

INTEGRACIÓN SEMI-ANALITICA DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ DE UN ELEMENTO FINITO PLANO DE OCHO NODOS USANDO COMPUTACIÓN SIMBÓLICA

Iris J. Lozada(\$), Juan C. Osorio(\$), Vaughan D. Griffiths(&), Miguel E. Cerrolaza (#)

(\$)Universidad Centroccidental Lisandro Alvarado, Decanato de Ingeniería Civil,
3001 Barquisimeto, Venezuela (irislozada121@hotmail.com,
Juan_carlosOsorio@hotmail.com).

(&)Colorado School of Mines, Golden, CO 80401, USA (d.v.griffiths@mines.edud.)

(#)Universidad Central de Venezuela, Facultad de Ingeniería,
Caracas, Venezuela (mcerrola@reacciun.ve)

Key words: Explicit integration, symbolic manipulation, finite elements, stiffness matrices

Abstract. *The explicit (semi-analytical) integration of an 8-noded plane-finite-element stiffness matrix is presented in this work. The element is superparametric having straight sides. Before to carry out the integration, the integral expressions are grouped into several groups, thus avoiding duplication of calculations. Symbolic manipulation and integration is used to obtain the basic formulae to evaluate the stiffness matrix. Then, the resulting expressions are manipulated, optimized and simplified in order to reduce the computation time. Maple symbolic-manipulation software was used to generate the closed expressions and to write down the corresponding Fortran code. Comparisons between analytical integration and numerical integration were made. Regarding the CPU time, it was shown that the semi-analytical integration required less CPU time than numerical integration to obtain stiffness matrices. Regarding the accuracy, several tests were conducted on extremely distorted finite elements. Results shown that the analytical expressions behave very well even in these cases.*

INTRODUCCIÓN

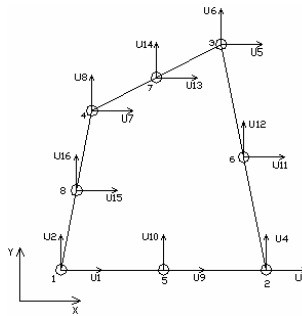
En el ejercicio de la ingeniería, el análisis matricial de medios continuos tiene hoy una aplicación mas generalizada como consecuencia del desarrollo computacional, optimizando así los métodos y técnicas utilizadas. Una alternativa que ha tenido un escaso desarrollo computacional, es la solución explícita o simbólica de los coeficientes de la matriz de rigidez por medio del método de los elementos finitos.

En este trabajo se presenta una generalización de los resultados obtenidos por Griffiths [4], en la integración simbólica del elemento finito cuadrilátero de cuatro nodos a ocho nodos, en problemas de elasticidad plana. La técnica desarrollada reporta una mejora sustancial de los tiempos de CPU, en comparación con la obtenida al usar el método de integración numérica, Gauss con dos puntos.

FORMULACIÓN

En el proceso de implementación se considera la siguiente configuración de nodos, numerados en sentido anti-horario y con dos grados de libertad por nodo, figura 1.

Figura 1: Numeración de nodos y grados de libertad.



la relación esfuerzo-deformación es dada por:

$$\sigma = \mathbf{D} \varepsilon \quad (1)$$

donde

$$\sigma = [\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z]^t \quad (2)$$

$$\varepsilon = [\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z]^t \quad (3)$$

la matriz deformación-desplazamiento es

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} E_1 & E_2 & \mathbf{0} \\ E_2 & E_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & G \end{bmatrix} \quad (4)$$

en esta E y ν denotan el modulo de Young y el coeficiente de Poisson respectivamente y el modulo de corte esta dado por:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (5)$$

para esfuerzo plano,

$$E_1 = \frac{E}{1-\nu^2}, \quad E_2 = \nu E_1 \quad (6)$$

y en deformación plana:

$$E_1 = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad E_2 = \frac{\nu E_1}{(1-\nu)} \quad (7)$$

Mediante una transformación de coordenadas, el elemento real en el plano XY , es enviado en un cuadrilátero con lados paralelos a los ejes coordenados de vértices en los puntos $(-1,-1)$, $(-1,1)$, $(1,-1)$, $(1,1)$ en donde muchos resultados resultan más prácticos de trabajar.

