

ESTRATEGIAS PARA LA INTEGRACIÓN IMPLÍCITA DE ECUACIONES CONSTITUTIVAS EN MODELOS COHESIVO-FRICCIONALES

Ricardo H. Lorefice

*Departamento de Estructuras, Facultad de Ciencias Exactas y Tecnologías,
Univ. Nac. de Santiago del Estero,
Av. Belgrano (S) N° 1912, (4200) Sgo. del Estero, Argentina*

Guillermo Etse

*Laboratorio de Estructuras - Universidad Nacional de Tucumán
Av. Roca 1800, C.C. 134, (4000) S. M. de Tucumán, Argentina
CONICET*

RESUMEN

Uno de las mayores dificultades a resolver cuando se trabaja con modelos constitutivos full tridimensionales para hormigón que involucran formulaciones de ablandamiento por deformación, no asociatividad y fuertes variaciones en la curvatura de la superficie de fluencia, tanto en el plano desviador como en el volumétrico, es el diseño e implementación de algoritmos robustos y eficientes para la integración temporal de las variables de estado, y, en segundo lugar, el desarrollo de un procedimiento iterativo de solución del sistema de ecuaciones no lineales resultante que sea consistente con la integración de la ecuación constitutiva. Se presentan dos algoritmos implícitos basados en el Método de Retorno de Euler para la integración de las ecuaciones constitutivas. Se discuten diferentes alternativas para la implementación computacional dentro del marco del Método de los Elementos Finitos, y se propone un procedimiento alternativo de integración para el caso de modelos tridimensionales en el espacio general de tensiones. Finalmente, se comparan las ventajas de los distintos procedimientos mediante el análisis de problemas de valores de borde y se estudia la influencia del método de integración en la capacidad predictiva de procesos de falla de estructuras empleando el Modelo Extendido de Leon 3D.

ABSTRACT

The design and numerical implementation of robust and efficient algorithms for the temporal integration of state variables, and the development of an iterative procedure to solve the nonlinear algebraic problem which must be consistent with the numerical integration of constitutive equations is a major issue when constitutive equations for concrete are considered with strain-softening, non-associativity and yield surfaces with strong variations of the curvature both in the deviatoric as well as in the volumetric plane. Two implicit algorithms based on the Backward Euler Method for the numerical integration of constitutive equations are analyzed in this paper. Different approaches to the computational implementation are discussed within the framework of Finite Element Method and alternative procedures of integration are discussed in the general three dimensional stress space. Finally, advantages and influence of these different strategies in the prediction of failure process of structures are compared by computational analysis of boundary value problems using the Three Dimensional Extended Leon Model.

INTRODUCCION

Originalmente, el Método de Proyección al Punto más Cercano (CPPM) fue propuesto por Johnson¹ sobre la base del análisis convexo en conjunción con la teoría de la deformación total de Hencky. El primer procedimiento numérico que involucró el CPPM se debió a Froier y Samuelsson², para modelos independientes del primer invariante y a Runneson y Booker³ para el criterio de fluencia de Tresca. En los últimos tiempos se han realizado avances empleando el CPPM en modelos constitutivos complejos (ver Fuschi⁴, y Bicanic y Pearce⁵). Entre las principales ventajas que pueden distinguirse cuando se compara el CPPM con otros métodos de integración, se

destaca la precisión de sus soluciones, particularmente cuando se trabaja con incrementos de deformación grandes, y, en segundo lugar, el hecho de que éste es el único algoritmo que garantiza una solución cuando se consideran superficies de fluencia convexas. El empleo de otros métodos puede no brindar valores reales para la solución de la ecuación $F^{(n+1)}(\Delta\lambda) = 0$, especialmente si la formulación constitutiva involucra ablandamiento definido por funciones de alto orden de las variables plásticas.

