

## MODELIZACIÓN DE PULSO DE PRESIÓN EN UN TUBO ELÁSTICO DE PAREDES DELGADAS

Manuel R. Alfonso<sup>a</sup>, Walter Legnani<sup>a,b,c</sup>

<sup>a</sup>Facultad de Ingeniería Universidad Favaloro, Av. Belgrano 1723, CABA, Argentina,  
*malfonso@favaloro.edu.ar.*

<sup>b</sup>Centro de Procesamiento de Señales e Imágenes, Facultad Regional Buenos Aires, UTN,  
AV. Medrano 951, CABA, Argentina, *walter@secyt.frba.utn.edu.ar.*

<sup>c</sup>Instituto de Cálculo, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, UBA.  
*Av. Int. Cantilo, S/N Pabellón II, 2do. Piso*

**Palabras Claves:** onda de presión, tubo elástico de paredes delgadas, diferencias finitas, propagación de onda

**Resumen.** El objetivo de este trabajo fue la construcción de un modelo matemático de propagación de ondas de presión en un tubo elástico de paredes delgadas.

El trabajo se basó en un modelo de propagación de ondas en una dimensión, que se completó con una relación estructural entre la presión y el diámetro del tubo, obtenida a partir de datos experimentales utilizando un modelo auto regresivo con datos exógenos (ARX).

El modelo obtenido fue resuelto usando un método explícito de diferencias finitas, y fue validado con pruebas estándar de escritorio

## 1 INTRODUCCION

La propagación de ondas de presión en tubos de paredes elásticas delgadas tiene gran relevancia en tecnología, y en particular si se piensa en ingeniería cardiovascular o fisiología su trascendencia se hace evidente dado que se puede emplear en el estudio de la respuesta de las arterias a pulsos de presión y en el análisis del comportamiento de éstas ante el cambio de los parámetros constitutivos de las mismas. Su capacidad para un conocimiento más acabado de la dinámica circulatoria y de la mecánica de la pared arterial es de fundamental importancia en el campo de la medicina cardiovascular preventiva.

El presente trabajo se compone de dos aportes, por un lado el modelado no lineal de propagación de ondas en tubos de paredes elásticas delgadas, y por otro lado la obtención de una relación constitutiva que sirva de clausura para el sistema de ecuaciones en derivadas parciales que relacione por ejemplo la presión de la onda de propagación con el diámetro del tubo.

Modelos como el presente se utilizan ampliamente en la literatura en variados estudios, cabe destacar en este sentido por ejemplo el trabajo de (Demiray, 2007) donde no solo se modela un tubo de paredes elásticas sino que para ello se emplean ecuaciones en derivadas parciales estocásticas, o el trabajo de (Malfliet and Nayirinde, 1998) donde se realiza una descripción pormenorizada de la propagación de ondas solitarias en tubos, cabe destacar que entre los trabajos más minuciosos en el modelado de propagación de ondas de presión en el sistema circulatorio se encuentra el trabajo de (Urquiza et al., 2006) en el cual se resuelven mediante el método de los elementos finitos las ecuaciones de fluido para la bifurcación de la carótida. En esta revisión de antecedentes no se puede pasar por alto el trabajo de (Antar and Demiray, 2000) en el cual plantean el estudio de la propagación de ondas no lineales en tubos a partir de una aproximación tipo capa límite.

El presente trabajo se halla motivado en una serie de notas de curso dictadas por el profesor Rubén R. Rosales “incompressible, inviscid fluid flow in a narrow cylindrical pipe with elastic thin walls” implementado en el Departamento de Matemática del Instituto Tecnológico de Massachusetts. En dicho curso el profesor Rosales plantea un modelo basado en ecuaciones diferenciales en derivadas parciales no lineales unidimensionales (en el espacio) para la propagación de ondas de fluido en un tubo de paredes flexibles delgadas. A dicho modelo se le ha añadido una relación tipo clausura que vincula a la presión con el diámetro del tubo de tal manera de plantear a las ecuaciones del modelo como un sistema cerrado en donde los componentes mecánicos de la pared se pueden incorporar a partir de mediciones experimentales.

La posibilidad de incorporar al modelo los parámetros constitutivos de la pared del tubo mediante datos medidos en laboratorio es en sí mismo un hecho valioso pues la contribución de estos a las relaciones funcionales para la ecuación de clausura han permitido analizar la respuesta del modelo en base a la constitución física del mismo planteada con detalle.