Para interpolar el campo de desplazamiento, la geometría y la deformación en cada nodo se utilizan las funciones de forma:

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{-1}{4}(1-\eta)(1-\varepsilon)(1+\varepsilon+\eta) & N_2 &= \frac{-1}{4}(1-\eta)(1+\varepsilon)(1-\varepsilon+\eta) \\ N_3 &= \frac{-1}{4}(1+\eta)(1+\varepsilon)(1-\varepsilon-\eta) & N_4 &= \frac{-1}{4}(1+\eta)(1-\varepsilon)(1+\varepsilon-\eta) \\ N_5 &= \frac{1}{2}(1-\eta)(1-\varepsilon^2) & N_6 &= \frac{1}{2}(1-\eta^2)(1+\varepsilon) \\ N_7 &= \frac{1}{2}(1+\eta)(1-\varepsilon^2) & N_8 &= \frac{1}{2}(1-\eta^2)(1-\varepsilon) \end{aligned} \quad (8)$$

La transformación de coordenadas que relaciona el plano XY con el plano $\varepsilon\eta$ está dada por:

$$x = \sum_{i=1}^8 N_i(\varepsilon, \eta) x_i \quad (9)$$

$$y = \sum_{i=1}^8 N_i(\varepsilon, \eta) y_i \quad (10)$$

Los elementos de la matriz de rigidez de un elemento cualquiera, se obtiene al calcular la integral:

$$K_{ij} = \int_A B_i^T D B_j dx dy \quad (11)$$

$$B_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (12)$$

mediante el cambio de variable la integral anterior es equivalente a

$$K_{ij} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 B_i^t(\epsilon, \eta) DB(\epsilon, \eta) |J| d\epsilon d\eta \quad (13)$$

donde, el escalar $|J|$ es el determinante del Jacobiano

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \epsilon} & \frac{\partial y}{\partial \epsilon} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (14)$$

utilizando la notación: $|J| = H$, $T_i = \frac{\partial N_i}{\partial x}$ y $S_i = \frac{\partial N_i}{\partial y}$ al desarrollar el integrando, se obtiene

$$B_i^t DB_j H = \begin{bmatrix} E_1 T_i T_j + G S_i S_j & E_2 T_i S_j + S_i T_j G \\ E_2 S_i T_j + G T_i S_j & E_1 S_i S_j + G T_i T_j \end{bmatrix} \frac{1}{H} \quad (15)$$

Por lo tanto, los coeficientes de cada bloque de la matriz de rigidez del elemento en estudio en el plano Gaussiano están dados por

$$\begin{bmatrix} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{1}{H} (E_1 T_i T_j + G S_i S_j) d\epsilon d\eta & \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{1}{H} (E_2 T_i S_j + G S_i T_j) d\epsilon d\eta \\ \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{1}{H} (E_2 S_i T_j + G T_i S_j) d\epsilon d\eta & \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{1}{H} (E_1 S_i S_j + G T_i T_j) d\epsilon d\eta \end{bmatrix} \quad (16)$$

INTEGRACIÓN SIMBÓLICA DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ

La matriz de rigidez del elemento es de orden 16×16 y por ser simétrica solo se calcularán 136 elementos. Estos elementos se clasifican en diez grupos (A, B, C, D, E, F, G, H, I, J) según el análisis de incidencia de los grados de libertad de cada nodo con todos los grados de libertad (GDL), del elemento como se muestra en la tabla 1.

Tabla 1. Clasificación de los términos de la matriz de rigidez del elemento de ocho nodos.

