

**ESTADOS PLANOS DE TENSIONES EN DOMINIOS RECTANGULARES CON RIGIDIZADORES PARCIALES UTILIZANDO SERIES DE POTENCIAS**  
**C. P. Filipich<sup>1,2,3</sup>, E. A. Bambill<sup>1,2</sup>**

<sup>(1)</sup> Departamento de Ingeniería Civil, Facultad Regional Bahía Blanca, Universidad Tecnológica Nacional

11 de Abril 461 B8000LMI Bahía Blanca, Argentina. TE: 54-(0291)-4555220–Interno 132  
e-mail: [ebambill@frbb.utn.edu.ar](mailto:ebambill@frbb.utn.edu.ar), web page: <http://www.frbb.utn.edu.ar/>

<sup>(2)</sup> Departamento de Ingeniería, Area Construcciones, Universidad Nacional del Sur  
Avda Alem 1253, B8000CPB Bahía Blanca, Argentina. TE: 54-(0291)-4595156–Interno 3200

<sup>(3)</sup> Grupo de Análisis de Sistemas Mecánicos  
Facultad Regional Bahía Blanca, Universidad Tecnológica Nacional

## RESUMEN

Los autores han utilizado exitosamente en trabajos previos, [1,2,3,4,5,6], la metodología del uso de series de potencias en una dimensión. En el presente estudio, su uso se extiende a través de un método variacional directo, con la utilización de series de potencias en 2D.

Se desarrollan las componentes del vector desplazamiento en el plano. Luego, las incógnitas del problema son los coeficientes que combinan linealmente los productos de potencias de  $(x,y)$ .

Se expresa el funcional energético para el estado plano de tensiones en función de las derivadas de los corrimientos, y se adiciona al mismo, el aporte de la energía flexional en el plano y axil de los refuerzos internos parciales.

La estacionaridad del funcional ampliado, conduce a disponer de una solución analítica. Entonces, se tiene convergencia uniforme tanto para los desplazamientos y todas sus derivadas. Esto no sucedería si se utilizara una base trigonométrica, sumando la problemática de que en el presente caso, no se tienen condiciones de borde esenciales, sino que son todas naturales. La única precaución es que se debe restringir los tres grados de libertad de cuerpo rígido.

Se resuelven diversos casos, con y sin rigidizadores. Varios de ellos encuentran una aplicación directa en el campo de las ingenierías, lo que permitiría sugerir algunas recomendaciones; por ejemplo, en el tema de vigas pared, en la práctica del hormigón armado.

*Palabras claves: estado plano de tensiones; apoyos parciales intermedios; rigidizadores, vigas pared, series de potencias.*

## 1. INTRODUCCIÓN

Los autores han sistematizado el uso de las series de potencias en una dimensión, para abordar problemas diferenciales ordinarios lineales y no lineales, a coeficientes constantes y variables, homogéneos o no, con condiciones de borde (CB) y/o condiciones iniciales (CI). Los resultados han sido muy buenos. La clásica metodología fue automatizada y ordenada (inclusive para resolver problemas fuertemente no lineales o entramados estructurales planos, con un número arbitrario de barras. En estos casos, se debe resolver invariablemente un sistema que no puede exceder los límites de un  $6 \times 6$ .

El ordenamiento evita caer a la resolución de un sistema de ecuaciones en los coeficientes, y en cambio, por medio de la recurrencia y las CB y/o CI hallar dichos coeficientes.

Ahora bien, los autores están trabajando en problemas planos de inestabilidad del equilibrio (abolladura) donde todavía a los dominios planos rectangulares cargados se les agrega

refuerzos (o rigidizadores) parciales arbitrarios para incrementar la carga crítica. Es decir, como sabemos, si denominamos  $w = w(x, y)$  a la forma modal de abolladura, la misma debe satisfacer la siguiente ecuación diferencial a derivadas parciales:

$$D \left( w'''' + 2 \lambda^2 \bar{\bar{w}}'' + \lambda^4 \bar{\bar{\bar{w}}} \right) - t \left( \sigma_x w'' + 2 \tau_{xy} \bar{w}' + \sigma_y \bar{\bar{w}} \right) = 0$$

donde hemos introducido la nomenclatura

$$(\bullet)' \equiv \frac{\partial(\bullet)}{\partial x}; \text{ etc} \quad (\bar{\bullet}) \equiv \frac{\partial(\bullet)}{\partial y}; \text{ etc}$$

siendo  $t$  el espesor de la chapa; la relación de lados  $\lambda = a/b$ , donde  $a$  y  $b$  son los lados de la

chapa rectangular,  $D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$  es la denominada rigidez flexional de la placa (teoría clásica de Lagrange-Germain),  $E$  y  $\nu$  son respectivamente el módulo de elasticidad y el módulo de Poisson del material de la placa.

Fundamentalmente,  $\sigma_x = \sigma_x(x, y)$ ;  $\sigma_y = \sigma_y(x, y)$  y  $\tau_{xy} = \tau_{xy}(x, y)$  es el régimen tensional que proviene del estado plano de tensiones, del cual se desea hallar el límite de estabilidad, es decir, la magnitud crítica de las cargas en el plano que las producen.

Es así que será muy conveniente disponer de expresiones analíticas para  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  y  $\tau_{xy}$ .

En este trabajo entonces, para hallar este tensor plano de tensiones, proponemos series dobles de potencias enteras en los desplazamientos planos  $u$  y  $v$ , que introduciremos en el funcional energético, cuya estacionalidad –método variacional directo– conduce a la solución del estado tensional bajo estudio.

## 2. ENERGÍA TOTAL PARA UN ESTADO PLANO DE TENSIONES

Definimos como energía total  $W$ , (o funcional energético), a la energía  $U$  de deformación almacenada durante una deformación genérica, más la energía potencial y de posición  $A$  de las cargas aplicadas.

Entonces, sea un estado plano de tensión, (Figura 1), en un dominio de contorno  $\Gamma$ .

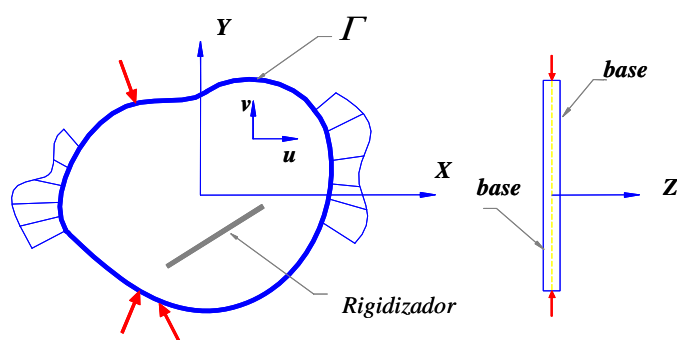


Figura 1. Estado Plano de Tensión

Aceptamos que las tensiones con subíndice  $z$  son nulas, es decir,  $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ . Esta situación es más cercana a la realidad, cuanto menor sea relativamente  $t$  frente a las dimensiones del dominio en el plano  $xy$ .