## 2 ECUACIONES DEL MODELO

Para poder plantear las ecuaciones del modelo primero se deben plantear las suposiciones iniciales y de allí y a partir de ecuaciones de conservación derivar el mismo. Se partirá de suponer que se dispone de un tubo de paredes flexibles lleno de fluido sometido a una presión  $p$ , para que el tubo no colapse y el flujo del fluido sea posible además supondremos que esta presión es mayor que la presión externa  $p_0$ , la cual de aquí en más la asumiremos constante e igual a la presión atmosférica. En este tubo tomaremos como coordenada relevante solamente

a la que acompaña a la longitud del mismo y se la denominará  $x$ .

Dado que el problema en estudio se halla constituido por dos componentes, por un lado el fluido y por otro el tubo, hay analizar las propiedades estructurales y dinámicas de cada uno de ellos.

Desde el punto de vista estructural se supondrá que el fluido es incompresible, o sea se puede asumir que su densidad ( $\rho$ ) es constante. Además dicho fluido es inviscido y la única fuerza de volumen que actúa sobre él es la presión, descartando la acción de la gravedad.

En referencia al tubo se asumirá que se halla constituido por un material homogéneo de tal manera que sus propiedades son iguales a todo lo largo del mismo. (En el caso de plantearse un modelo análogo al presente pero con un tubo de pared inhomogénea y aplicado a la dinámica circulatoria se puede recurrir al trabajo de (Kraenkel et al, 2007)). También se supondrá que sus paredes son delgadas, es decir el espesor de las mismas es mucho menor que su longitud, y que además son flexibles, y sumado a esto en estado de reposo el tubo posee igual diámetro en toda su extensión.

En lo que respecta a la dinámica del modelo se supondrá que las ondas que se propagan en el tubo poseen una longitud de onda larga, es decir la escala sobre la cual se propagan estas ondas es larga comparada con el diámetro del tubo. También se impondrá al modelo que la sección transversal del tubo será circular de tal manera que su área se hallará caracterizada por el radio  $a$  el cual verificará  $a = a(x,t)$ . Sumada a esta suposición las variables dinámicas del problema como ser la presión y la velocidad del fluido poseerán una dependencia funcional de la coordenada espacial y del tiempo de la forma  $p = p(x,t)$  y  $u = u(x,t)$ .

Para poder comprender mejor los alcances del modelo además se resaltaré el hecho de que la elasticidad del tubo se manifiesta de manera mucho más marcada en la dirección radial, o actuando sobre el perímetro que a lo largo de su longitud, o dicho en otras palabras el tubo se deformará mucho más en su sección transversal que en estiramiento longitudinal. Con esto la relación constitutiva de la pared del tubo poseerá una componente de tipo restitutiva elástica que tienda a devolver el valor de reposo de la sección del tubo ( $\pi a^2$ ) tras el paso de una onda de presión dada.

Se despreciara también todo efecto de inercia de las paredes del tubo, esto es consistente con el hecho de que las paredes del mismo se asumen delgadas.

Una vez establecidas estas suposiciones se puede comenzar con el planteo matemático de las ecuaciones del modelo, en tal caso para la conservación de masa del fluido se tendrá siguiendo a (Mazumdar, 2004)

$$(\rho S)_t + (\rho u S)_x = 0 \Leftrightarrow S_t + (u S)_x = 0, \quad (1)$$

donde la sección transversal del tubo es  $S$  ( $S = \pi a^2$ ),  $u = u(x,t)$  y  $\rho$  ( $\rho$  supuesto constante) son la velocidad y la densidad del fluido respectivamente, y de aquí en más los subíndices  $x$  y  $t$  se refieren las correspondientes derivadas parciales respecto del espacio y del tiempo.

Para la conservación del momento lineal, se deben considerar los aportes de la densidad de momento por unidad de longitud  $dx$ , que será igual a  $\rho u S$ , y del flujo de momento, que tendrá dos componentes, una de tipo advectivo (que será el momento transportado por el flujo) y su valor estará dado por  $\rho u^2 S$  y por el momento de flujo dado por la fuerza de presión  $p S$  a través de la sección transversal del tubo. Además se debe tener en cuenta la acción de fuentes de momento provenientes de las fuerzas por unidad de longitud en la dirección del flujo en el fluido accionadas por las paredes del tubo, esto se puede expresar de la siguiente manera

$$M_s = 2\pi a p \frac{a_x}{\sqrt{1+a_x^2}} \approx 2\pi a p a_x = p S_x, \quad (2)$$

siendo  $M_s$  la contribución al momento aportada por la variación de la sección del tubo.

