MECOM 99
Mendoza
6-10 de septiembre de 1999

ELEMENTOS FINITOS DE PLACA BASADOS EN LA TEORÍA MICROPOLAR DE COSSERAT

Sergio E. Gutiérrez, Guillermo Etse
Facultad de Ciencias Exactas y Tecnología
Universidad Nacional de Tucumán
Av. Roca 1800 – (4000) Tucumán, Argentina

RESUMEN

Partiendo de la elasticidad tridimensional clásica se han desarrollado numerosas formulaciones de elementos finitos de placa. Algunas de ellas consideraban funciones de continuidad C_1 para los campos de desplazamiento en los elementos. Precisamente con el afán de solucionar los conocidos inconvenientes relacionados con los elementos C_1 muchos autores formularon elementos de continuidad C_0 , los cuales sin embargo presentaban problemas de bloqueos. Esta última dificultad fue salvada en gran medida a partir del desarrollo de los llamados elementos mixtos o enriquecidos, los cuales incluyen grados de libertad adicionales que son condensados a nivel de elementos y que se basan en formulaciones más generales de los funcionales que definen el potencial elástico del sistema o continuo.

En el presente trabajo se propone un elemento finito para placa basado en la teoría de continuos micropolares de Cosserat, los que involucran rigideces y grados de libertad adicionales a nivel local. En este sentido se adicionan a la formulación clásica de Boltzmann tanto rotaciones micropolares como momentos tensionales.

ABSTRACT

Several Plate Finite Element were developed from the three-dimensional classical elasticity. Those elements that require C_1 continuity have several formulation problems. Trying to solve this problem of continuity, plate elements with C_0 continuity were developed, but they present the effect of shear locking. To arrive at efficient an reliable plate bending elements, the mixed interpolation or the reduced integration must be used.

A finite element of plate for a micropolar Cosserat continuum is proposed in this paper. In addition to the displacement field of a Boltzmann continuum and independent of it, rotational strength and degrees of freedom are assigned to every particle of the continuum. Micropolar rotations as well as couple stresses are added to the classical formulation.

INTRODUCCION

Basándose en la elasticidad tridimensional clásica se han desarrollado un sin número de elementos finitos de placa. La teoría de placas delgadas de Kirchhoff establece que el giro de la normal al plano medio de la placa se mantiene ortogonal a la deformada de dicho plano, por lo que los elementos finitos desarrollados requieren de continuidad C_1 debido a la presencia de derivadas segundas de la flecha en la expresión de los trabajos virtuales. Para satisfacer todos los requisitos de continuidad entre elementos basados en la teoría de Kirchhoff se plantearon inconvenientes en muchos casos insoslayables. Como una forma de solución, diversos autores plantearon elementos no compatibles basados en campos de continuidad parcialmente C_1 y C_0 .

La teoría de placas de Reissner-Mindlin introduce el efecto de la deformación por corte transversal y no restringe la ortogonalidad de la normal. Los elementos finitos basados en esta teoría requieren solamente de continuidad C_0 y por lo tanto solucionan el problema de conformidad enunciado anteriormente. No obstante surgieron nuevas dificultades de tipo numérico en las aplicaciones a placas delgadas, enunciadas como fenómeno de bloqueo por corte. Dichas dificultades se resolvieron a través de propuestas de integración reducida o elementos mixtos enriquecidos[1,2,3,4].

Basada en la teoría micropolar de Cosserat se desarrolla una formulación de elementos finitos para placa en la cual los giros de placas se describen a partir de la integración de los microgiros que caracterizan la teoría de Cosserat[5,6,7,8,9,10]. Asimismo las cuplas que se añaden a las tensiones clásicas de Boltzmann en el caso micropolar dan lugar a componentes de rigidez adicionales en el elemento propuesto. Sobre la base de esta nueva propuesta y en diferentes ejemplos y comparaciones existentes en la literatura se estudiará el comportamiento del elemento finito desarrollado.

HIPÓTESIS DE LA TEORÍA DE PLACAS DE REISSNER-MINDLIN

Partiendo de la teoría general de placas de Reissner-Mindlin se enumeran las siguientes hipótesis:

1) En los puntos del plano medio se verifica que $u=v=0$, es decir que los puntos del plano medio sólo se mueven verticalmente.