Sabemos (ver por ejemplo [7], [8]) que para este caso, aceptando un cuerpo homogéneo, isótropo y linealmente elástico, que la energía de deformación para la chapa es:

$$\frac{2(1-\nu)^2}{Et} U_I = \iint_{\Omega} \left\{ (\varepsilon_X + \varepsilon_Y)^2 + \frac{(1-\nu)^2}{2(1+\nu)} \gamma_{XY}^2 - 4(1-\nu^2) \varepsilon_X \varepsilon_Y - 4\nu(\varepsilon_X^2 + \varepsilon_Y^2) \right\} dx dy \quad (1.)$$

A su vez, la energía de deformación  $U_R$  aportada por el rigidizador (Figura 2)

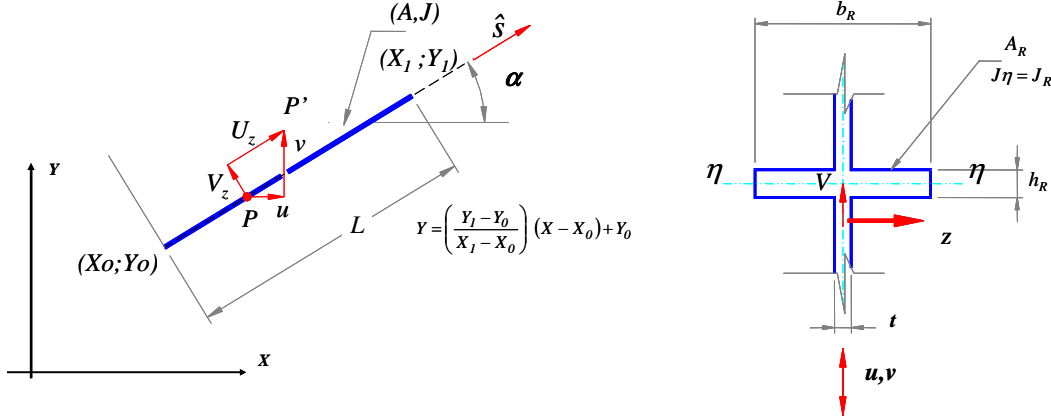


Figura 2 – Esquema del Rigidizador

vale

$$2U_R = EJ_R \int_0^L \left( \frac{\partial^2 v_R}{\partial s^2} \right)^2 dz + EA_R \int_0^L \left( \frac{\partial u_R}{\partial s} \right)^2 ds \quad (2.)$$

donde  $J_R$  y  $A_R$  son respectivamente el momento de inercia del rigidizador. Claro es que

$$\begin{pmatrix} u_R \\ v_R \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad (3.)$$

Recordemos que  $\frac{\partial(\bullet)}{\partial s} = \text{grad}(\bullet) \cdot \hat{s}$ , siendo el vector  $\text{grad}(\bullet) = [(\bullet)', (\bullet)']$  y  $\hat{s} = (\cos \alpha, \sin \alpha)$

y

$$\varepsilon_x = u' \quad ; \quad \varepsilon_y = v' \quad ; \quad \gamma_{xy} = \bar{u} + v' \quad (4.)$$

Introduciendo las expresiones (4) en (1), obtenemos  $U_I$  en función de las primeras derivadas de las componentes del vector plano de desplazamiento  $u$  y  $v$ , que serán las incógnitas básicas del problema. De igual forma, por las expresiones (3) reproducidas en (2), también  $U_R$  quedará expresada en función de las derivadas de  $u$  y  $v$ .

En cuanto a la expresión de  $A$  de la energía posicional, genéricamente escribimos

$$A = \int_{\Gamma} (p_x u + p_y v) ds \quad (5.)$$

donde la integral se extiende a la frontera del dominio, siendo  $p_x$  y  $p_y$  las componentes según  $x$  e  $y$  respectivamente de la carga aplicada sobre dicho contorno  $\Gamma$ .

Por lo expuesto, entonces

$$W = U_I + U_R + A \quad (6.)$$

Las soluciones equilibradas, como se sabe, provienen de imponer que

$$\delta W = 0 \quad (7.)$$

Si las propuestas para incógnitas básicas fueran aproximadas, la condición (7) conduce a un problema de Rayleigh-Ritz. En cambio, como veremos en el próximo ítem, al asumir que dichas incógnitas sean series de potencias de convergencia uniforme a priori, la solución generalizada dada por el método directo (7) conduce a la solución exacta del problema diferencial plano. Lógicamente, dado que es necesario desde el punto de vista práctico efectuar el truncado de la serie, se requiere establecer la precisión de los resultados. La precisión se fija

de modo arbitrario, en función del grado de exactitud pretendido y la capacidad computacional disponible.

### 3. SOLUCION EN SERIES DE POTENCIAS.

Definimos las componentes  $u$  y  $v$  del vector plano de desplazamientos como

$$u = u(x, y) = \sum_{i=0}^M \sum_{j=0}^N A_{ij} x^i y^j \quad (8.)$$

$$v = v(x, y) = \sum_{i=0}^M \sum_{j=0}^N B_{ij} x^i y^j \quad (9.)$$

Como sabemos, estas series así como todas sus derivadas sucesivas, son de convergencia uniforme.

Podemos calcular entonces, la energía  $A$  (5) y además el tensor de deformación, por medio de las expresiones (4). Luego, podemos determinar las energías  $U_I$  (1) y la  $U_R$  (2).

De esta manera, la condición fundamental (7) se transforma en

$$\delta W = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \left( \frac{\partial W}{\partial A_{ij}} \delta A_{ij} + \frac{\partial W}{\partial B_{ij}} \delta B_{ij} \right) = 0 \quad (10.)$$

Aceptando que cada  $\delta A_{ij}$  y cada  $\delta B_{ij}$  son variaciones independientes, llegamos a un sistema infinito (teóricamente) en  $A_{ij}$  y  $B_{ij}$ , que se genera anulando los factores correspondientes a dichas variaciones. Naturalmente, truncando a los efectos prácticos, resolveremos el sistema lineal de ecuaciones en los coeficientes  $A_{ij}$  y  $B_{ij}$ . Agreguemos que el sistema de ecuaciones es lineal, ya que el funcional (6) a extremar es cuadrático homogéneo.

De esta forma, conocemos por (8) y (9) las expresiones de  $u$  y  $v$  y de sus derivadas. Como dijimos, por (4), también deducimos el tensor de deformaciones, y por la Ley de Hooke, hallamos el campo plano de tensiones, que vale:

$$\sigma_X = \frac{E}{(1-\nu^2)} [\varepsilon_X + \nu \varepsilon_Y] \quad ; \quad \sigma_Y = \frac{E}{(1-\nu^2)} [\nu \varepsilon_X + \varepsilon_Y] \quad ; \quad (11.)$$

$$\tau_{XY} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{XY}$$

Distribución tensional, que mostraremos en los ejemplos siguientes.

### 4. EJEMPLOS ANALIZADOS

En la ingeniería estructural, las denominadas vigas de gran altura, también denominadas vigas pared, son elementos estructurales portantes de gran aplicación en la técnica de la construcción. El interrogante en estos casos es precisar el espesor a los fines de soportar la presión que fuera aplicada, y determinar donde se encuentran las máximas tensiones, por lo general resultan de vital interés durante el diseño de la estructura.

Los métodos de cálculo de las vigas de gran altura, requieren invariablemente la resolución del problema del estado elástico plano.

En este caso, planteamos el cálculo de una viga pared rectangular, para el estado de carga que se muestra en la Figura 3.

En el ejemplo analizado se han adoptado  $E=1$ ;  $a=1m$ ;  $b=1m$ . Para el espesor de la chapa  $e=0.01m$ .

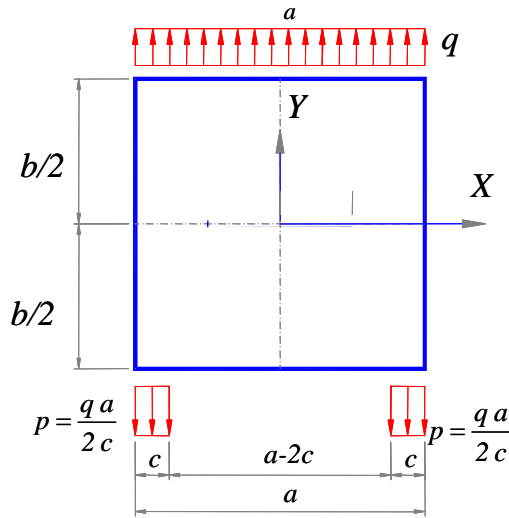
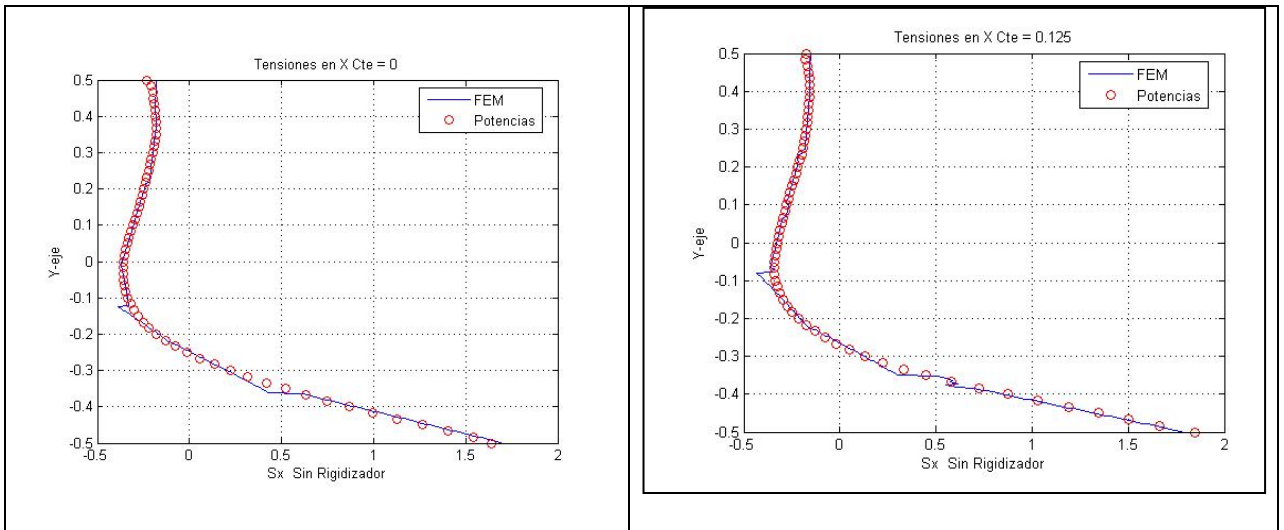


