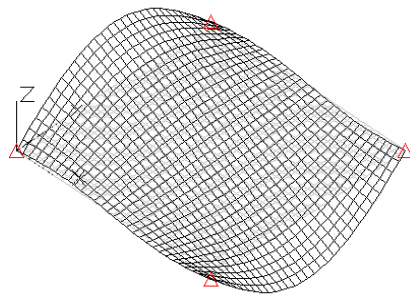


Figura 3: Idem Fig. 2: Segundo modo (igual al tercero girado 90°).

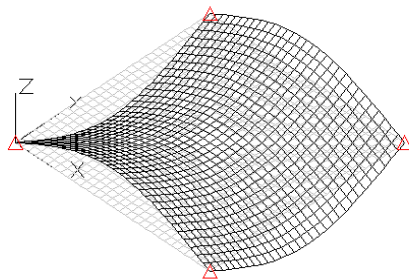


Figura 4: Idem Fig. 2: Cuarto modo.

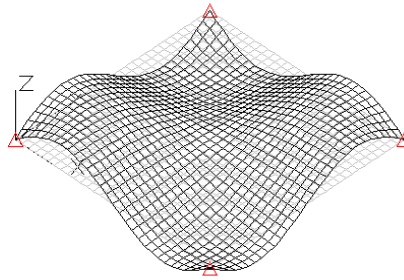


Figura 5: Idem Fig. 2: Quinto modo.

REFERENCIAS

- [1] Carlos P. Filipich y Marta B. Rosales. Beams and arcs: exact frequencies via a generalized solution. *Journal of Sound and Vibration* **170**, pp 263-269, 1994.
- [2] Carlos P. Filipich, Marta B. Rosales y Víctor H. Cortínez. A generalized solution for exact frequencies of a Timoshenko beam. *Latin American Applied Research* **26**, pp 71-77, 1996.
- [3] Carlos P. Filipich y Marta B. Rosales. A variational solution for an initial conditions problem. *Applied Mechanics Review* **50**, S50-S55, 1997.
- [4] Carlos P. Filipich and Marta B. Rosales. Dynamic behavior of a uniform linear beam supported with non-linear rotational springs. *Proceedings Fourth World Congress on Computational Mechanics (WCCM)*. Buenos Aires, Argentina. CD-ROM 16 pp, 1998.
- [5] Carlos P. Filipich, Marta B. Rosales y Patricia M. Bellés. Natural Vibration of Rectangular Plates considered as Tridimensional Solids. *Journal of Sound and Vibration* **212** (4), pp 599-610, 1998.
- [6] Marta B. Rosales. Un método variacional no clásico y sus aplicaciones a estática y dinámica de elementos estructurales. Tesis Doctoral, Universidad Nacional del Sur, Argentina, 1997.
- [7] F.K. Bogner, R. L. Fox y L.A. Schmit. The generation of inter-element compatible stiffness and mass matrices by the use of interpolation formulas. *Matrix Methods in Structural Mechanics AFFDL-TR-66-80*, pp 397-443, 1966.
- [8] ALGOR Software. Version 4 1997 Algor Inc. Pittsburgh, USA.
- [9] Carlos P. Filipich y Marta B. Rosales. Arbitrary precision frequencies of a free rectangular thin plate (en revisión). *Journal of Sound and Vibration*. Julio 1999.
- [10] Raúl E. Rossi. Introducción al Análisis de vibraciones con elementos finitos, Apuntes del Curso de Posgrado, Departamento de Ingeniería, Universidad Nacional del Sur, 1999.