Incorporando la aproximación de ondas largas que se puede expresar matemáticamente como  $1+a_x^2 \cong 1$ , la ecuación de conservación de momento entonces se puede escribir de la siguiente forma

$$(\rho u S)_t + (\rho u^2 S + p S)_x = p S_x \Leftrightarrow (u S)_t + (u^2 S)_x + \frac{S}{\rho} p_x = 0. \quad (3)$$

Combinando (1) con (2) y reescribiéndolas en forma de sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales resulta:

$$\left. \begin{aligned} 0 &= S_t + (u S)_x \\ 0 &= u_t + u u_x + \frac{1}{\rho} p_x \end{aligned} \right\}. \quad (4)$$

El sistema de ecuaciones (4) se propone como ecuaciones del modelo planteado en el presente trabajo, no es otra cosa sino la evolución temporal de la sección transversal del tubo  $S$  y de la velocidad del flujo. Para la determinación de la presión  $p$  que aparece como una incógnita en (4) es que se emplea una relación constitutiva de la forma  $p \sim a(x,t)$  de tal manera de poder resolver el sistema.

La forma de obtener la expresión para la presión en función del diámetro se presenta a continuación en donde se lo empleará para estudiar propagación de ondas de presión en grandes arterias.

Las grandes arterias constituyen un filtro hidráulico pasa bajos cuya función principal es amortiguar las oscilaciones del flujo sanguíneo a fin de nutrir con un régimen estacionario a los tejidos. Las propiedades mecánicas de la pared arterial son preponderantemente viscoelásticas, siendo la inercia de la pared, un factor generalmente despreciable en el análisis de la dinámica circulatoria (Armentano et al., 2004), en este sentido es por ello que se busco un modelo de tubo de paredes delgadas de tal forma de poder estudiar grandes arterias.

La elasticidad arterial total es ejercida por componentes pasivos (fibras de elastina y colágeno) y componentes activos (células de músculo liso vascular) (Thiriet, 2008).

La función de las fibras de elastina y colágeno es mantener una tensión estable contra la presión transmural presente en el vaso (Burton, 1972).

La contribución individual de las fibras de elastina y de colágeno a la elasticidad total ha sido completamente caracterizada en animales conscientes normales y en diversas arteriopatías (Armentano et al, 1991), (Cabrera Fischer et al, 1991), (Cabrera Fischer et al, 1993).

Para ir aproximándose al desarrollo de la ecuación constitutiva, un primer paso es la determinación de la relación tensión ( $\tau$ ) y deformación ( $\epsilon$ ) elástica pura.

La tensión total generada por la pared para oponerse al estiramiento se atribuye comúnmente a los efectos combinados de la elasticidad, la viscosidad y la inercia de la pared arterial. Bauer (Bauer et al, 1979), (Bauer et al, 1984) ha desarrollado un procedimiento que subdivide la tensión parietal en tres términos, el primero que depende de  $\epsilon$ , el segundo

dependiendo de la primera derivada de  $\varepsilon$  (velocidad), y el tercero de la segunda derivada de  $\varepsilon$  (aceleración)

$$\sigma = E \cdot \varepsilon + \eta \cdot \frac{d\varepsilon}{dt} + M \cdot \frac{d^2\varepsilon}{dt^2} = \sigma_{\text{elástico}} + \sigma_{\text{viscoso}} + \sigma_{\text{inercial}}, \quad (5)$$

donde  $E$ ,  $\eta$  y  $M$  son los módulos elástico, viscoso e inercial respectivamente.

El primer término del lado derecho de (5) es la tensión elástica, el segundo la viscosa y el tercero la inercial.

Se ha formulado la ecuación constitutiva (5) de la pared del tubo (arterial) para el caso de animales conscientes y crónicamente instrumentados para la caracterización total de la mecánica parietal utilizando el modelo descrito en (5).

Los módulos mecánicos de la pared se hallaron con el método de filtrado adaptivo en el cual la entrada a un filtro digital ARX (Auto Regresive with Exogenous Data), más comúnmente conocido como IIR (Infinite Impulse Response), es la señal de presión arterial instantánea, y la salida es el diámetro arterial instantáneo. A partir de estas magnitudes se obtienen las equivalentes a tensión–deformación. El filtro intentará adaptar los coeficientes de sus polinomios del numerador y denominador (que determinarán la ubicación de los polos y ceros del sistema arterial). La ecuación a adaptar será dada por

$$P(t) = E \cdot D(t) + \eta \cdot \frac{dD(t)}{dt} + M \cdot \frac{d^2D(t)}{dt^2}. \quad (6)$$