Figura 3 – Esquema de Viga Pared

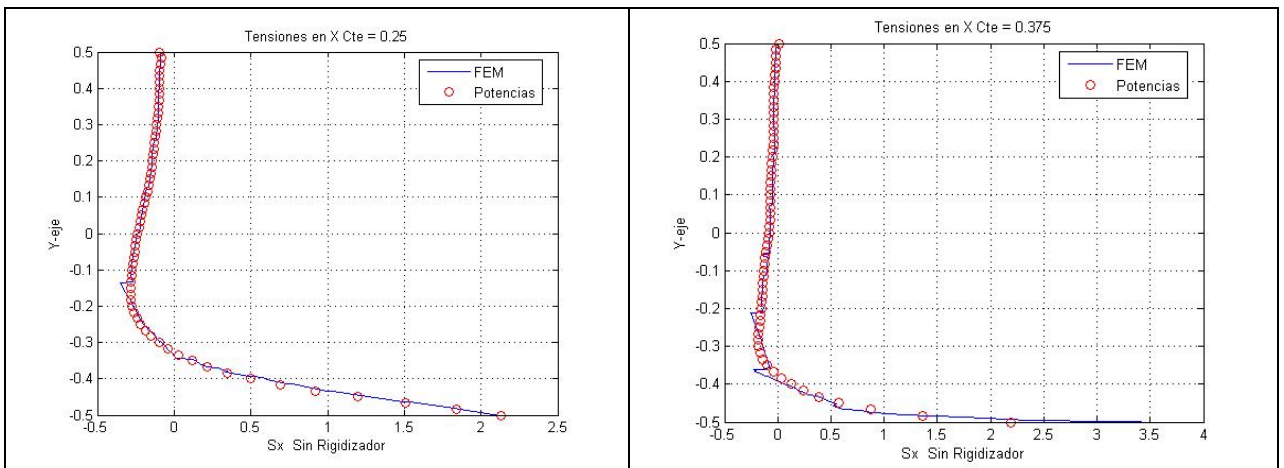
En el análisis del esquema propuesto, se ha constatado una excelente coincidencia entre los valores derivados de la metodología propuesta y FEM. A continuación, se indican dichos resultados.