MÉTODO DE PROYECCIÓN AL PUNTO MÁS CERCANO

Para un material elastoplástico, la integración de las ecuaciones constitutivas se reduce a la solución del siguiente sistema de ecuaciones

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \dot{\boldsymbol{\sigma}}_e - \dot{\boldsymbol{\sigma}}_p = \mathbf{E} : \left(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_e - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p \right) \quad (1)$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p = \dot{\kappa} \mathbf{m} \quad (2)$$

$$\mathbf{m} = \mathbf{A}^{-1} : \mathbf{n} \quad (3)$$

$$\dot{\mathbf{q}} = \dot{\kappa} \mathbf{H} : \mathbf{m} \quad (4)$$

En las ecuaciones anteriores, $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$, $\dot{\boldsymbol{\sigma}}_e$ y $\dot{\boldsymbol{\sigma}}_p$ son las tasas del tensor de tensiones, el tensor de prueba y el tensor plástico, respectivamente. \mathbf{E} es el tensor constitutivo elástico del material, y $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_e$ y $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p$ son las tasas de deformación elástica y plástica respectivamente. En la (2), $\dot{\kappa}$ es la tasa del multiplicador plástico, \mathbf{n} es el tensor gradiente de la función de fluencia, \mathbf{m} el tensor gradiente de la función potencial plástico, $\dot{\mathbf{q}}$ representa la ley de evolución de las variables de estado en endurecimiento/ablandamiento en función de un operador tensorial conveniente \mathbf{H} de las variables de estado. \mathbf{A} es un operador tensorial de cuarto orden que define el grado de no asociatividad del modelo constitutivo. Considerando el instante de tiempo ${}^{n+1}t$ de la historia de deformación del sólido elastoplástico, la integración de las ecuaciones (1)-(4) por medio del CPPM conduce a

$$\boldsymbol{\rho}^{n+1} = \boldsymbol{\rho}_e^{n+1} - \Delta\kappa \mathbf{E} : \mathbf{m}^{n+1} \quad (5)$$

$$\mathbf{q}^{n+1} = \mathbf{q}^n + \Delta\kappa \mathbf{H} : \mathbf{m}^{n+1} \quad (6)$$

$$\boldsymbol{\rho}_e^{n+1} = \boldsymbol{\rho}^n + \mathbf{E} : \Delta\boldsymbol{\varepsilon} \quad (7)$$

con

$$\mathbf{m} = \left[\mathbf{A}^{-1} : \begin{pmatrix} \neq F \\ \neq \boldsymbol{\rho} \end{pmatrix} \right]_{n+1, \boldsymbol{\rho}} \quad (8)$$

En la expresión (8), F representa la función de fluencia del material. La figura 1 muestra una interpretación geométrica del CPPM en el espacio de tensiones. En cada iteración k , la restricción es linealizada para hallar la intersección con $F = 0$. La iteración siguiente, $k+1$, F_{n+1}^{k+1} corresponde al punto más cercano al estado alcanzado en la iteración previa, k , en la métrica definida por el operador \mathbf{C}_A , ver ecuación (12). Matemáticamente, el CPPM lleva a cabo la proyección de tensiones mediante la norma euclidiana. Por lo tanto, el método es equivalente a la solución de un problema de minimización clásico

$$\min E\{\boldsymbol{\sigma}\} \quad (9)$$

con la restricción auxiliar

$$F(\boldsymbol{\sigma}^{n+1}, \mathbf{q}^{n+1}) = 0 \quad (10)$$

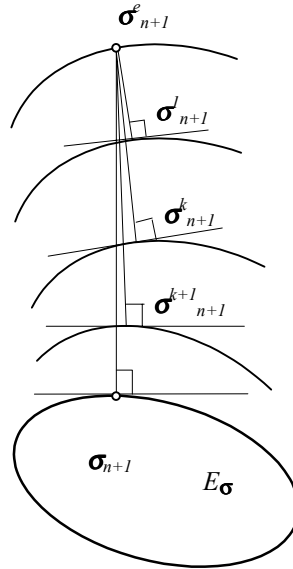


figura 1 Interpretación geométrica del CPPM

donde la energía E es

$$E\{\boldsymbol{\sigma}^{n+1}\} = \frac{1}{2} (\boldsymbol{\sigma}_e^{n+1} - \boldsymbol{\sigma}^{n+1}) : \mathbf{C}_A : (\boldsymbol{\sigma}_e^{n+1} - \boldsymbol{\sigma}^{n+1}) \quad (11)$$

siendo

$$\mathbf{C}_A = \mathbf{A} : \mathbf{C} \quad (12)$$

el tensor elástico inverso, el cual ha sido modificado por el operador de no asociatividad \mathbf{A} . Consideremos ahora el espacio tensional definido por la presión media p , el desviador de tensiones ρ y el ángulo polar θ . El tensor elástico inverso \mathbf{C} en este espacio resulta

$$\mathbf{C} = \frac{1}{2G} (\tilde{\mathbf{I}} - \frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I}) + \frac{1}{9K} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \quad (13)$$