GRUPO	TÉRMINOS	DESCRIPCIÓN
A	$K_{11}, K_{22}, K_{33}, K_{44}, K_{55}, K_{66}, K_{77}, K_{88}, K_{99}, K_{1010}, K_{1111}, K_{1212}, K_{1313}, K_{1414}, K_{1515}, K_{1616}$	GDL paralelos en el mismo nodo.
B	$K_{12}, K_{34}, K_{56}, K_{78}, K_{910}, K_{1112}, K_{1314}, K_{1516}$	GDL ortogonales en el mismo nodo
C	$K_{13}, K_{35}, K_{57}, K_{17}, K_{911}, K_{1113}, K_{1315}, K_{915}, K_{24}, K_{46}, K_{68}, K_{28}, K_{1012}, K_{1214}, K_{1416}, K_{1016}$	GDL paralelos de nodos separados por un nodo.
D	$K_{23}, K_{36}, K_{67}, K_{27}, K_{1011}, K_{1114}, K_{1415}, K_{1015}, K_{45}, K_{58}, K_{18}, K_{14}, K_{1213}, K_{1316}, K_{916}, K_{912}$	GDL ortogonales de nodos separados por un nodo.
E	$K_{15}, K_{913}, K_{37}, K_{1115}, K_{26}, K_{48}, K_{1014}, K_{1216}$	GDL paralelos en nodos opuestos.
F	$K_{16}, K_{914}, K_{38}, K_{1116}, K_{25}, K_{1013}, K_{47}, K_{1215}$	GDL perpendiculares en nodos opuestos
G	$K_{19}, K_{39}, K_{311}, K_{511}, K_{513}, K_{713}, K_{715}, K_{115}, K_{210}, K_{410}, K_{412}, K_{612}, K_{614}, K_{814}, K_{816}, K_{216}$	GDL paralelos de nodos adyacentes
H	$K_{110}, K_{310}, K_{312}, K_{512}, K_{514}, K_{714}, K_{716}, K_{116}, K_{29}, K_{49}, K_{411}, K_{611}, K_{613}, K_{813}, K_{815}, K_{215}$	GDL perpendiculares de nodos adyacentes
I	$K_{111}, K_{711}, K_{79}, K_{59}, K_{515}, K_{315}, K_{313}, K_{113}, K_{212}, K_{812}, K_{810}, K_{610}, K_{616}, K_{416}, K_{414}, K_{214}$	GDL paralelos de nodos separados por dos nodos.
J	$K_{211}, K_{811}, K_{89}, K_{69}, K_{615}, K_{415}, K_{413}, K_{213}, K_{112}, K_{712}, K_{710}, K_{510}, K_{516}, K_{316}, K_{314}, K_{114}$	GDL paralelos de nodos separados por dos nodos.

Trabajando simbólicamente las integrales dadas en (16), utilizando Gauss- Legendre se obtiene que todos los términos de la matriz son de la forma

$$K_{ij} = 9 \left[\frac{A_1(E^*s_1 + Gs_2) + f_1(E^*s_3 + Gs_4)}{A_1^2 - 3f_1^2} + \frac{A_1(E^*t_1 + Gt_2) + f_2(E^*t_3 + Gt_4)}{A_1^2 - 3f_2^2} \right] \quad (17)$$

donde, $E^*=E_1$ en los grupos A, C, E, G e I, y $E^*=E_2$ para los grupos B, D, F, H y J. Mientras que las funciones A_1, f_1 y f_2 están dadas por:

$$A_1 := 1.125(y_2 - y_4)(x_1 - x_3) + 1.125(y_3 - y_1)(x_2 - x_4) \quad (18)$$

$$\begin{aligned} f_1 := & -1.125(y_2 - y_4)(x_1 + x_3) - .125(x_2 - x_4)(y_3 + y_1) + .25y_4x_4 - .25x_2y_2 + .5y_4x_2 \\ & - .5y_2x_4 + .625(y_1 - y_4)(x_1 + x_2) + .625(y_3 - y_4)(x_2 + x_3) \\ & + .625(y_2 - y_3)(x_4 + x_3) + .625(y_2 - y_1)(x_1 + x_4) + .125(y_2 - y_3)(x_1 + x_2) \\ & + .125(y_2 - y_1)(x_2 + x_3) + .125(y_1 - y_4)(x_4 + x_3) + .125(y_3 - y_4)(x_1 + x_4) \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} f_2 := & -1.125(y_2 + y_4)(x_1 - x_3) + 1.125(x_4 + x_2)(y_3 - y_1) + .25y_3x_3 - .25x_1y_1 + .5y_3x_1 \\ & - .5y_1x_3 + .625(y_2 - y_3)(x_1 + x_2) - .625(y_2 - y_1)(x_2 + x_3) \\ & + .625(y_1 - y_4)(x_4 + x_3) - .625(y_3 - y_4)(x_1 + x_4) + .125(y_1 - y_4)(x_1 + x_2) \\ & - .125(y_3 - y_4)(x_2 + x_3) + .125(y_2 - y_3)(x_4 + x_3) - .125(y_2 - y_1)(x_1 + x_4) \end{aligned} \quad (20)$$