Viga Pared Sin Rigidizador



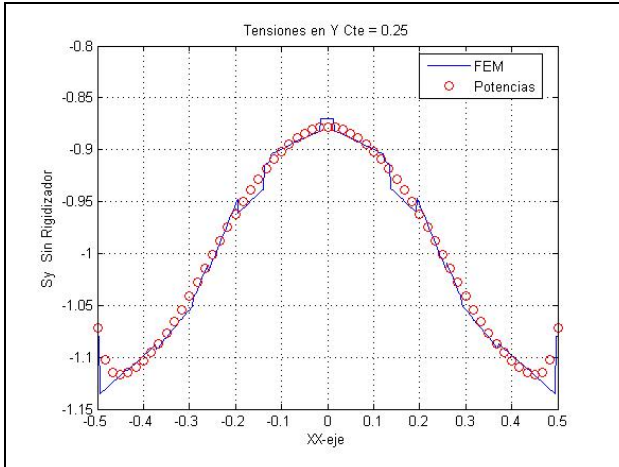
$\sigma_x$  en  $x=0,000$

$\sigma_x$  en  $x=0,125$

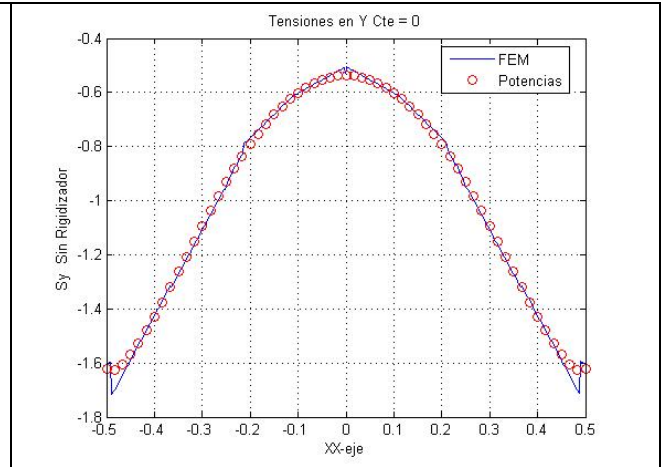


$\sigma_x$  en  $x=0,250$

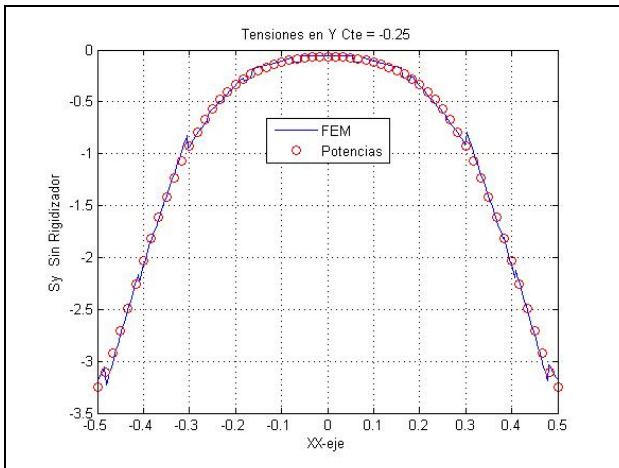
$\sigma_x$  en  $x=0,375$



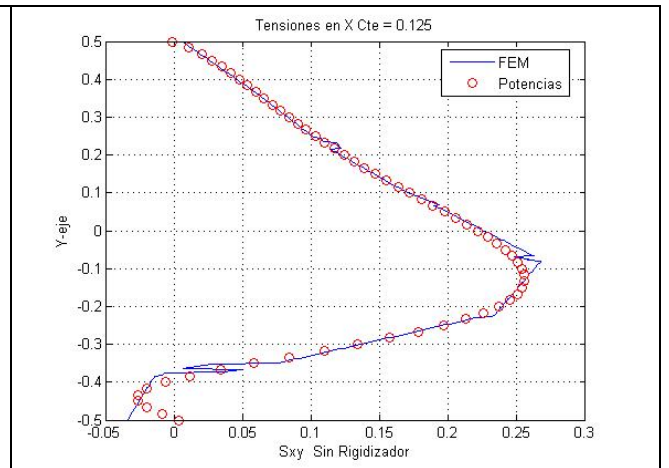
$\sigma_y$  en  $y=0,250$



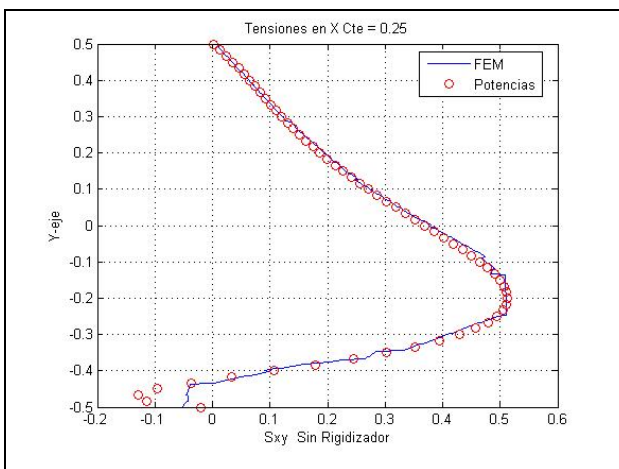
$\sigma_y$  en  $x=0,000$



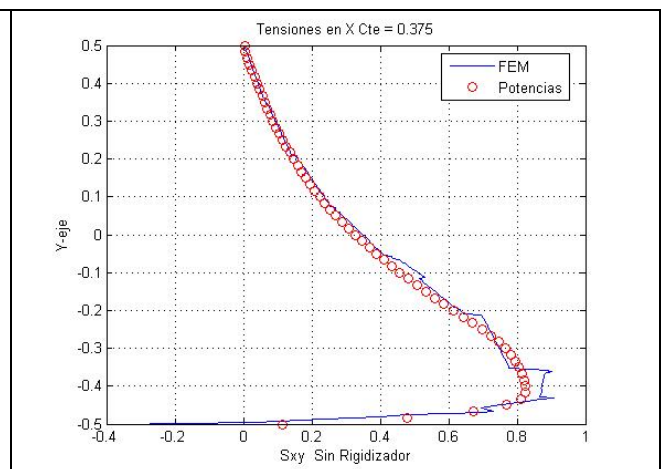
$\sigma_y$  en  $y=-0,250$



$\tau_{xy}$  en  $x=0,125$



$\tau_{xy}$  en  $x=0,250$



$\tau_{xy}$  en  $x=0,375$

En los casos siguientes, se ha introducido un rigidizador horizontal en la viga pared, en diferentes posiciones.

Se presentan los siguientes casos, que corresponden a la viga pared, cargada como se indica. Analizamos tres casos, individualizado cada uno de ellos según la posición del rigidizador

**Caso a: Viga Pared con rigidizador parcial horizontal.**

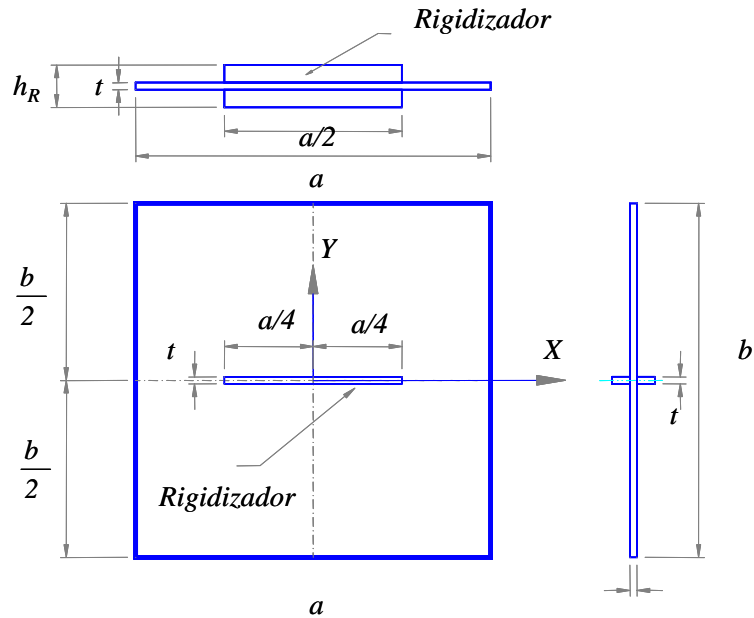
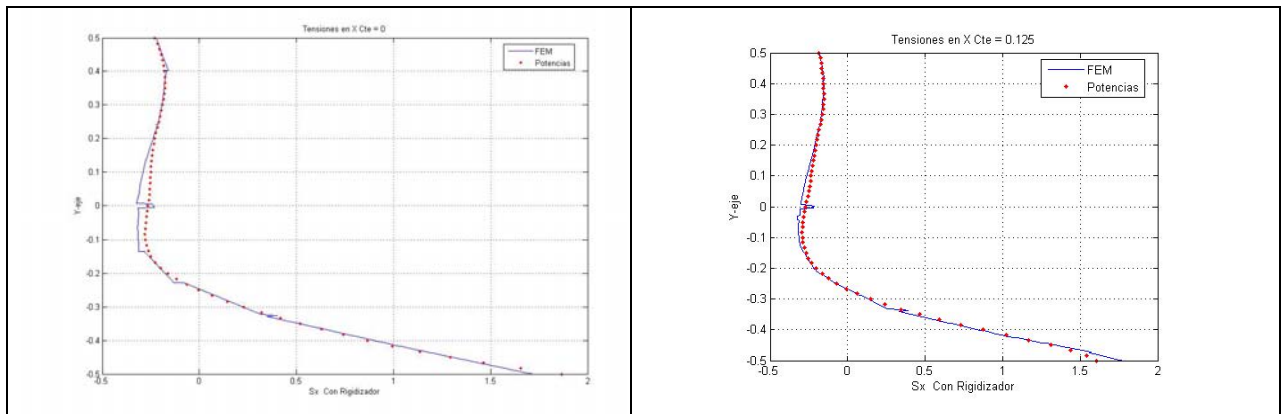


Figura 4 – Caso a - Viga Pared con Rigidizador

Al caso del ejemplo anterior, se le ha agregado el rigidizador parcial, de dimensiones  $t=0.01m$  y  $h_R=0.10 m$ . El rigidizador está centrado en la chapa.

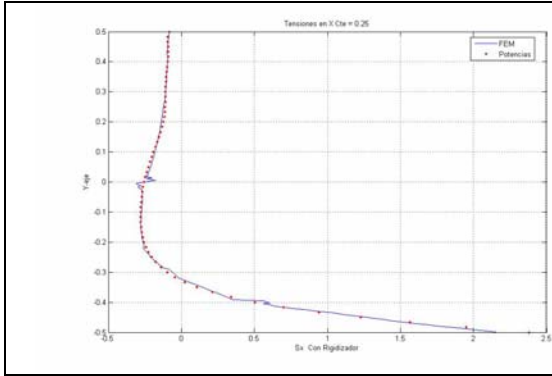
A continuación se muestran los gráficos correspondientes a las tensiones obtenidos con la metodología de series de potencias y las obtenidas con elementos finitos.