G y K representan el módulo de corte y el módulo de elasticidad volumétrica, respectivamente. \mathbf{I} es el tensor unitario de segundo orden y $\tilde{\mathbf{I}}$ es el tensor unitario de cuarto orden. Restringiendo nuestro análisis al caso de no asociatividad volumétrica y asociatividad deviatorica, el tensor \mathbf{A} y su inversa toman la forma (ver Etse y Willam¹²)

$$\mathbf{A} = \tilde{\mathbf{I}} + \frac{1}{3} \frac{(1-\eta)}{\eta} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \quad \mathbf{A}^{-1} = \tilde{\mathbf{I}} - \frac{1}{3} (1-\eta) \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \quad (14)$$

El parámetro η determina el grado de no asociatividad volumétrica, con los valores extremos $\eta = 1$ para flujo asociado y $\eta = 0$ para flujo plástico incompresible. De las ecuaciones (11)-(14) obtenemos

$$2E\{p, \rho, \theta\} = \frac{I}{2G}(\rho_e - \rho)^2 + \frac{\rho_e \rho}{G}[1 - \cos(\theta_e - \theta)] + \frac{I}{\eta K}(p_e - p)^2 \quad (15)$$

Las coordenadas de tensión p , ρ y θ en el instante de tiempo ${}^{n+1}t$ surgen de la solución para la condición de extremo en la ecuación (15) como sigue:

$$p = p_e - \Delta\lambda \vartheta \frac{\neq F}{\neq p} \quad (16)$$

$$\theta = \theta_e \cos(\eta_e - \eta) - \Delta\lambda \frac{\neq F}{\neq \theta} \quad (17)$$

$$\bar{\eta} = \theta \theta_e \sin(\eta_e - \eta) - \Delta\lambda \frac{\neq F}{\neq \eta} = 0 \quad (18)$$

con

$$F [0 , \quad \Delta\lambda \mu 0 , \quad F\Delta\lambda = 0 \quad (19)$$

y

$$\Delta\lambda = 2G\Delta\kappa , \quad \vartheta = \frac{K\gamma}{2G} \quad (20)$$

En las ecuaciones (16)-(18), p_e , ρ_e y θ_e representan las coordenadas del espacio de tensiones de Haigh-Weestergard correspondientes al predictor elástico.

ALGORITMOS PARA LA IMPLEMENTACIÓN DEL CPPM

Básicamente, existen dos algoritmos diferentes para obtener los valores $(p, \rho, \theta)^{n+1}$ y \mathbf{q}^{n+1} a partir de las ecuaciones (16)-(19): el *Método Directo o Algoritmo de un Nivel*, y el *Método Indirecto o Algoritmo de dos Niveles*. En el primero, el multiplicador plástico se obtiene mediante un proceso iterativo de Newton que involucra simultáneamente la actualización del estado tensional y de las variables de estado. Tal proceso iterativo surge de la condición de consistencia linealizada $\mathbf{F}^{n+1} = \mathbf{F}({}^{n+1}\Delta\lambda) = 0$. Un caso particular es el llamado "*algoritmo directo con dirección constante*", en el cual la dirección de la proyección de tensiones, definida por ${}^{n+1}\mathbf{m}$ se mantiene invariable durante el proceso iterativo para $\Delta\lambda$. Una vez que el nuevo multiplicador plástico ha sido determinado por el método de Newton, se actualiza el tensor gradiente del potencial plástico ${}^{n+1}\mathbf{m}$, y se inicia una nueva iteración para hallar el multiplicador plástico. Este proceso se repite hasta que se cumple el criterio de convergencia adoptado para $\Delta\lambda$. Para superficies de fluencia con fuerte curvatura, la implementación numérica del método directo con dirección constante es más simple, debido a que no se requiere en cada iteración la actualización de la dirección de proyección de tensiones, es decir, no se requiere el empleo del hessiano $\mathbf{M} = \partial\mathbf{m}/\partial\boldsymbol{\sigma}$. Asimismo, el mantener constante el valor del gradiente del potencial ${}^{n+1}\mathbf{m}$ incrementa fuertemente la estabilidad del algoritmo de Newton durante la solución del sistema de ecuaciones algebraicas no lineales ${}^{n+1}F = F({}^{n+1}\Delta\lambda) = 0$, ver Pramono y Willam⁶.