Las funciones $s_1, s_2, s_3, s_4, t_1, t_2, t_3$ y t_4 dependen de las coordenadas nodales y varían de grupo en grupo. Los grupos G, H, I, J son generados apartir de un elemento del grupo llamada término padre, utilizando transformaciones de coordenadas adecuada.

En la tabla 2, se muestra las transformaciones de coordenadas a utilizar:

Tabla 2. Transformaciones de coordenadas

Nodos	Transformación 1	Transformación 2	Transformación 3
(x_1, y_1)	(x_4, y_4)	(y_3, x_3)	(y_1, x_1)
(x_2, y_2)	(x_1, y_1)	(y_2, x_2)	(y_2, x_2)
(x_3, y_3)	(x_2, y_2)	(y_1, x_1)	(y_3, x_3)
(x_4, y_4)	(x_3, y_3)	(y_4, x_4)	(y_4, x_4)

A continuación se muestra la forma como se generan los términos de la matriz de rigidez en cada grupo y la transformación de coordenadas utilizada.

Grupo A (términos padres: k_{11} y k_{99})

$$K_{11} \xrightarrow{T_1 \circ T_1} K_{77} \xrightarrow{T_1} K_{55} \xrightarrow{T_1} K_{33} \xrightarrow{T_1 \circ T_2} K_{66} \xrightarrow{T_1} K_{88} \xrightarrow{T_1} K_{22} \xrightarrow{T_1} K_{44}$$

$$K_{99} \xrightarrow{T_1 \circ T_1} K_{1515} \xrightarrow{T_1} K_{1313} \xrightarrow{T_1} K_{1111} \xrightarrow{T_1 \circ T_2} K_{1010} \xrightarrow{T_1} K_{1616} \xrightarrow{T_1} K_{1414} \xrightarrow{T_1} K_{1212}$$

Grupo B (términos padres: k_{12} y $k_{9,10}$)

$$K_{12} \xrightarrow{T_1} K_{87} \xrightarrow{T_1} K_{65} \xrightarrow{T_1} K_{43}$$

$$K_{910} \xrightarrow{T_1} K_{1112} \xrightarrow{T_1} K_{1314} \xrightarrow{T_1} K_{1516}$$

Grupo C (términos padres: k_{13} y k_{911})

$$K_{13} \xrightarrow{T_1 \circ T_1} K_{17} \xrightarrow{T_1} K_{57} \xrightarrow{T_1} K_{35} \xrightarrow{T_1 \circ T_2} K_{46} \xrightarrow{T_1} K_{68} \xrightarrow{T_1} K_{28} \xrightarrow{T_1} K_{24}$$

$$K_{911} \xrightarrow{T_1 \circ T_1} K_{915} \xrightarrow{T_1} K_{1315} \xrightarrow{T_1} K_{1113} \xrightarrow{T_1 \circ T_2} K_{1012} \xrightarrow{T_1} K_{1214} \xrightarrow{T_1} K_{1416} \xrightarrow{T_1} K_{1016}$$