El filtro va adaptando sus coeficientes muestra a muestra, minimizando la función de error hasta llegar a un mínimo de variación. La transferencia del filtro digital  $H(z)$  será

$$H(z) = \frac{D(z)}{P(z)} = \frac{b_0 + b_1 \cdot z^{-1} + b_2 \cdot z^{-2} + b_3 \cdot z^{-3}}{a_0 + a_1 \cdot z^{-1} + a_2 \cdot z^{-2} + a_3 \cdot z^{-3}}. \quad (7)$$

Una vez llegado a un mínimo, se hace uso de la transformada bilineal que relaciona la Transformada de Laplace con la Transformada  $Z$  mediante la siguiente expresión

$$s = \frac{2}{T_s} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}, \quad (8)$$

siendo  $T_s$  el período de muestreo al cual se adquirieron las señales presión–diámetro. Se obtiene de esta forma un sistema en el dominio de Laplace como el que se indica a continuación

$$H(s) = \frac{D(s)}{P(s)} = \frac{s^3 + n_2 \cdot s^2 + n_1 \cdot s + n_0}{s^3 + m_2 \cdot s^2 + m_1 \cdot s + m_0}, \quad (9)$$

donde los coeficientes  $n_i$  y  $m_i$  de la transferencia  $H(s)$  estarán relacionados con los coeficientes  $a_i$  y  $b_i$  del filtro digital adaptivo  $H(z)$  de la expresión (7).

Finalmente, se pueden hallar relaciones entre los coeficientes  $n_i$ ,  $m_i$  y la ecuación diferencial (5) o (6), de los cuales se obtienen los módulos parietales buscados: elasticidad  $E$ , viscosidad

$\eta$  e inercia  $M$ . El orden del modelo fue analizado y establecido mediante el criterio de Akaike (Akaike et al, 1969).

Como en el presente trabajo se supuso un tubo de paredes delgadas la relación constitutiva del mismo que vincula la presión con el diámetro resulto entonces

$$P(t) = E \cdot D(t) + \eta \cdot \frac{dD(t)}{dt}. \quad (10)$$

De tal manera que el modelo completo se puede expresar en la forma siguiente

$$\left. \begin{aligned} 0 &= S_t + (uS)_x \\ 0 &= u_t + uu_x + \frac{1}{\rho} P_x \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

$$P(t) = E \cdot D(t) + \eta \cdot \frac{dD(t)}{dt}$$

El modelo descrito en (11) y con las suposiciones previas fue implementado computacionalmente mediante un esquema en diferencias finitas centradas elemental para la integración de las ecuaciones en derivadas parciales y que calculó la presión en cada instante de tiempo mediante la expresión (10) con los valores de  $E$  y  $\eta$  obtenidos a partir del ajuste mediante ARX de datos obtenidos de arterias de ovejas criopreservadas fueron obtenidos por el grupo de bioingeniería de la facultad de Ingeniería de la Universidad Favaloro.

El término no lineal de las ecuaciones en derivadas parciales se trato según se puede ver en (Stein, 2004).

### 3 RESULTADOS

#### 3.1 Relación constitutiva de la pared del tubo

En base a lo descrito en el apartado anterior se hallaron los siguientes valores para el coeficiente de elasticidad y de viscosidad parietal:

Tabla I

Elasticidad parietal ( $E$ )	Viscosidad parietal ( $\eta$ )
4.95 mmHg/mm	0.84 mmHg s/mm.