En el método indirecto, primero se realiza la proyección de la tensión de prueba sobre una superficie de fluencia "fija", y luego se resuelve para la incógnita $\boldsymbol{\sigma}^{n+1}$. Una vez hallado este, se actualizan las variables de estado \mathbf{q}^{n+1} y queda entonces definida una nueva superficie de fluencia. Este criterio fue propuesto por Weihe⁷, y empleado por

Stankowski⁸ y otros. En casos de fuertes variaciones de las variables de estado, este procedimiento incrementa fuertemente la estabilidad del proceso numérico e implica una precisión superior. Para la implementación numérica del Modelo Extendido de Leon Tridimensional, se considerarán ambas estrategias de integración.

Modelo constitutivo para hormigón

La formulación constitutiva empleada en este estudio, el Modelo Extendido de Leon, se basa en la teoría no asociada de la plasticidad, incluyendo endurecimiento isotrópico en el régimen de prepico y una formulación basada en conceptos de Mecánica de Fractura para el caso de ablandamiento para describir el comportamiento de pospico, ver Etse⁹ y Etse y Willam¹⁰. El criterio de falla, tanto para el caso de endurecimiento como ablandamiento se define como

$$F = \left[\frac{(1-k^2)}{f_c'^2} \left(p + \frac{\rho g(\theta)}{\sqrt{6}} \right)^2 + \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\rho g(\theta)}{f_c'} \right]^2 + \frac{k^2 m}{f_c'} \left(p + \frac{\rho g(\theta)}{\sqrt{6}} \right) - k^2 c = 0 \quad (21)$$

en la cual p , ρ y θ denotan las coordenadas del espacio de tensiones de Haigh-Weestergard, f_c' representa la resistencia uniaxial a la compresión y la función $g(\theta)$ describe la variación de la resistencia al corte $\rho = \rho(\theta, e)$ como una función del ángulo de Lode y la excentricidad $1/2 \leq e = \rho_t/\rho_c \leq 1$ en analogía con la aproximación elíptica del modelo de 5 parámetros de Willam-Wranke¹¹, y se define como

$$g(\theta) = \frac{4(1-e^2)\cos^2\theta + (2e-1)^2}{2(1-e^2)\cos\theta + (2e-1)\sqrt{4(1-e^2)\cos^2\theta + 5e^2 - 4e}} \quad (22)$$

El crecimiento de la superficie de carga es controlado por el parámetro k , el cual varía entre 0.1 y 1.0. El valor $k = 0.1$ define el límite elástico inicial y el valor $k = 1.0$ indica que la envolvente de falla ha sido alcanzada. La evolución del parámetro k a medida que se incrementan las deformaciones plásticas viene dada por la siguiente función elíptica

$$k = k(\kappa_h) = k_0 + (1-k_0)\sqrt{\kappa_h(2-\kappa_h)}, \quad \text{con } \kappa_h = \frac{1}{x_p} \dot{\lambda} \|\mathbf{m}\| \quad (23)$$

El parámetro x_p es una medida de la ductilidad que introduce la dependencia del comportamiento en endurecimiento con el nivel de confinamiento. El comportamiento de pospico se describe a partir de la degradación de la resistencia a tracción σ_t expresada en función del parámetro de ablandamiento κ_f , el cual representa la variación del desplazamiento de ruptura entre modo I y modo II de falla como

$$\sigma_t = \sigma_t(\kappa_f) = f_t' \exp\left\{ \frac{-5\kappa_f}{u_r} \right\}, \quad \text{con } \kappa_f = \frac{1}{x_f} \dot{\lambda} \langle \mathbf{m}^p \rangle \quad (24)$$