Grupo D (términos padres: k_{14} y k_{912})

$$K_{14} \xrightarrow{T_1 \circ T_1} K_{27} \xrightarrow{T_1} K_{58} \xrightarrow{T_1} K_{36} \text{ y } K_{14} \xrightarrow{T_3} -K_{18} \xrightarrow{T_1} -K_{23} \xrightarrow{T_1} -K_{45} \xrightarrow{T_1} -K_{67}$$

$$K_{912} \xrightarrow{T_1 \circ T_1} K_{916} \xrightarrow{T_1} K_{1316} \xrightarrow{T_1} K_{1114} \xrightarrow{T_1 \circ T_2} K_{1011} \xrightarrow{T_1} K_{1015} \xrightarrow{T_1} K_{1415} \xrightarrow{T_1} K_{1312}$$

Grupo E (términos padres: k_{15} y k_{913})

$$K_{15} \xrightarrow{T_1} K_{37} \xrightarrow{T_1 \circ T_2} K_{26} \xrightarrow{T_1} K_{48}$$

$$K_{913} \xrightarrow{T_1} K_{1115} \xrightarrow{T_1 \circ T_2} K_{1216} \xrightarrow{T_1} K_{1014}$$

Grupo F (términos padres: k_{16} y k_{914})

$$K_{16} \xrightarrow{T_1} K_{38} \xrightarrow{T_1} K_{25} \xrightarrow{T_1} K_{47}$$

$$K_{914} \xrightarrow{T_1} K_{1116} \xrightarrow{T_1} K_{1013} \xrightarrow{T_1} K_{1215}$$

Grupo G (término padres: k_{715})

$$\begin{aligned} &K_{715} \xrightarrow{T_1 \circ T_1} K_{513} \xrightarrow{T_1} K_{311} \xrightarrow{T_1} K_{19} \xrightarrow{T_1 \circ T_2} K_{814} \xrightarrow{T_1} K_{216} \xrightarrow{T_1} K_{410} \xrightarrow{T_1} K_{612} \\ &K_{715} \xrightarrow{T_1 \circ T_3 \circ T_2} -K_{713} \xrightarrow{T_1} -K_{115} \xrightarrow{T_1} -K_{39} \xrightarrow{T_1} -K_{511} \xrightarrow{T_1 \circ T_2} -K_{816} \xrightarrow{T_1} -K_{614} \xrightarrow{T_1} \\ &-K_{412} \xrightarrow{T_1} -K_{210} \end{aligned}$$

Grupo H (término padres: k_{714})

$$\begin{aligned} &K_{714} \xrightarrow{T_1 \circ T_1} K_{512} \xrightarrow{T_1} K_{310} \xrightarrow{T_1} K_{116} \xrightarrow{T_1 \circ T_3 \circ T_2} K_{716} \xrightarrow{T_1} K_{110} \xrightarrow{T_1} K_{312} \xrightarrow{T_1} K_{514} \\ &K_{411} \xrightarrow{T_1} K_{613} \xrightarrow{T_1} K_{815} \xrightarrow{T_1} K_{29} \xrightarrow{T_1} K_{49} \xrightarrow{T_1 \circ T_3 \circ T_2} K_{215} \xrightarrow{T_1} K_{813} \xrightarrow{T_1} K_{611} \end{aligned}$$

Grupo I (término padres: k_{79})

$$\begin{aligned} &K_{79} \xrightarrow{T_1 \circ T_1} K_{515} \xrightarrow{T_1} K_{313} \xrightarrow{T_1} K_{111} \xrightarrow{T_1 \circ T_2} K_{812} \xrightarrow{T_1} K_{214} \xrightarrow{T_1} K_{416} \xrightarrow{T_1} K_{610} \\ &K_{79} \xrightarrow{T_1 \circ T_3 \circ T_2} -K_{711} \xrightarrow{T_1} -K_{113} \xrightarrow{T_1} -K_{315} \xrightarrow{T_1} -K_{59} \xrightarrow{T_1 \circ T_2} -K_{810} \xrightarrow{T_1} -K_{616} \xrightarrow{T_1} \\ &-K_{414} \xrightarrow{T_1} -K_{212} \end{aligned}$$