2) Todos los puntos contenidos en una normal al plano medio tienen el mismo desplazamiento vertical.

3) La tensión normal σ_z es despreciable.

4) Los puntos que antes de la deformación estaban sobre la normal al plano medio de la placa, permanecen al deformarse sobre una misma recta, sin que ésta tenga que ser necesariamente ortogonal a la deformada del plano medio.

Las hipótesis 1 , 2 y 4 permiten definir el campo de desplazamientos a través del espesor de la placa de la forma

$$u_1(x_1,x_2,x_3)=x_3\cdot\theta_2(x_1,x_2) \tag{1}$$

$$u_2(x_1,x_2,x_3)=-x_3\cdot\theta_1(x_1,x_2) \tag{2}$$

$$u_3(x_1,x_2,x_3)=u_3(x_1,x_2) \tag{3}$$

donde θ_1 y θ_2 son los ángulos que definen el giro de la normal.

De esta forma el vector de movimientos queda definido mediante los siguientes grados de libertad nodales.

$$\mathrm{u}=\left[u_3,\theta_1,\theta_2\right]^T \tag{4}$$

CAMPO DE DEFORMACIONES MICROPOLARES DE COSSERAT PARA PLACAS

Para obtener el campo de deformaciones partimos de la teoría micropolar de Cosserat, caracterizada por rotaciones micropolares independientes del movimiento traslacional descripto por el campo de desplazamientos. Así el campo de macro rotaciones del continuo no coincide con el de microrotaciones de la particula material. Consecuentemente el tensor de deformaciones específicas incorpora la contribución del gradiente de desplazamientos y de las rotaciones micropolares.

El tensor de deformaciones puede dividirse en un tensor simétrico y antimétrico de la siguiente forma:

$$\varepsilon_{ij}=\varepsilon_{(ij)}+\varepsilon_{[ij]} \tag{5}$$

con

$$\varepsilon_{(ij)} = \tfrac{1}{2}\left(u_{j,i} + u_{i,j}\right) \qquad \text{simétrico} \qquad (6)$$

$$\varepsilon_{[ij]} = \tfrac{1}{2}\left(u_{j,i} - u_{i,j}\right) - e_{ijk}\cdot\omega_k \qquad \text{antimétrico} \qquad (7)$$

Las componentes simétricas definen el tensor de deformaciones del continuo clásico. Mientras que las componentes antimétricas tienen en cuenta la diferencia entre las rotaciones macro y micropolares, donde ω_k describe el giro independiente del sistema de coordenadas de los puntos de masa.

Entonces el campo resultante de deformaciones es

$$\varepsilon_{ij} = \tfrac{1}{2}\left(u_{j,i} + u_{i,j}\right) + \tfrac{1}{2}\left(u_{j,i} - u_{i,j}\right) - e_{ijk}\cdot\omega_k \qquad (8)$$

Derivando el campo de desplazamientos asumido en la teoría de placa y reemplazando en la ecuación anterior se obtiene:

$$\varepsilon_{11} = u_{1,1} \qquad \varepsilon_{11} = x_3\cdot\theta_{2,1}(x_1,x_2) \qquad (9)$$

$$\varepsilon_{22} = u_{2,2} \qquad \varepsilon_{22} = -x_3\cdot\theta_{1,2}(x_1,x_2) \qquad (10)$$

$$\varepsilon_{33} = u_{3,3} \qquad \varepsilon_{33} = 0 \qquad (11)$$

$$\varepsilon_{12} = \tfrac{1}{2}\left(u_{2,1} + u_{1,2}\right) + \tfrac{1}{2}\left(u_{2,1} - u_{1,2}\right) - \theta_3 \qquad \varepsilon_{12} = -\tfrac{1}{2}\cdot x_3\cdot\left(\theta_{1,1} - \theta_{2,2}\right) - \tfrac{1}{2}\cdot x_3\cdot\left(\theta_{1,1} + \theta_{2,2}\right) \qquad (12)$$

$$\varepsilon_{21} = \tfrac{1}{2}\left(u_{1,2} + u_{2,1}\right) + \tfrac{1}{2}\left(u_{1,2} - u_{2,1}\right) + \theta_3 \qquad \varepsilon_{21} = \tfrac{1}{2}\cdot x_3\cdot\left(\theta_{2,2} - \theta_{1,1}\right) + \tfrac{1}{2}\cdot x_3\cdot\left(\theta_{2,2} + \theta_{1,1}\right) \qquad (13)$$