En la expresión anterior, f_t' es la resistencia uniaxial a la tracción, u_r el desplazamiento de ruptura en modo I de falla, x_f es una medida de la ductilidad en ablandamiento y el símbolo $\langle \cdot \rangle$ representa el operador de McAuley. Para reducir la dilatación volumétrica en la región de bajo confinamiento, se considera una regla de flujo no asociada la cual se expresa mediante una modificación del criterio de rotura en la forma

$$Q = \left[(1-k) \left(\frac{p}{f'_c} + \frac{\rho g(\theta)}{\sqrt{6} f'_c} \right) + \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\rho g(\theta)}{f'_c} \right]^2 + \frac{k^2}{f'_c} \left(m_Q + m \frac{\rho g(\theta)}{\sqrt{6}} \right) - k^2 c = 0 \quad (25)$$

con una redefinición del parámetro de fricción como una función del nivel de confinamiento, ver Etse y Willam¹⁰, en la forma $m \rightarrow m_Q = m_Q(p)$. De este modo, el grado de no asociatividad η queda completamente definido para este modelo constitutivo.

Implementación numérica

El modelo extendido tridimensional de Leon fue implementado según una estrategia directa y otra indirecta o multinivel para la integración de las tensiones en incrementos finitos. En el método directo, el proceso iterativo se reduce a la solución de la ecuación

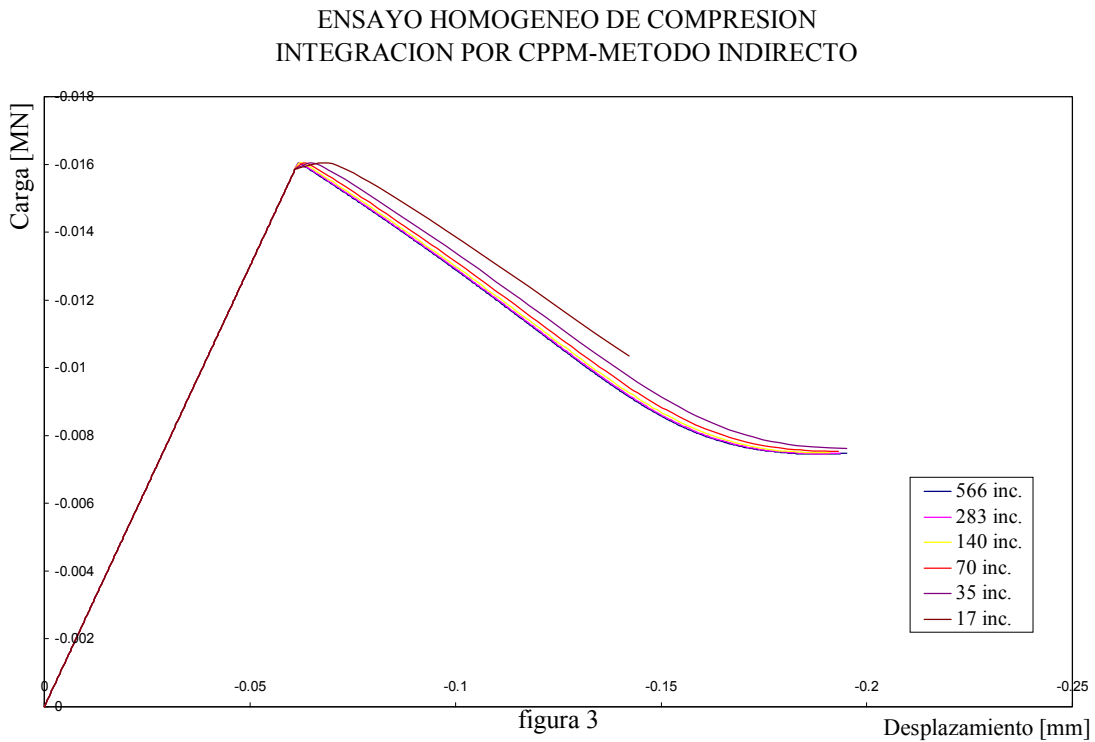
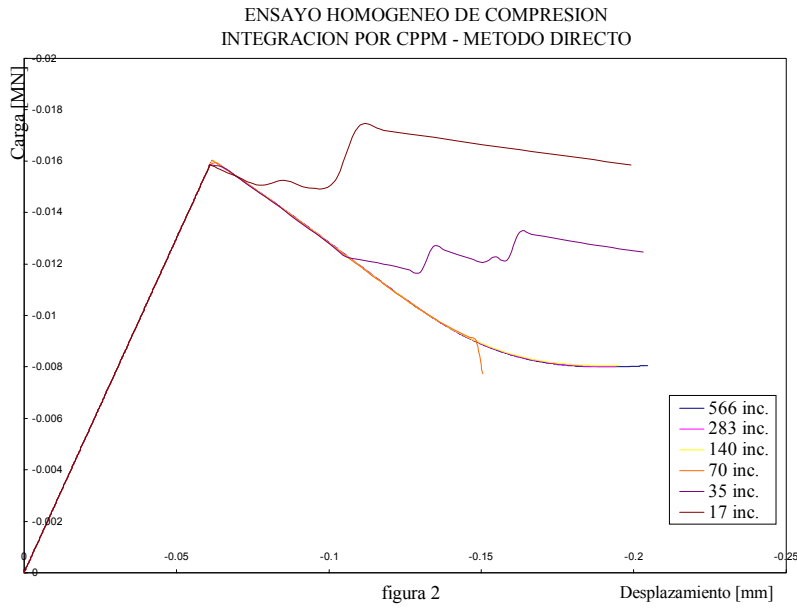
$$F^{n+1}(\boldsymbol{\sigma}^{n+1}, \mathbf{q}^{n+1}) = F(\Delta\lambda^{n+1}) = 0 \quad (26)$$