Ajuste de parámetros modelo ARX de la pared del tubo

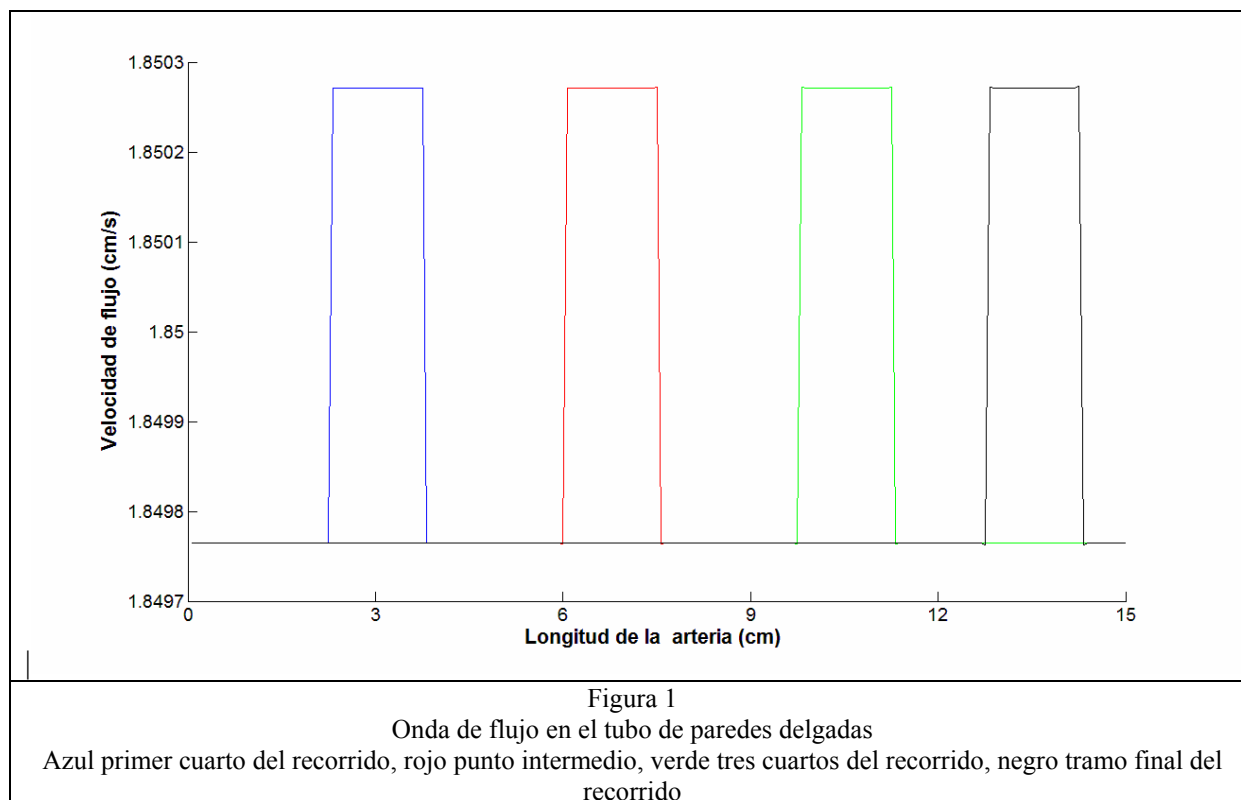
Se emplearon varias arterias carótidas de ovejas de 15 cm de longitud.

El valor del paso temporal se fijo de tal forma de preservar la condición de Courant-Friedrichs-Lewy, mientras que el tamaño de malla espacial fue fijo y uniforme para todo el dominio de integración computacional.

El modelo se inicializo con los valores medios medidos experimentalmente de presión y diámetro.

### 3.2 Resultados de la integración de las ecuaciones del modelo

Para las condiciones indicadas en el párrafo anterior se integraron las ecuaciones del modelo (11) arrojando para la velocidad de flujo los resultados que se muestran en la Figura 1.