$$\varepsilon_{13} = \tfrac{1}{2}\left(u_{3,1} + u_{1,3}\right) + \tfrac{1}{2}\left(u_{3,1} - u_{1,3}\right) + \theta_2 \qquad \varepsilon_{13} = \tfrac{1}{2}\cdot\left(u_{3,1} + \theta_2\right) + \tfrac{1}{2}\cdot\left(u_{3,1} - \theta_2\right) + \theta_2 \qquad (14)$$

$$\varepsilon_{31} = \tfrac{1}{2}\left(u_{1,3} + u_{3,1}\right) + \tfrac{1}{2}\left(u_{1,3} - u_{3,1}\right) - \theta_2 \qquad \varepsilon_{31} = \tfrac{1}{2}\cdot\left(\theta_2 + u_{3,1}\right) + \tfrac{1}{2}\cdot\left(\theta_2 - u_{3,1}\right) - \theta_2 \qquad (15)$$

$$\varepsilon_{23} = \tfrac{1}{2}\left(u_{3,2} + u_{2,3}\right) + \tfrac{1}{2}\left(u_{3,2} - u_{2,3}\right) - \theta_1 \qquad \varepsilon_{23} = \tfrac{1}{2}\cdot\left(u_{3,2} - \theta_1\right) + \tfrac{1}{2}\cdot\left(u_{3,2} + \theta_1\right) - \theta_1 \qquad (16)$$

$$\varepsilon_{32} = \tfrac{1}{2}\left(u_{2,3} + u_{3,2}\right) + \tfrac{1}{2}\left(u_{2,3} - u_{3,2}\right) + \theta_1 \qquad \varepsilon_{32} = \tfrac{1}{2}\cdot\left(-\theta_1 + u_{3,2}\right) + \tfrac{1}{2}\cdot\left(-\theta_1 - u_{3,2}\right) + \theta_1 \qquad (17)$$

Además, considerando la relacion $\kappa_{ij} = \omega_{j,i}$ entre el tensor de curvatura y el campo de micro-rotaciones independientes resulta

$$\kappa_{11} = \theta_{1,1} \qquad \kappa_{12} = \theta_{2,1} \qquad \kappa_{13} = 0 \qquad (18)\,(19)\,(20)$$

$$\kappa_{21} = \theta_{1,2} \qquad \kappa_{22} = \theta_{2,2} \qquad \kappa_{23} = 0 \qquad (21)\,(22)\,(23)$$

$$\kappa_{31} = \theta_{1,3} = 0 \qquad \kappa_{32} = \theta_{2,3} = 0 \qquad \kappa_{33} = 0 \qquad (24)\,(25)\,(26)$$

se considera que las rotaciones θ_1 y θ_2 permanecen constante en el espesor de la placa.

Bajo estas consideraciones el vector de deformación queda definido con las siguientes componentes no nulas

$$\bar{\varepsilon}^t = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{21} & \varepsilon_{13} & \varepsilon_{31} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{32} & \kappa_{11} & \kappa_{22} & \kappa_{12} & \kappa_{21} \end{bmatrix} \tag{27}$$

RELACIÓN TENSIÓN - DEFORMACIÓN

Teniendo en cuenta la hipótesis 3 enunciada en la teoría de placa se define el vector de tensiones de la siguiente forma

$$\bar{\sigma}^t = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{22} & \sigma_{12} & \sigma_{21} & \sigma_{13} & \sigma_{31} & \sigma_{23} & \sigma_{32} & \mu_{11} & \mu_{22} & \mu_{12} & \mu_{21} \end{bmatrix} \tag{28}$$

Donde σ_{ij} son las componentes normales y tangenciales de tensiones y μ_{ij} son las cuplas tensionales.