Viga Pared Con Rigidizador Parcial Horizontal  
Caso a – FEM y Potencias

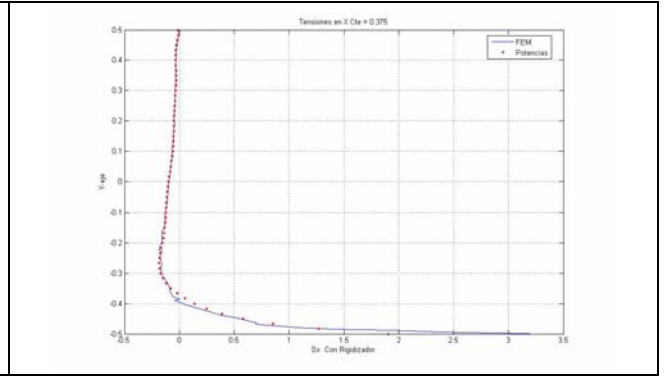


$\sigma_x$  en  $x=0,000$

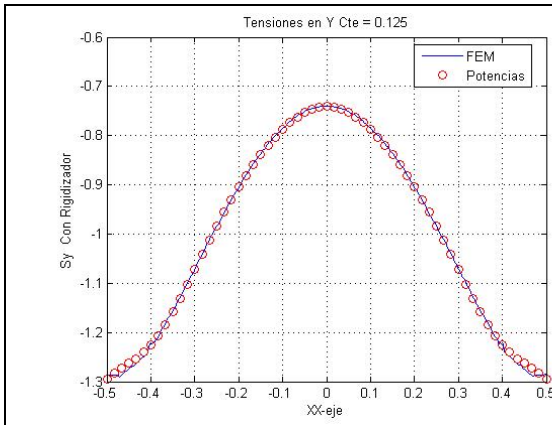
$\sigma_x$  en  $x=0,125$



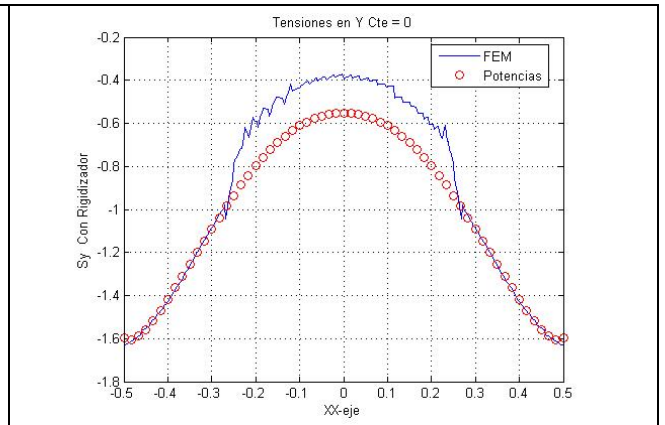
$\sigma_x$  en  $x=0,250$



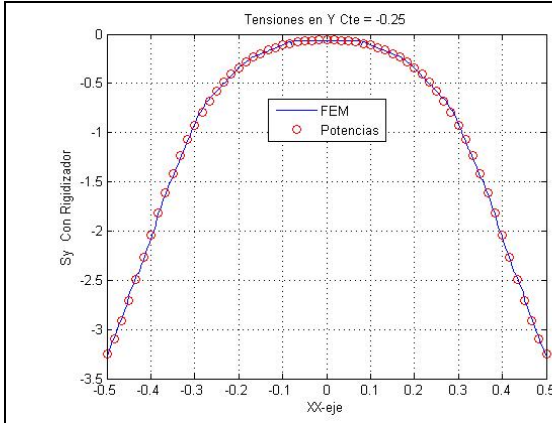
$\sigma_x$  en  $x=0,375$



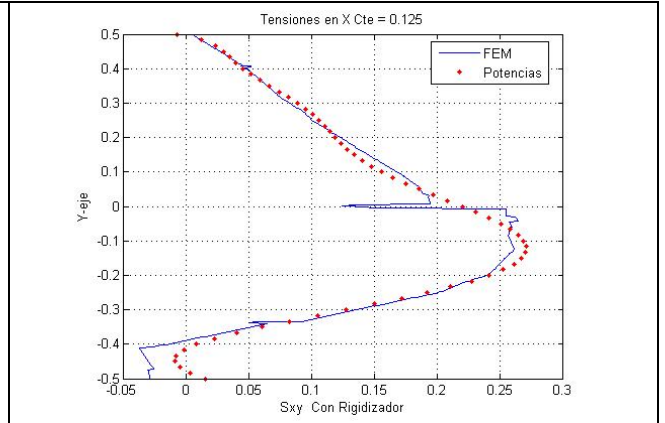
$\sigma_y$  en  $y=0,250$



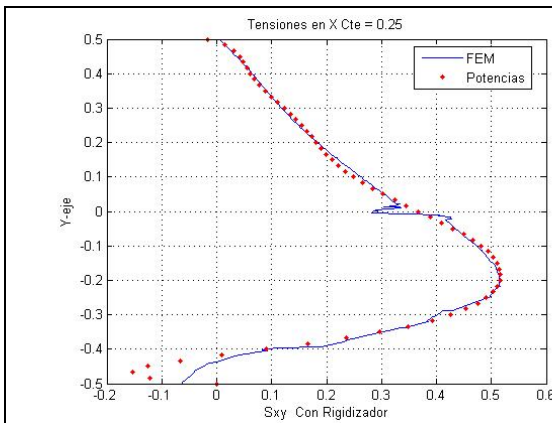
$\sigma_y$  en  $x=0,000$



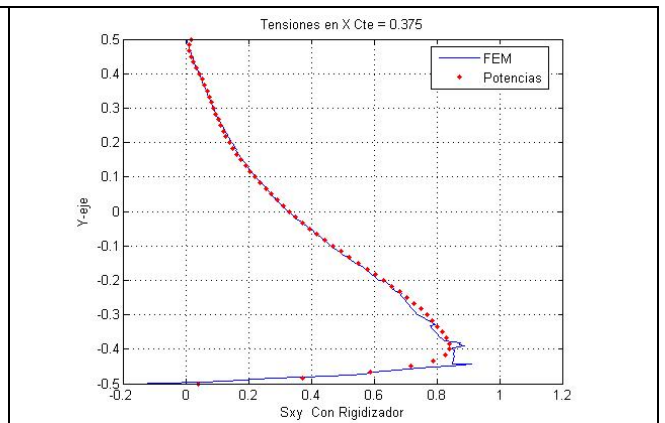
$\sigma_y$  en  $y=-0,250$



$\tau_{xy}$  en  $x=0,125$



$\tau_{xy}$  en  $x=0,250$



$\tau_{xy}$  en  $x=0,375$



**Caso b: Viga Pared con rigidizador parcial horizontal**

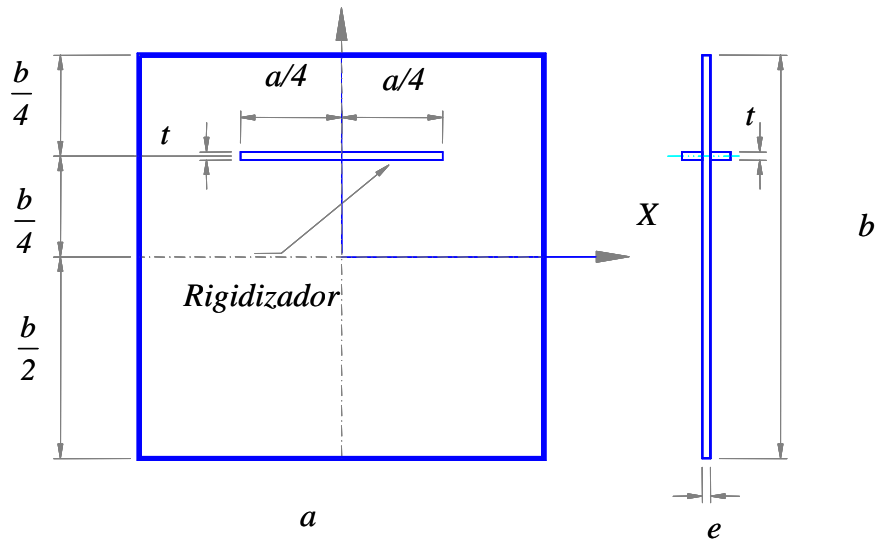
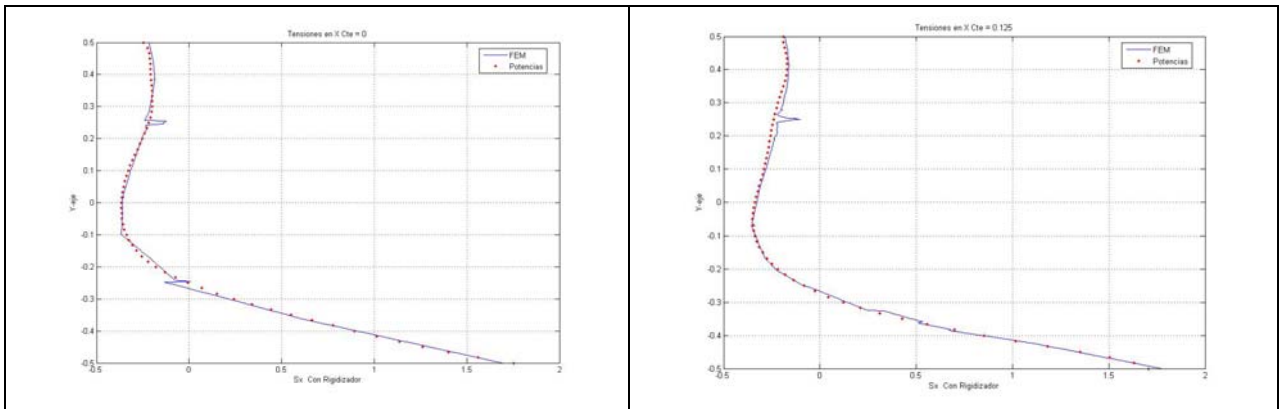