en términos de la incógnita $\Delta\lambda$. Para la solución se emplea el método de Newton-Raphson con dirección constante, es decir, sin actualización de la dirección del flujo plástico durante la proyección de tensiones.

En el método indirecto, la actualización de tensiones y de las variables de estado se realiza mediante dos procesos iterativos diferentes. Para la actualización de las tensiones, se aplica la (26) en el espacio cartesiano tridimensional de tensiones considerando constantes las variables de estado. Estas últimas se actualizan mediante métodos de interpolación inversa de orden adaptable de acuerdo a lo propuesto por Etse y Willam¹². Contrariamente a los esquemas iterativos, un esquema de interpolación conduce a soluciones que no dependen de los valores iniciales, lo que conlleva a una mayor estabilidad del proceso numérico. Por esta razón, para hallar la función de variables de estado actualizada \mathbf{q}^{n+1} , se adopta un procedimiento que consiste en combinar una iteración de punto fijo (IPF) y una interpolación inversa de orden adaptable (IIOA).

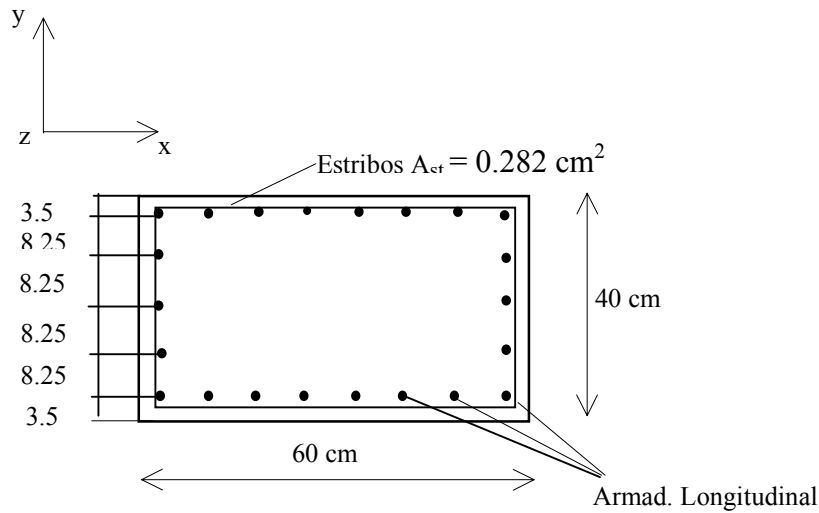
Análisis computacional

A fin de comparar la precisión de los algoritmos descriptos anteriormente, se estudia la historia de carga en un ensayo homogéneo de compresión empleando el Modelo Extendido de Leon 3D. En el análisis por elementos finitos se empleó el elemento lineal hexahédrico HE8, siendo prescriptos los desplazamientos en la cara superior con el fin de captar el comportamiento en ablandamiento del material. La figura 2 muestra la curva carga-desplazamiento obtenida empleando el método directo con diferente tamaño del paso en la rama de pospico. Se observa la gran sensibilidad con respecto al tamaño del paso, traducándose esto en predicciones erróneas del comportamiento de pospico del material. Esto se debe principalmente a que en modelos constitutivos complejos, con fuertes variaciones de las variables de estado, la actualización simultánea del estado de tensión y de los parámetros