Partiendo de la ecuación constitutiva de la elasticidad tridimensional y teniendo en cuenta que σ_z es nula, para el caso de tensión plana la relación entre tensiones y momentos tensionales con las correspondientes deformaciones y microcurvaturas resulta

$$\bar{\sigma} = E \cdot \bar{\varepsilon} \tag{29}$$

con

$$E = \left[\begin{array}{c|c} E_\sigma & 0 \\ \hline 0 & E_\mu \end{array} \right] \tag{30}$$

siendo

$$E_\sigma = \begin{bmatrix} 2G\cdot\frac{1}{(1-\nu)} & 2G\cdot\frac{\nu}{(1-\nu)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2G\cdot\frac{\nu}{(1-\nu)} & 2G\cdot\frac{1}{(1-\nu)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G+G_c & G-G_c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G-G_c & G+G_c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G+G_c & G-G_c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G-G_c & G+G_c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G+G_c & G-G_c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G-G_c & G+G_c \end{bmatrix} \tag{31}$$

y

$$E_\mu = \begin{bmatrix} \beta\cdot l_c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta\cdot l_c^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta\cdot l_c^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta\cdot l_c^2 \end{bmatrix} \tag{32}$$

debido al carácter desacoplado del comportamiento membranal y flexional considerado en (30) resulta

$$\sigma = E_\sigma \cdot \varepsilon \qquad \text{y} \qquad \mu = E_\mu \cdot \kappa \tag{33}$$

con

G Modulo Resistente al Corte

ν Coeficiente de Poisson

G_c Modulo Resistente al Corte de Cosserat

β Modulo Resistente de Curvatura

l_c Longitud Característica Material

ENERGÍA DE DEFORMACIÓN

Considerando las curvaturas y momentos micropolares planteados en el modelo micropolar de Cosserat la Energía Interna de Deformación se expresa de la forma

$$U = \iiint_V \varepsilon \cdot \sigma \, dV + \iiint_V \kappa \cdot \mu \, dV \tag{34}$$

Teniendo en cuenta que tanto la deformación específica como la tensión pueden expresarse en términos de un tensor simétrico más un tensor antimétrico, puede escribirse

$$U = U^{\sigma,sim} + U^{\sigma,ant} + U^{\mu} \tag{35}$$

donde

$$U^{\sigma,sim} = \tfrac{1}{2} \iiint_V \varepsilon^{sim} \cdot \sigma^{sim} \, dV \tag{36}$$

$$U^{\sigma,ant} = \tfrac{1}{2} \iiint_V \varepsilon^{ant} \cdot \sigma^{ant} \, dV \tag{37}$$

$$U^{\mu} = \tfrac{1}{2} \iiint_V \mu \cdot \kappa \, dV \tag{38}$$

Reemplazando las expresiones de las tensiones y deformaciones se obtiene

$$U^{\sigma,sim} = \tfrac{1}{2} \iiint_V \tfrac{1}{2}\left(\varepsilon_{ij} + \varepsilon_{ji}\right) \cdot \tfrac{1}{2}\left(\sigma_{ij} + \sigma_{ji}\right) dV \tag{39}$$

$$U^{\sigma,ant} = \tfrac{1}{2} \iiint_V \tfrac{1}{2}\left(\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ji}\right) \cdot \tfrac{1}{2}\left(\sigma_{ij} - \sigma_{ji}\right) dV \tag{40}$$

$$U^{\mu} = \tfrac{1}{2} \iiint_V \mu_{ij} \cdot \kappa_{ij} \, dV \tag{41}$$

PRINCIPIO VARIACIONAL

Considerando la expresión de los trabajos virtuales en una placa sobre la cual actúan únicamente una carga uniformemente distribuida q y fuerzas puntuales W_i

La igualdad entre el trabajo de deformación interno virtual y el de las fuerzas exteriores se escribe

$$\iiint_V \delta\varepsilon \cdot \sigma \, dV + \iiint_V \delta\kappa \cdot \mu \, dV = \iint_A \delta u \cdot q \, dA + \sum \delta u \cdot W \tag{42}$$

en término de deformaciones se tiene

$$\iiint_V \delta\varepsilon \cdot E_\sigma \cdot \varepsilon \, dV + \iiint_V \delta\kappa \cdot E_\mu \cdot \kappa \, dV = \iint_A \delta u \cdot q \, dA + \sum \delta u \cdot W \tag{43}$$

operándose de tal forma de obtener términos simétricos y antimétricos resulta

$$\iiint_V \delta\varepsilon^{sim} \cdot E_\sigma \cdot \varepsilon^{sim} \, dV + \iiint_V \delta\varepsilon^{ant} \cdot E_\sigma \cdot \varepsilon^{ant} \, dV + \iiint_V \delta\kappa \cdot E_\mu \cdot \kappa \, dV = \iint_A \delta u \cdot q \, dA + \sum \delta u \cdot W \tag{44}$$