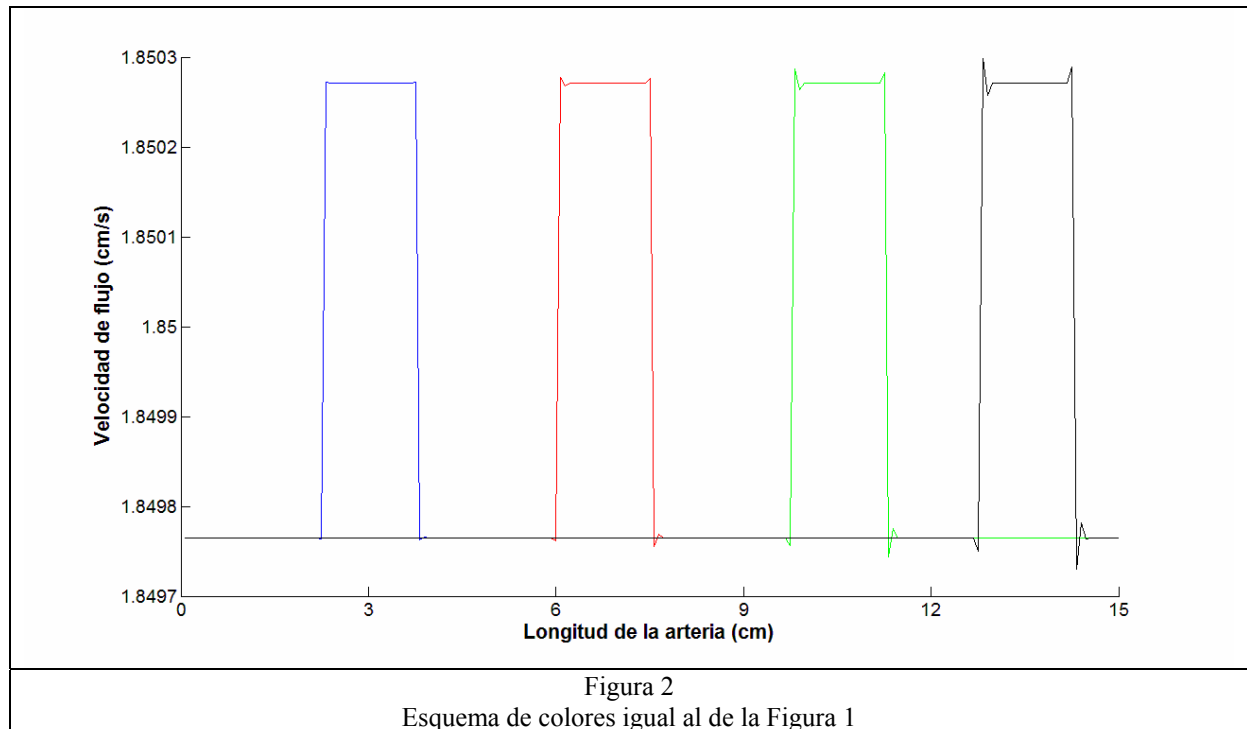


Como puede apreciarse en la Figura 1 la onda de flujo no se distorsiona a lo largo de todo el recorrido por el tubo/arteria. Dicha onda no sufre atenuaciones ni modificaciones significativas. El efecto mecánico de su paso por el tubo de paredes elásticas delgadas se limita a interactuar con la estructura de la pared para que esta absorba dicha perturbación mediante dos efectos, por un lado mediante disipación de energía viscosa, y por otro por medio del amortiguamiento elástico.

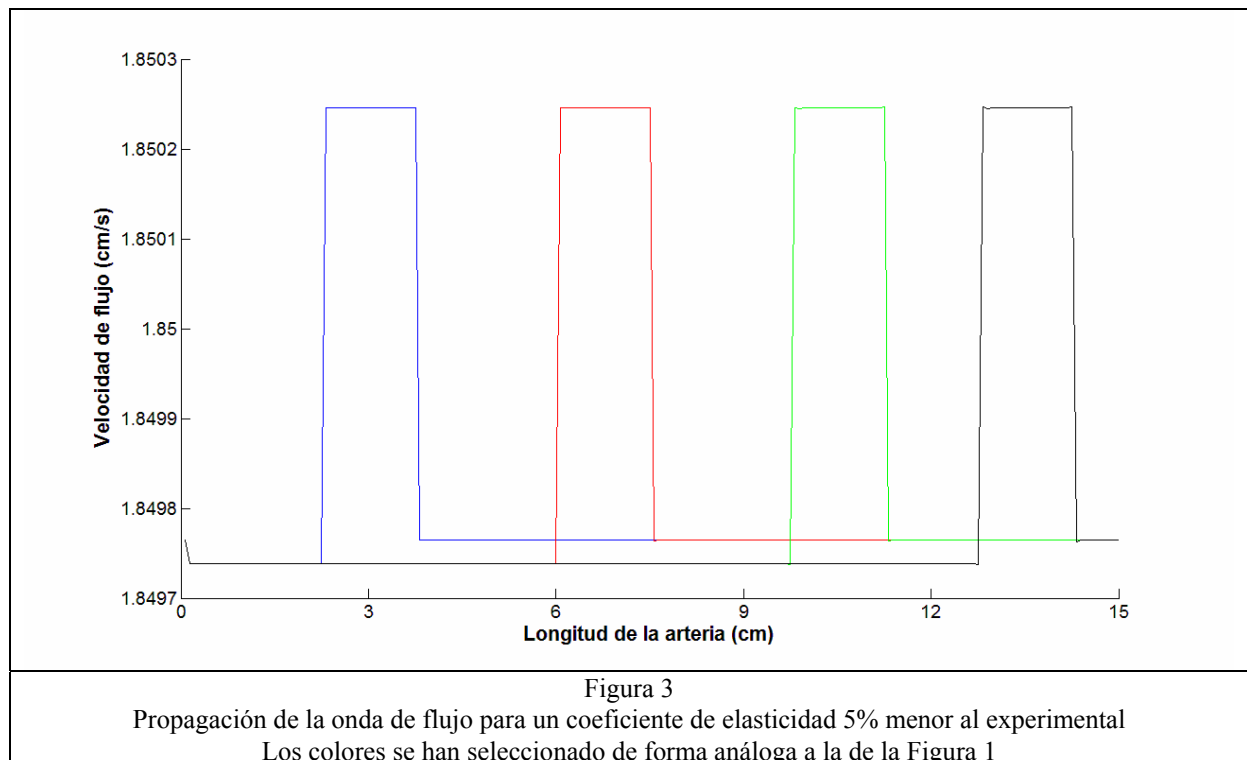
En la Figura 2 se muestra el resultado al haber incrementado en veinte veces el valor de la constante de viscosidad de la pared del tubo/arteria. En este caso se puede apreciar claramente que se comienza a evidenciar una perturbación en la onda de propagación del flujo.