Figura 5 – Caso b - Viga Pared con Rigidizador Parcial Horizontal

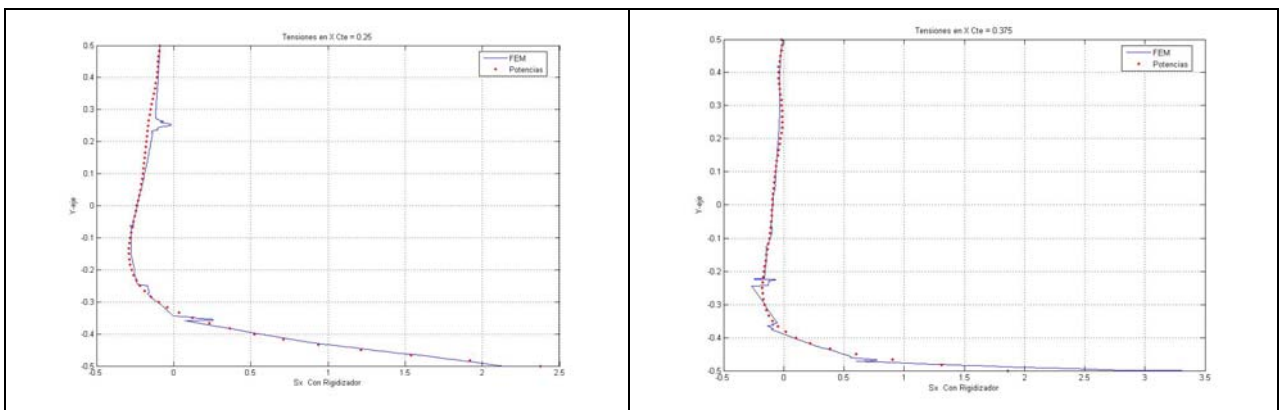
En este caso, el rigidizador del caso anterior, ha sido desplazado a la coordenada  $y=0.250$ .