FORMULACIÓN DEL ELEMENTO FINITO DE PLACA SEGÚN TEORÍA MICROPOLAR DE COSSERAT

El plano medio de la placa se discretiza en una malla de elementos isoparamétricos de continuidad C_0. Asumiendo que cada elemento posee *n* nodos y teniendo en cuenta que la flecha y los giros son variables independientes puede efectuarse la interpolación del campo de desplazamientos **u** mediante las siguientes Funciones de Forma:

$$\mathrm{u} = \begin{Bmatrix} w \\ \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^{n} \begin{Bmatrix} N_k \cdot w_k \\ N_k \cdot \theta_{1k} \\ N_k \cdot \theta_{2k} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^{n} N_k \cdot u_k \tag{45}$$

donde

w_k Desplazamiento vertical (flecha) del nodo *k* del plano medio de la placa.

θ_{1k} y θ_{2k} giros de la normal en el nodo *k*.

El campo de deformaciones puede expresarse numéricamente teniendo en cuenta los tensores simétricos y antimétricos, por lo tanto

$$\varepsilon = \sum_{k=1}^{n} \left(B_k^{\varepsilon-sim} + B_k^{\varepsilon-ant} \right) \cdot u_k \tag{46}$$

con

$$B_k^{\varepsilon-sim}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & x_3\cdot\frac{\partial N_k}{\partial x_1} \\ 0 & -x_3\cdot\frac{\partial N_k}{\partial x_2} & 0 \\ 0 & -x_3\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial N_k}{\partial x_1} & x_3\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial N_k}{\partial x_2} \\ 0 & -x_3\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial N_k}{\partial x_1} & x_3\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial N_k}{\partial x_2} \\ \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial N_k}{\partial x_1} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial N_k}{\partial x_1} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial N_k}{\partial x_2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial N_k}{\partial x_2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B_k^{\varepsilon-ant}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -x_3\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial N_k}{\partial x_1} & -x_3\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial N_k}{\partial x_2} \\ 0 & x_3\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial N_k}{\partial x_1} & x_3\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial N_k}{\partial x_2} \\ \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial N_k}{\partial x_1} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial N_k}{\partial x_1} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial N_k}{\partial x_2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial N_k}{\partial x_2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \qquad (47)\ (48)$$

Además,

$$\kappa=\sum_{1}^{n}B_k^{\kappa}\cdot u_k \qquad (49)$$

con

$$B_k^{\kappa}=\begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial N_k}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_k}{\partial x_2} \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_k}{\partial x_1} \\ 0 & \frac{\partial N_k}{\partial x_2} & 0 \end{bmatrix} \qquad (50)$$

Llevando estas expresiones discretizadas de elementos finitos a la expresión de trabajo virtual (44) y considerando

$$\delta\varepsilon=\sum_{k=1}^{n}\left(B_k^{\varepsilon-sim}+B_k^{\varepsilon-ant}\right)\cdot\delta u_k \qquad (51)$$

$$\delta\kappa=\sum_{1}^{n}B_k^{\kappa}\cdot\delta u_k \qquad (52)$$

se tiene

$$\begin{aligned}&\sum_{1}^{n}\delta u_k\cdot\iiint_V\left(B_k^{\varepsilon-sim}\right)^t\cdot E_\sigma\cdot B_m^{\varepsilon-sim}\,dV\cdot u_m+\sum_{1}^{n}\delta u_k\cdot\iiint_V\left(B_k^{\varepsilon-ant}\right)^t\cdot E_\sigma\cdot B_m^{\varepsilon-ant}\,dV\cdot u_m+\\&+\sum_{1}^{n}\delta u_k\cdot\iiint_V\left(B_k^{\kappa}\right)^t\cdot E_\mu\cdot B_m^{\kappa}\,dV\cdot u_m==\iint_A\delta u\cdot q\,dA+\sum\delta u\cdot W\end{aligned} \qquad (53)$$