Esto se debe a que dicha pared posee un mayor nivel de interacción con el flujo y derivada de esta interacción se hacen presentes efectos relacionados con la actividad de la misma sobre la velocidad de propagación de la onda de fluido.

En cambio si el coeficiente de viscosidad de la pared del tubo se reduce esto no tiene efectos sobre la propagación de la onda de flujo. Esto se debe a que al disminuir dicho coeficiente se reduce el nivel de interacción con la pared del tubo.



Si en cambio se modifica el coeficiente de elasticidad de la pared del tubo en un 5 % por arriba o por debajo de los valores experimentales, entonces se manifiestan cambios en la propagación de la onda de flujo según se puede apreciar en las Figura 3 y Figura 4.





En la Figura 3 se ve claramente que al tratarse de un tubo con paredes menos flexibles el flujo que circula tras el paso de la onda es menor, y esto se debe a que la fuerza de restitución elástica proporcionada por las paredes del tubo es menor que para el caso indicado en la Figura 1.

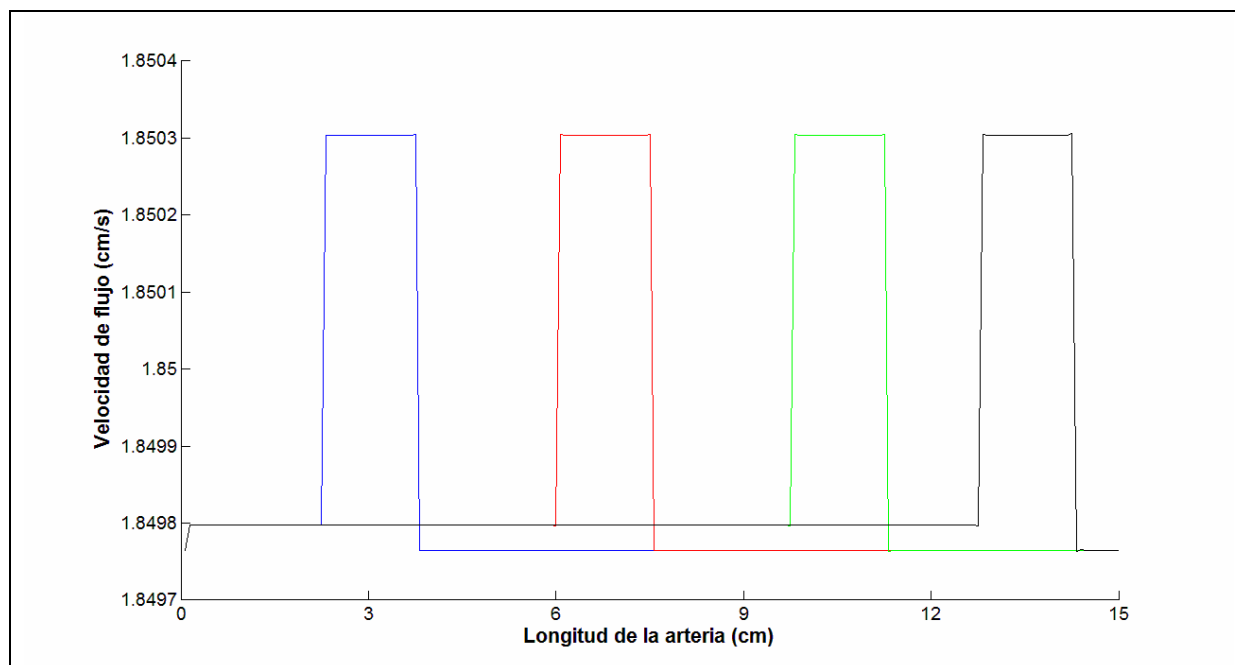


Figura 4

Propagación de la onda de flujo para un coeficiente de elasticidad 5% mayor al experimental  
Los colores se han seleccionado de forma análoga a la de la Figura 1

En el caso de la Figura 4 al emplearse un coeficiente de restitución elástica mayor, la restitución al estado previo al paso de la onda de presión es mayor que en el caso de la Figura 3 y por lo tanto la velocidad de la onda de flujo es ligeramente mayor.