de estado introduce inestabilidades en el proceso de solución del sistema de ecuaciones mediante el método de Newton. En la figura 3 se observa el mismo ensayo, pero empleando en la integración de las ecuaciones constitutivas el algoritmo indirecto. La comparación de los resultados muestra que aún para grandes incrementos de deformación, como lo demuestra la curva lograda con 17 incrementos, la respuesta de pospico es altamente estable. Esto demuestra la eficiencia del procedimiento de interpolación de orden adaptable comparado con el método directo.

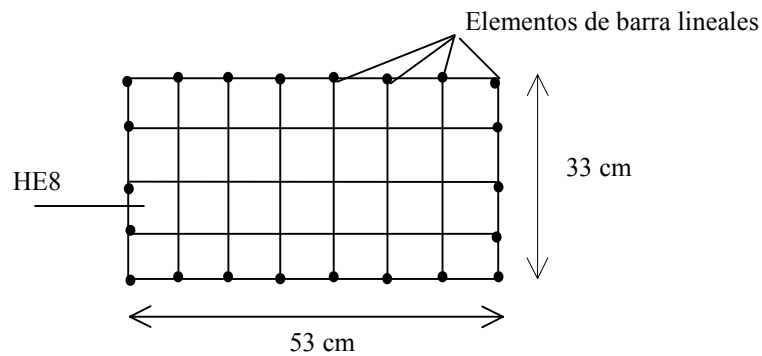


Finalmente, a fin de verificar la capacidad predictiva del modelo, se realizó el análisis computacional mediante el método de los elementos finitos de una columna corta de hormigón armado (ver figura 4), considerando los estados de tensión y deformación plana empleando el modelo extendido bidimensional de Leon y se compararon con los resultados obtenidos con la versión 3D del modelo. La discretización de la estructura de hormigón se realizó con elementos lineales Q4 y HE8 en los casos planos y 3D, respectivamente. Las barras de acero se modelaron empleando elementos lineales de barra y se consideró un comportamiento perfectamente plástico de acuerdo con la teoría de von Mises.

Durante el ensayo numérico se mantuvo el control sobre los nodos de la cara superior de la columna, con el fin de captar el comportamiento de ablandamiento del material. En la figura 5 se aprecian las curvas carga-desplazamiento correspondientes a los tres ensayos, observándose una muy buena concordancia entre los experimentos numéricos en tensión plana y full 3D, tanto en lo que respecta a la predicción de carga máxima como en el comportamiento de pospico. El caso de deformación plana predice una carga última superior, lo que se explica por el efecto de confinamiento que se introduce al imponer restricciones en las deformaciones ε_y . En todos los casos se empleó para la integración de las ecuaciones constitutivas el método indirecto.