de donde se deduce que la matriz de rigidez

$$K_{km}=\iiint_V\left(B_k^{\varepsilon-sim}\right)^t\cdot E_\sigma\cdot B_m^{\varepsilon-sim}\,dV+\iiint_V\left(B_k^{\varepsilon-ant}\right)^t\cdot E_\sigma\cdot B_m^{\varepsilon-ant}\,dV+\iiint_V\left(B_k^{\kappa}\right)^t\cdot E_\mu\cdot B_m^{\kappa}\,dV \qquad (54)$$

resulta de una descomposición aditiva de tres componentes, una resultante de las componentes simétricas, otra de las antimétricas más una tercera componente de curvatura, resultando:

$$K = \iiint_V k^{\varepsilon-sim} dV + \iiint_V k^{\varepsilon-ant} dV + \iiint_V k^{\kappa} dV \tag{55}$$

donde

$$k^{\varepsilon-sim} = \begin{bmatrix} N_{k,1} \cdot N_{m,1} + N_{k,2} \cdot N_{m,2} & -N_{k,2} & N_{k,1} \\ -N_{m,2} & \frac{2 \cdot G}{(1-\nu)} \cdot x_3^2 \cdot N_{m,2} \cdot N_{k,2} + G \cdot x_3^2 \cdot N_{m,1} \cdot N_{k,1} + G & -\frac{2 \cdot G \cdot \nu}{(1-\nu)} \cdot x_3^2 \cdot N_{m,1} \cdot N_{k,2} - G \cdot x_3^2 \cdot N_{m,2} \cdot N_{k,1} \\ N_{m,1} & -\frac{2 \cdot G \cdot \nu}{(1-\nu)} \cdot x_3^2 \cdot N_{m,2} \cdot N_{k,1} - G \cdot x_3^2 \cdot N_{m,1} \cdot N_{k,2} & \frac{2 \cdot G}{(1-\nu)} \cdot x_3^2 \cdot N_{m,1} \cdot N_{k,1} + G \cdot x_3^2 \cdot N_{m,2} \cdot N_{k,2} + G \end{bmatrix} \tag{56}$$

$$k^{\varepsilon-ant} = \begin{bmatrix} G_c \cdot \left(N_{k,1} \cdot N_{m,1} + N_{k,2} \cdot N_{m,2} \right) & -G_c \cdot N_{k,2} & G_c \cdot N_{k,1} \\ -G_c \cdot N_{m,2} & G_c \cdot x_3^2 \cdot N_{m,1} \cdot N_{k,1} + G_c & G_c \cdot x_3^2 \cdot N_{m,2} \cdot N_{k,1} \\ G_c \cdot N_{m,1} & G_c \cdot x_3^2 \cdot N_{m,1} \cdot N_{k,2} & G_c \cdot x_3^2 \cdot N_{m,2} \cdot N_{k,2} + G_c \end{bmatrix} \tag{57}$$

$$k^{\kappa} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta \cdot l_c^2 \cdot \left(N_{k,1} \cdot N_{m,1} + N_{k,2} \cdot N_{m,2} \right) & 0 \\ 0 & 0 & \beta \cdot l_c^2 \cdot \left(N_{k,1} \cdot N_{m,1} + N_{k,2} \cdot N_{m,2} \right) \end{bmatrix} \tag{58}$$

ESFUERZOS EN EL ELEMENTO DE PLACA

Integrando la tensiones normales y los momentos micropolares a través del espesor de la placa se obtienen los momentos con respecto al plano medio

$$M_1 = \int_h \sigma_{11} \cdot x_3 \cdot dx_3 + \int_h \mu_{12} \cdot dx_3 \tag{59}$$

$$M_2 = \int_h \sigma_{22} \cdot x_3 \cdot dx_3 + \int_h \mu_{21} \cdot dx_3 \tag{60}$$

$$M_{12} = \int_h \sigma_{12} \cdot x_3 \cdot dx_3 + \int_h \mu_{11} \cdot dx_3 \tag{61}$$

$$M_{21} = \int_h \sigma_{21} \cdot x_3 \cdot dx_3 + \int_h \mu_{22} \cdot dx_3 \tag{62}$$

de igual manera, los esfuerzos cortantes resultan de integrar en el espesor las tensiones transversales