Viga Pared Con Rigidizador Parcial Horizontal  
Caso b – FEM y Potencias



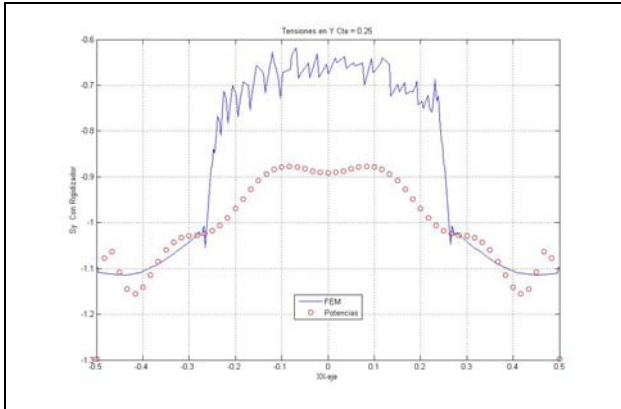
$\sigma_x$  en  $x=0,000$

$\sigma_x$  en  $x=0,125$

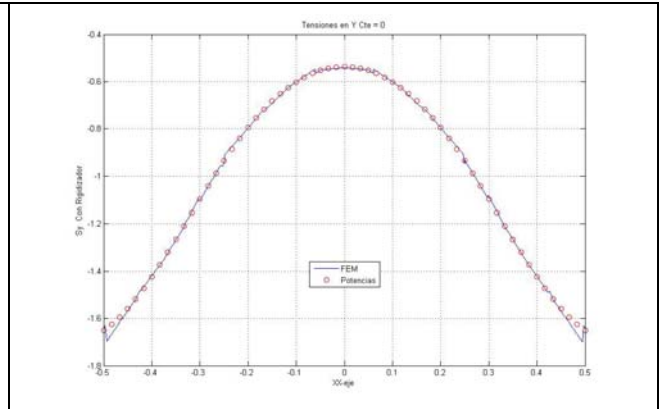


$\sigma_x$  en  $x=0,250$

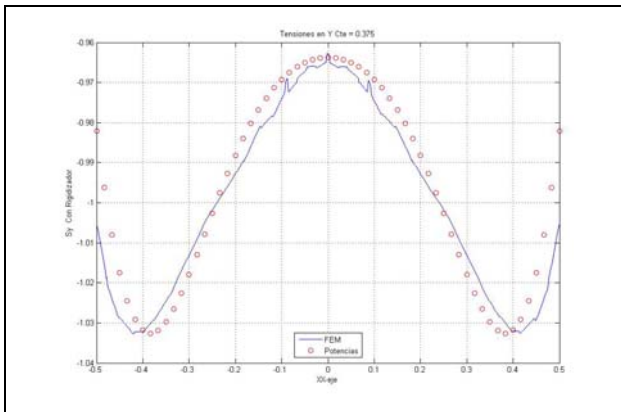
$\sigma_x$  en  $x=0,375$



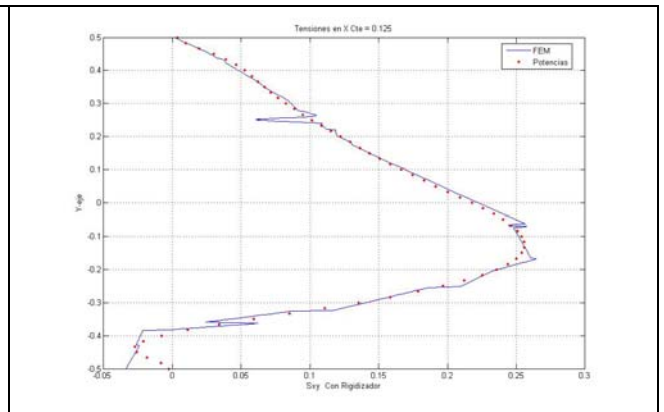
$\sigma_y$  en  $y=0,250$



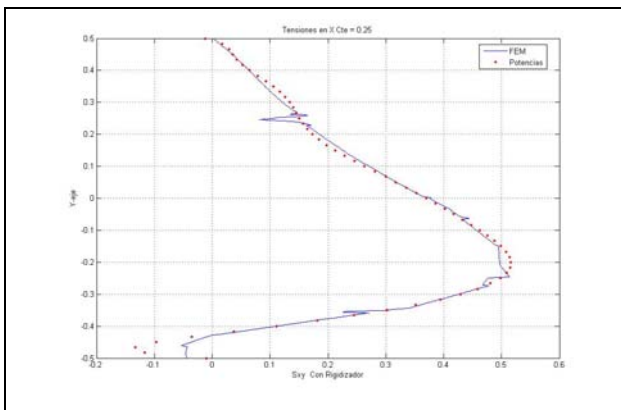
$\sigma_y$  en  $y=0,000$



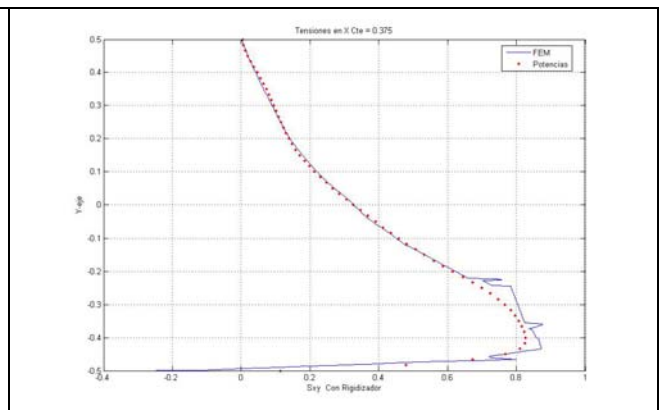
$\sigma_y$  en  $y=-0,250$



$\tau_{xy}$  en  $x=0,125$



$\tau_{xy}$  en  $x=0,250$



$\tau_{xy}$  en  $x=0,375$

**Caso c: Viga Pared con rigidizador total horizontal**

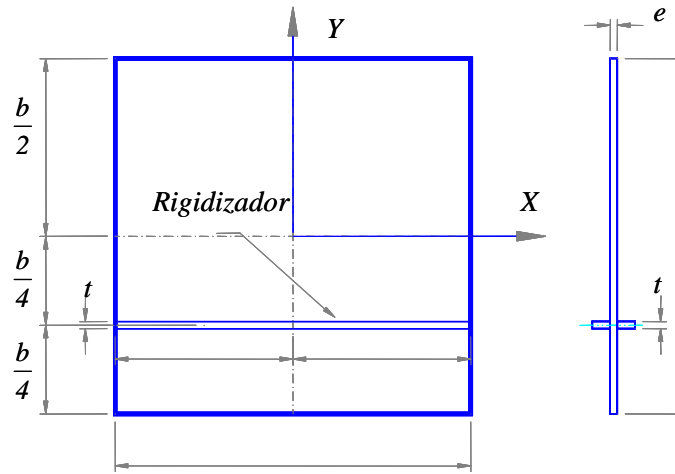
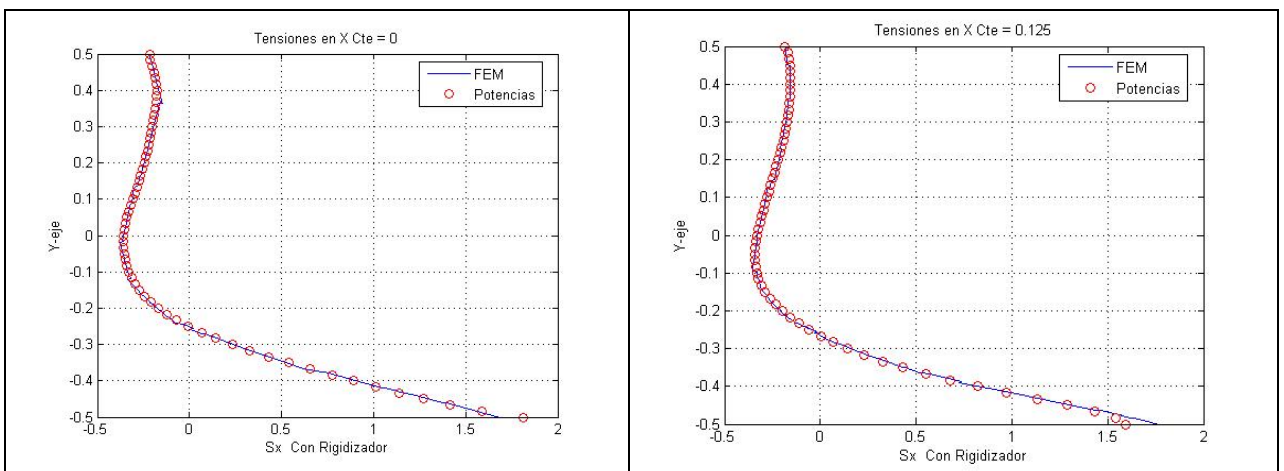


Figura 6 – Caso c - Viga Pared con Rigidizador Total Horizontal

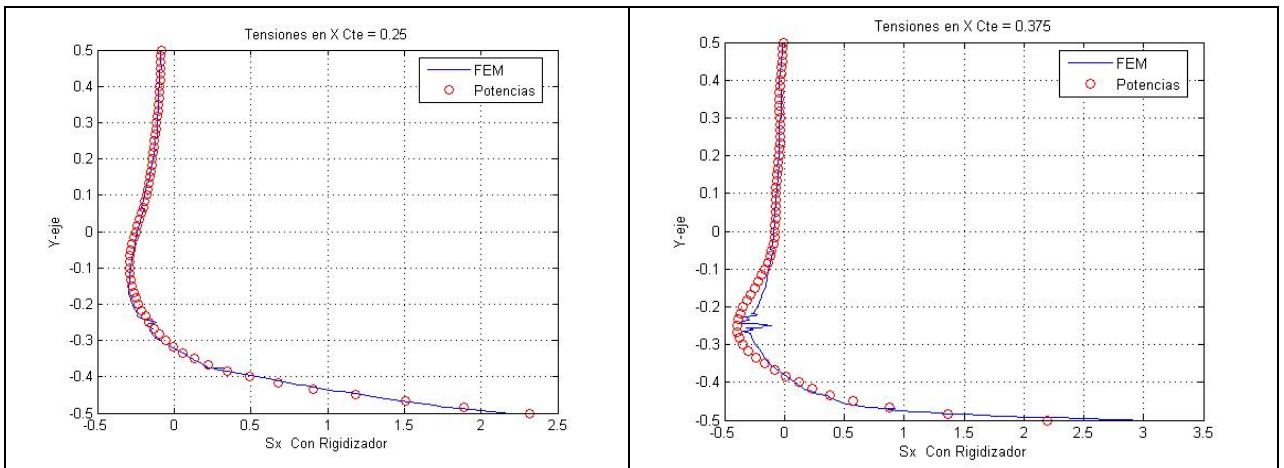
En este caso, el rigidizador en la coordenada  $y=-0.250$  se extiende de extremo a extremo de la chapa.