#### 4 CONCLUSIONES

Del resultado de las integraciones numéricas del modelo se concluye que para el caso planteado aquí, es decir un tubo largo (típicamente 15 cm) de paredes delgadas (3 mm) de sección circular se pudo plantear una relación constitutiva de las paredes del mismo en base a dos componentes, una elástica pura y otra de naturaleza viscosa.

En este sentido el modelo brindó resultados satisfactorios desde el punto de vista cualitativo que deberán ser convalidados con mediciones experimentales ulteriores.

Con relación a los parámetros que reflejan la constitución de las paredes del tubo se comprobó que el modelo es mucho más sensible a la componente de naturaleza elástica que a la de origen viscosa. Esto es consistente con los resultados conocidos en la literatura, por lo cual y en esta etapa del desarrollo del presente modelo se pudo constatar que los objetivos fueron cubiertos satisfactoriamente.

## REFERENCIAS

- Antar, N. and H. Demiray. The boundary layer approximation and nonlinear waves in elastic tubes. *International Journal of Engineering Science*, 38, 1441-1457, 2000.
- Armentano, R. L., J. G. Barra, S. Graf, F. Pessana, D. Craiem, Ingeniería Cardiovascular, modelos y aplicaciones. *Modelización aplicada a la Ingeniería*, UTN-FRBA, 1-27, 2004.
- Armentano, R. L., J. Levenson, J. G. Barra, E. I. Cabrera Fischer, G. J. Breitbart, R. H. Pichel, A. Simon Assessment of elastin and collagen contribution to aortic elasticity in conscious dogs. *Am J Physiol* 260, 1870-1877, 1991 .
- Akaike, H. Fitting autoregressive models for prediction. *Ann Inst Stat Math*, 21, 243-247, 1969.
- Bauer, R. D., R. Busse, A. Schabert, Y. Summa, E. Wetterer. Separate determination of the pulsatile elastic and viscous forces developed in the arterial wall in vivo. *Pflügers Arch*, 380 221-226, 1979.
- Bauer, R. D. Rheological approaches of arteries. *Biorheology Suppl* I, 159-167, 1984.
- Burton, A. C.. Physiology and Biophysics of the Circulation. Chicago: Year Book, pp 63-75, 1972.
- Cabrera Fischer, E. I., R. L. Armentano, J. Levenson, J. G. Barra, M. C. Morales, G. J. Breitbart, R. H. Pichel A. Simon. Paradoxically decreased aortic wall stiffness in response to vitamin D<sub>3</sub>-induced calcinosis: a biphasic analysis of segmental elastic properties in conscious dogs. *Circ Res* 68, 1549-1559, 1991.
- Cabrera Fischer, E., J. Levenson , J. G. Barra, R. L. Armentano, G. J. Breitbart, R. H. Pichel, A. Simon. Preventive effect of chronic converting enzyme inhibition on aortic constriction and stiffening induced by renovascular hypertension in conscious dogs. *Cardiovasc Res*, 27, 1039-1044, 1993.
- Demiray, H., Waves In Fluid-Filled Elastic Tubes With A Stenosis: Variable Coefficients Kdv Equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics* 202, 328 – 338, 2007.
- Kraenkel, R.A. S. Noubissieb, P. Woafoc, A mathematical model for wave propagation in elastic tubes with inhomogeneities: Application to blood waves propagation. *Physica D* 236 131–140, 2007.
- Malfliet, W. and I. Ndayirinde. Dressed solitary waves in an elastic tube, *Physica D* 123, 92-98, 1998.
- Mazumdar, J. N.. Biofluid Mechanics. World Scientific, 1998 reprinted 2004.
- Thiriet, M. Biology and Mechanics of Blood Flows. Springer, 2008
- Stein, E., R. de Borst, T. R. J. Hughes. Enciclopedia of Computational Mechanics. Wiley, 2004
- Urquiza. S. A., P.J. Blanco, M.J. Vénere, R.A. Feijoo. Multidimensional modelling for the carotid artery blood flow. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg*, 195, 4002–4017, 2006.