$$Q_{13} = \int_h \sigma_{13} \cdot dx_3 \tag{63}$$

$$Q_{23} = \int_h \sigma_{23} \cdot dx_3 \tag{64}$$

Introduciendo las relaciones constitutivas (33) y teniendo en cuenta los desarrollos (46) a (50) se tiene

$$M_1 = \int_h \frac{2G}{(1-\nu)} \cdot \left(\tfrac{\partial N_k}{\partial x_1} \cdot \theta_{2k} - \nu \cdot \tfrac{\partial N_k}{\partial x_2} \cdot \theta_{1k} \right) \cdot {x_3}^2 \cdot dx_3 + \int_h \beta \cdot l_c^2 \cdot \tfrac{\partial N_k}{\partial x_1} \cdot \theta_{2k} \cdot dx_3 \tag{65}$$

$$M_2 = \int_h \frac{2G}{(1-\nu)} \cdot \left(\nu \cdot \tfrac{\partial N_k}{\partial x_1} \cdot \theta_{2k} - \tfrac{\partial N_k}{\partial x_2} \cdot \theta_{1k} \right) \cdot {x_3}^2 \cdot dx_3 + \int_h \beta \cdot l_c^2 \cdot \tfrac{\partial N_k}{\partial x_2} \cdot \theta_{1k} \cdot dx_3 \tag{66}$$

$$M_{12} = \int_h \left[\left(G+G_c\right) \cdot \left(-\tfrac{\partial N_k}{\partial x_1} \cdot \theta_{1k} \right) + \left(G-G_c\right) \cdot \left(\tfrac{\partial N_k}{\partial x_2} \cdot \theta_{2k} \right) \right] \cdot {x_3}^2 \cdot dx_3 + \int_h \beta \cdot l_c^2 \cdot \tfrac{\partial N_k}{\partial x_1} \cdot \theta_{2k} \cdot dx_3 \tag{67}$$

$$M_{21} = \int_h \left[\left(G-G_c\right) \cdot \left(-\tfrac{\partial N_k}{\partial x_1} \cdot \theta_{1k} \right) + \left(G+G_c\right) \cdot \left(\tfrac{\partial N_k}{\partial x_2} \cdot \theta_{2k} \right) \right] \cdot {x_3}^2 \cdot dx_3 + \int_h \beta \cdot l_c^2 \cdot \tfrac{\partial N_k}{\partial x_2} \cdot \theta_{1k} \cdot dx_3 \tag{68}$$

$$Q_{13} = \int_h \left(G+G_c\right) \cdot \left(\tfrac{\partial N_k}{\partial x_1} \cdot w_k + \theta_{2k} \right) \cdot dx_3 \tag{69}$$

$$Q_{23} = \int_h \left(G+G_c\right) \cdot \left(\tfrac{\partial N_k}{\partial x_2} \cdot w_k + \theta_{1k} \right) \cdot dx_3 \tag{70}$$

Expresando el vector de Esfuerzos Nodales de la forma

$$M^t = \begin{bmatrix} M_1 & M_2 & M_{12} & M_{21} & Q_{13} & Q_{23} \end{bmatrix} \tag{71}$$

y teniendo en cuenta el vector de desplazamientos nodales

$$\mathrm{u}_k = \begin{Bmatrix} w_k \\ \theta_{1k} \\ \theta_{2k} \end{Bmatrix} \tag{72}$$

resulta la ecuación de rigidez de la placa $M = D \cdot \mathrm{u}$ (73)

con

$$D = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{2G\nu}{(1-\nu)} \cdot {x_3}^2 \cdot \frac{\partial N_k}{\partial x_2} & \left(\frac{2G}{(1-\nu)} \cdot {x_3}^2 + \beta \cdot l_c^2 \right) \cdot \frac{\partial N_k}{\partial x_1} \\ 0 & \left(-\frac{2G}{(1-\nu)} \cdot {x_3}^2 + \beta \cdot l_c^2 \right) \cdot \frac{\partial N_k}{\partial x_2} & \frac{2G\nu}{(1-\nu)} \cdot {x_3}^2 \cdot \frac{\partial N_k}{\partial x_1} \\ 0 & -\left(G+G_c\right) \cdot {x_3}^2 \cdot \frac{\partial N_k}{\partial x_1} & \left(G-G_c\right) \cdot {x_3}^2 \cdot \frac{\partial N_k}{\partial x_2} + \beta \cdot l_c^2 \cdot \frac{\partial N_k}{\partial x_1} \\ 0 & -\left(G-G_c\right) \cdot {x_3}^2 \cdot \frac{\partial N_k}{\partial x_1} + \beta \cdot l_c^2 \cdot \frac{\partial N_k}{\partial x_2} & \left(G+G_c\right) \cdot {x_3}^2 \cdot \frac{\partial N_k}{\partial x_2} \\ \left(G+G_c\right) \cdot \frac{\partial N_k}{\partial x_1} & 0 & \left(G+G_c\right) \\ \left(G+G_c\right) \cdot \frac{\partial N_k}{\partial x_2} & -\left(G+G_c\right) & 0 \end{bmatrix} \tag{74}$$