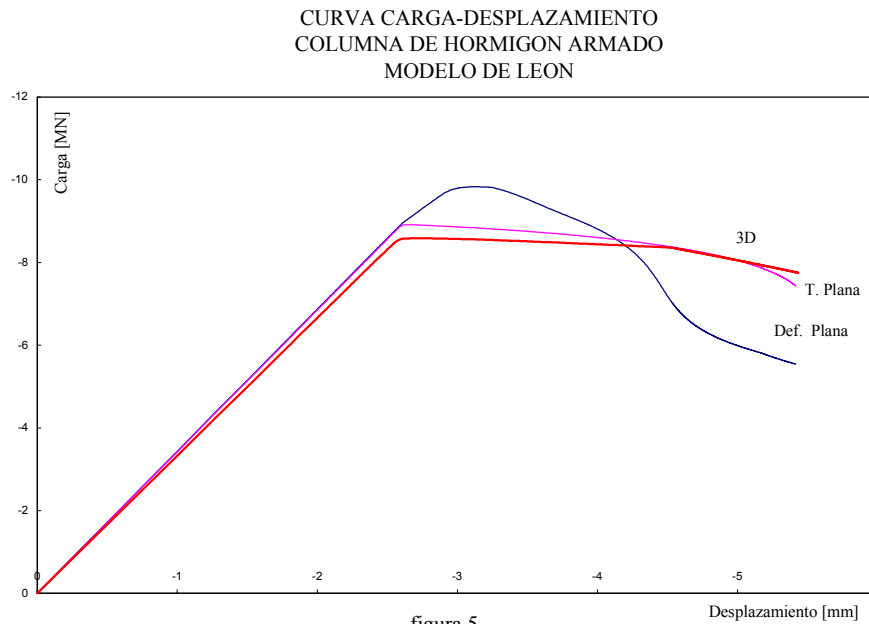


a) Sección Columna



b) Discretización de Elementos Finitos

figura 4



CONCLUSIONES

El análisis numérico demuestra que el método directo o de un nivel tiene gran precisión cuando los incrementos de deformación son muy pequeños, mientras que el algoritmo de dos niveles mejora considerablemente la precisión en el caso de grandes incrementos de deformación. Esto muestra la eficiencia del método indirecto de integración, sobre todo en el caso de formulaciones constitutivas que involucran grandes variaciones de las variables de estado, no asociatividad y fuerte curvatura de la superficie de fluencia.

REFERENCIAS

- [1] Johnson, C., "On Finite Elements Methods for Plasticity Problems", Num. Math., Vol. 26, pp 79-84, 1976.
- [2] Froier, M. y Samuelsson, A., "Variational Inequalities in Plasticity, Recent Developments", Finite Elements in Nonlinear Mechanics, Vol. 1, Bergan (Ed.), Tapir Publishers, 1978.
- [3] Runesson, K. y Booker, J.R. "On Mixed and Displacement Finite Element Methods in Perfect Elasto-Plasticity", Proc. Fourth Int. Conf. in Australia on Finite Element Method, Hoadley (Ed.), 1982.
- [4] Fuschi, P., Dutko, M., Peric, Dj., Owen, D.R.L., "On Numerical Integration of the Five Parameter Model for Concrete", Int. Journal for Numerical Methods in Engineering, 1993.
- [5] Bicanic, N. y Pearce, C.J., "Stress Return for Softening Five Parameter Model for Localized Failure in Concrete", Fracture and Damage in Quasibrittle Structures, Bazant (Ed.), 1994.
- [6] Pramono, E. y Willam, K., "Implicit Integration of Composite Yield Surfaces with Corners", Int. Journal of Engrg. Computations, Vol. 6, 1988.
- [7] Weihe, S., "Implicit Integration Schemes for Multi-Surface Yield Criteria Subjected to Hardening / Softening", MSc. Thesis, University of Colorado, Boulder, 1989.
- [8] Stankowski, T., "Numerical Simulation of Progressive Failure in Particle Composites", Ph. D. thesis, University of Colorado, Boulder, 1990.

- [9] Etse G., "Theoretische und numerische Untersuchung zum diffusen und lokalisierten Versagen in Beton" Ph.D.thesis, University of Karlsruhe, Germany, 1992.
- [10] Etse G. and Willam K., "A Fracture Energy Formulation for Inelastic Behavior of Plain Concrete", ASCE, J.Mech.Div., 120(9) 1983-2011, 1994.
- [11] Willam, K. y Warnke, E., "Constitutive Models for the Triaxial Behavior of Concrete", Int. Assoc. Bridge Struct. Proc., Vol. 19, 1975.
- [12] Etse G. and Willam K., "Integration Algorithms for Concrete Plasticity", Engineering Computations, 1994.