Grupo J (término padres: k_{710})

$$\begin{aligned} &K_{710} \xrightarrow{T_1 \circ T_1} K_{516} \xrightarrow{T_1} K_{314} \xrightarrow{T_1} K_1 \\ &12 \xrightarrow{T_1 \circ T_2} K_{811} \xrightarrow{T_1} K_{213} \xrightarrow{T_1} K_{415} \xrightarrow{T_1} K_{69} \xrightarrow{T_1 \circ T_2} \\ &K_{89} \xrightarrow{T_1} K_{615} \xrightarrow{T_1} K_{413} \xrightarrow{T_1} K_{211} \xrightarrow{T_1 \circ T_2} K_{712} \xrightarrow{T_1} K_{114} \xrightarrow{T_1} K_{316} \xrightarrow{T_1} K_{510} \end{aligned}$$

Las funciones $s_1, s_2, s_3, s_4, t_1, t_2, t_3$ y t_4 utilizada en cada grupo son las que generan los términos padres, por ejemplo las funciones que generan a k_{11} son :

$$\begin{aligned} s_1 &:= \frac{1}{8} (y_2 - y_4)^2 \\ s_2 &:= \frac{1}{8} (x_2 - x_4)^2 \\ s_3 &:= \frac{3}{16} (y_2 - y_4)^2 \\ s_4 &:= \frac{3}{16} (x_2 - x_4)^2 \\ t_1 &:= \left\{ \frac{1}{432} \right\} ((y_2 + y_1)^2 + (y_2 - y_4)^2 + (y_1 + y_4)^2 - 4y_3(y_2 + y_4 - 2y_3 + 2y_1)) \\ t_2 &:= \frac{1}{864} (4x_3 - 2x_1 - x_4 - x_2)^2 + \frac{1}{288} (x_2 - x_4)^2 \\ t_3 &:= \frac{1}{144} (4y_3 - 2y_1 - y_2 - y_4)(y_2 - y_4) \\ t_4 &:= \frac{1}{144} (4x_3 - 2x_1 - x_4 - x_2)(x_2 - x_4) \end{aligned} \tag{21}$$

Los tiempos de cómputo empleados por las subrutinas simbólica y numérica (Gauss-Legendre con dos puntos de integración) son dadas en la tabla 3.

Tabla 3. Tiempos de CPU

Nro. de Elementos	Numérica (Sec)	Simbólica (Sec)	Ahorro (%)
10000	4.7565E-01	3.2290-01	32
100000	4.0425	2.5405	37
1000000	39.6342	24.790	37

CONCLUSIONES

La generalización de la metodología desarrollada por Griffiths, aplicada a la integración semi-analítica de la matriz de rigidez del elemento finito de ocho nodos, permite una mayor generalidad y velocidad de cálculo en la integración de esta matriz. La aplicación de metodologías analíticas y semi-analítica, en la integración de las matrices de rigidez en el método de los elementos finitos con la ayuda de los sistemas de álgebra computacional (CAS) tales como DERIVE, REDUCE, MATHCAD, MATHEMATICA, MACSYMA, MAPLE, entre otros, prometen ser a futuro la solución a los problemas de precisión y de grandes consumos de tiempos de CPU presentado por las metodologías numéricas.

REFERENCIAS

- [1] J. P. Cardoso, Analytical formulation of element stiffness matrices, M.Sc. Thesis Dissertation, *School of Engineering, University of Manchester, UK* (1994)
- [2] G.Yagawa, G.W. Ye and S. Yoshimura, A numerical integration scheme for finite element method based on symbolic manipulation, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 29,1539-1549 (1990).
- [3] H.D. Rathod. Some analytical integration formulae for a four node isoparametric element, *Comput. & Struct.*, 30(5):1101-1109, 1988.
- [4] D.V.Griffiths, Stiffness matrix of the four-node quadrilateral element in closed form, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 37, 1027-1038, 1994
- [5] D.V. Griffiths and I. Smith, *Programming the finite element method*, Wiley, 2002.
- [6] L. Videla, N. Aparicio and M. Cerrolaza, Explicit Integration of the Stiffness Matrix of a four-noded-plane elasticity, *Comm. Num. Meh. Eng.*, 12, 731-743, 1996