CONCLUSIONES

A partir de la teoría microplar de Cosserat se ha desarrollado la formulación matricial de un elemento finito de placa que involucra grados de libertad rotacionales y momentos tensionales adicionales a la teoría clásica. Puede observarse que a partir de este desarrollo generalizado se deduce el elemento finito clásico de la teoría de Reissner-Mindlin anulándose los términos antimétricos de deformaciones y de curvatura presentes en esta propuesta.

Debe resaltarse la aparición de tres nuevos parámetros materiales en la relación tensión-deformación, los módulos G_c , β y la longitud de Cosserat l_c (ver 31 y 32). El módulo resistente al corte de Cosserat G_c contribuye en los términos antimétricos, mientras que el módulo resistente de curvatura β y la longitud característica material l_c relacionan las curvaturas y los momentos tensionales.

Los esfuerzos en el elemento de placa enriquecen la formulación considerando no sólo las tensiones normales sino también los términos antimétricos y los momentos tensionales característicos en el continuo de Cosserat.

Teniendo en cuenta las particularidades introducidas por el modelo micropolar de Cosserat se han de analizar las prestaciones del elemento finito propuesto en ensayos numéricos típicos y se compararán sus predicciones con las de los elementos clásicos.

REFERENCIAS

[1] Dvorkin, E. N. “Nonlinear Analysis of Shells Using the MITC Formulation”. Archives of Computational Methods in Engineering. Vol. 2.2. CIMNE. Barcelona. 1995.

[2] Zrahia, U.; Bar-Yoseph P. “Plate Spectral Elements based upon Reissner-Mindlin Theory”. International Journal for Numerical Methods in Engineering. 38 (1995). Wiley & Sons, Ltd.

[3] Bucalem, M.L., Bathe, K.J. “Finite Element Analysis of Shell Structures”. Archives of Computational Methods in Engineering. Vol. 4. CIMNE. Barcelona. 1997.

[4] Hauptmann, R.; Schweizerhof, K. “A Systematic Development of Solid-Shell Element Formulations for Linear adn Non-Linear Analyses Employing only Displacement Degrees of Freedom”. International Journal for Numerical Methods in Engineering. 42 (1998). Wiley & Sons, Ltd.

[5] Cosserat, E. y F. “Theorie des Corps Deformables”. Herman et fils, Paris. 1909.

[6] Willam, K.; Dietsche, A.; Iordache, M-M.; Steinmann P. “Localization in Micropolar Continua”. Report CU/SR-94/7. Department of Civil, Environmental & Architectural Engineering. University of Colorado at Boulder. 1994.

[7] Ghosh, S.; Liu, Y. “Voronoi Cell Finite Element Model Based on Micropolar Theory of Thermoelasticity for Heterogeneous Materials”. International Journal for Numerical Methods in Engineering. 38 (1995). Wiley & Sons, Ltd.

[8] Sansour, C.; Bednarczyk, H. “The Cosserat surface as a shell model, theory and finite-element formulation”. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering”. 120 (1995). Elsevier Science S.A.

[9] Sansour, C.; Bocko, J. “On Hybrid Stress, Hybrid Strain and Enhanced Strain Finite Element Formulations for a Geometrically Exact Shell Theory with Drilling Degrees of Freedom”. International Journal for Numerical Methods in Engineering. 43 (1998). Wiley & Sons, Ltd.

[10] Etse, G. “Formulaciones Constitutivas No Locales para Simulaciones Computacionales de Procesos de Falla de Estructuras”. Anales de la Academia Nacional de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Buenos Aires. 1998.