Viga Pared Con Rigidizador Total Horizontal  
Caso c – FEM y Potencias



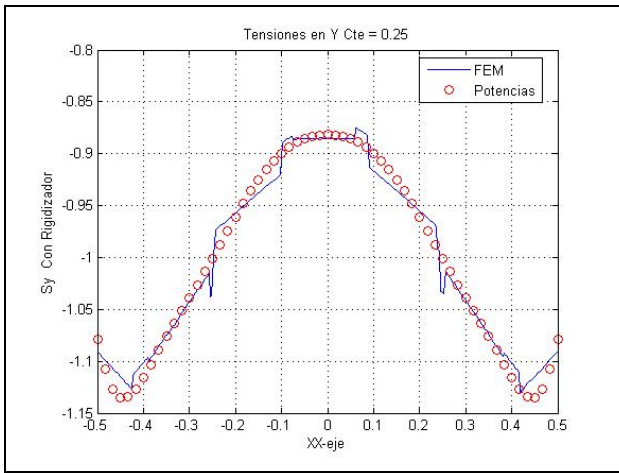
$\sigma_x$  en  $x=0,000$

$\sigma_x$  en  $x=0,125$

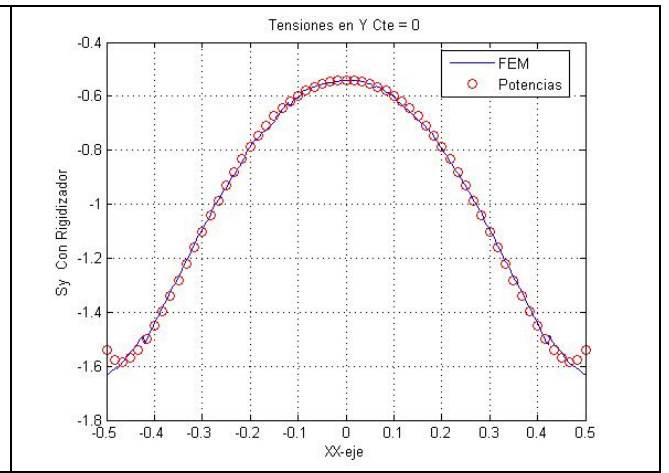


$\sigma_x$  en  $x=0,250$

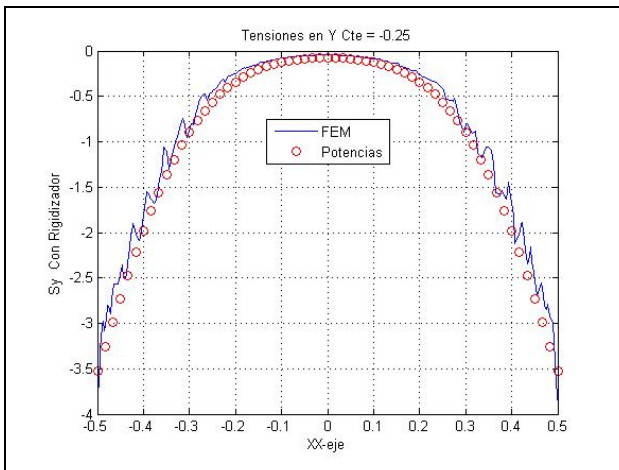
$\sigma_x$  en  $x=0,375$



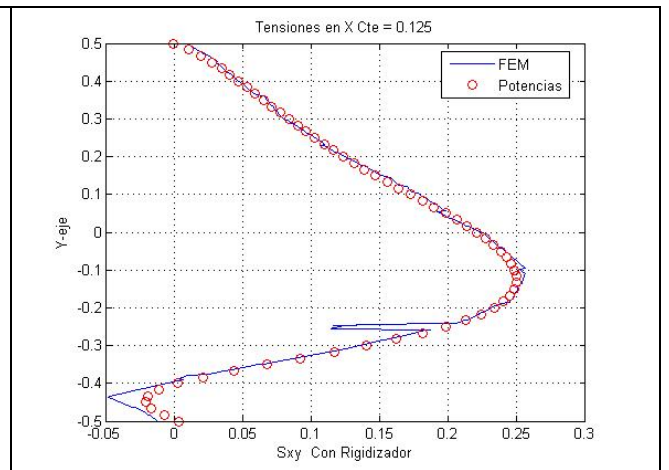
$\sigma_y$  en  $y=0,250$



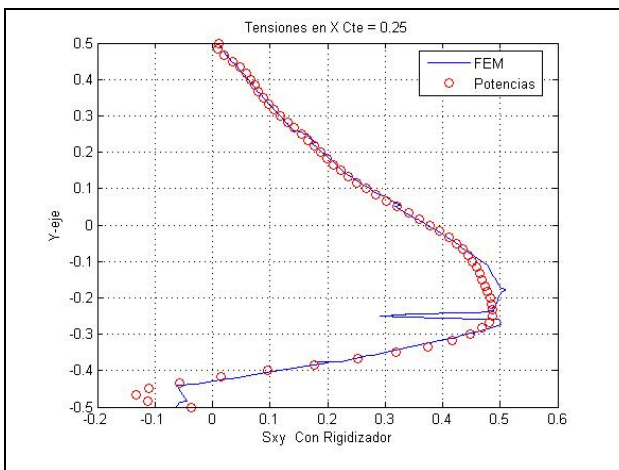
$\sigma_y$  en  $x=0,000$



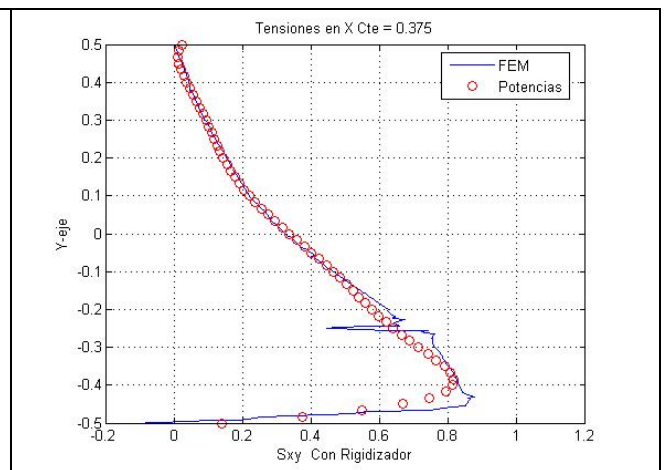
$\sigma_y$  en  $y=-0,250$



$\tau_{xy}$  en  $x=0,125$



$\tau_{xy}$  en  $x=0,250$



$\tau_{xy}$  en  $x=0,375$

## 5. COMENTARIOS Y CONCLUSIONES

Las aparentes discrepancias entre la metodología propuesta por los autores, con el MEF, y que por otra parte están evidenciadas en todos los diagramas que se acompañan, no son tales, y se deben a los modelos utilizados. En efecto, el modelo según MEF, es un sólido que responde a la teoría tridimensional elástica, mientras que la metodología en series de potencias, simula un estado clásico plano de tensiones. Ambas metodologías arrojan valores concordantes, con la aparente excepción del efecto localizado sobre los rigidizadores.

Los valores de las tensiones calculadas en los puntos singulares, correspondientes al plano medio en el modelo tridimensional, están siempre por debajo de los hallados con el modelo 2D. Además, si se observa cuidadosamente, en todos los casos, las series de potencias dan valores de tensiones con distribución suave, aún sobre los rigidizadores. En cambio MEF, con un código que toma como incógnitas primarias los desplazamientos, dado que calcula el tensor de tensiones como derivación de dichas incógnitas, introduce una distribución irregular, y que, todavía, evaluada sobre el plano medio, no contempla el efecto completo de las tensiones en el rigidizador.

La comparación de los resultados con los hallados por MEF son concordantes, y ratifica la potencialidad de la herramienta aquí presentada. MEF podría reproducir los diagramas de tensiones hallados por serie de potencias, aplicando el teorema del valor medio: calculada la resultante y distribuida uniformemente sobre el área del rigidizador, daría lugar, entendemos, a la distribución continua mencionada.

Dentro del conocimiento de los autores, es la primera vez que se proponen series múltiples para resolver en forma variacional un problema de equilibrio. Es decir, se ha abordado un problema plano de tensión, resolviéndoselo según la denominada forma débil.

Como ya hubiera sido advertido en la introducción, la enorme ventaja que se logra aquí, es disponer de la expresión analítica de las componentes de tensión, que pasan a ser los coeficientes variables de la ecuación, que gobierna el problema de inestabilidad de un estado plano. Precisamente, dicha problemática constituye el próximo desafío a abordar por los autores del presente trabajo.

Si bien el álgebra puede resultar algo engorrosa, por otro lado es ciertamente elemental, derivándose con ello, la necesidad de una esmerada como cuidadosa implementación del algoritmo computacional, a fin de no introducir errores. Se destaca, además, que se trata de un problema generalizado, en el cual no debimos imponer condición de borde alguna, ya que en este ejemplo, todas las condiciones son naturales.

Actualmente los autores, y su grupo de investigación están aplicando las series de potencias a problemas diferenciales a derivadas parciales. Al presente, se han obtenido algunos resultados muy prometedores, para problemas de CB y/o CI, en dominios de forma arbitraria.

### Referencias

- [1] C.P. Filipich, E. A. Bambill. Pandeo de pórticos planos. Uso sistemático de series de potencias. *Mecánica Computacional*, Vol. XXII, pp. 454-468. (ENIEF 2003). Bahía Blanca.
- [2] C.P.Filipich, P.M. Bellés, M.B. Rosales. Dinámica de anillos y arcos circunferenciales gruesos. *Mecánica Computacional*, Vol. XXII, pp. 863-876. (ENIEF 2003). Bahía Blanca.
- [3] C.P. Filipich, E. A. Bambill. Frecuencias naturales de piezas empresilladas vía serie de potencias. *Mecánica Computacional*, Vol. XXII, pp. 877-891. (ENIEF 2003). Bahía Blanca.
- [4] C.P.Filipich, M.B. Rosales, F.S. Buezas. Vibración libre de arcos simétricos de directriz arbitraria resueltos por medio de series de potencias. *Mecánica Computacional*, Vol. XXII, pp. 892-907. (ENIEF 2003). Bahía Blanca.

- [5] C.P.Filipich, M. R. Escalante, M.B. Rosales. Series de potencias: una ventajosa alternativa aplicada a vibraciones libres de pórticos. *Mecánica Computacional*, Vol. XXII, pp. 908-920. (ENIEF 2003).Bahía Blanca.
- [6] E.A. Bambill, C.P. Filipich, Inestabilidad del equilibrio en pórticos planos abiertos atensorados uso sistemático de series de potencias. *Mecánica Computacional*, Vol. XXIII, pp. 339-351. (2004).
- [7] S.P. Timoshenko, S., and Goodier, J., *Theory of Elasticity*, 3rd ed. McGraw-Hill, NY, 1970.
- [8] Y.C. Fung. *Foundations of solid mechanics*. Prentice Hall. New delhi. 1968.
- [9] A.S. Kalmanok. *Cálculo de vigas pared*. Editora Interciencia. 1962.