Asociación Argentina de Mecánica Computacional

Mecánica Computacional Vol XXVII, págs. 2861-2873 (artículo completo)
Alberto Cardona, Mario Storti, Carlos Zuppa. (Eds.)
San Luis, Argentina, 10-13 Noviembre 2008

MARCOS DE REFERENCIA Y PARAMETROS DE TRANSFORMACION EN SOLUCIONES OPTIMAS DE LA COMPENSACION DE UNA RED GEODESICA LIBRE

José Luis Vacaflor

Cátedras de Geodesia Superior. Departamento de Geodesia y Topografía.
Facultad de Ciencias Exactas y Tecnología. Universidad Nacional de Tucumán.
Avenida Independencia 1800. (4000) San Miguel de Tucumán. Tucumán. Argentina.
vacaflor@arnet.com.ar ; Tel/Fax: 00 54 0381 4223215

Palabras claves: Optimización. Red geodésica. Datum. Marcos de Referencia. Compensación

Resumen. En este trabajo se presentan soluciones óptimas por mínimos cuadrados (incluyendo la Minimun Norm Least Square Solution) de la compensación de una red geodésica libre bidimensional en un modelo singular de Gauss-Markov que incorpora en forma explícita en sus ecuaciones de restricciones mínimas del datum a cuatro parámetros de una transformación plana de Helmert: dos traslaciones ; una rotación diferencial, y un cambio de escala.

Estos parámetros de transformación permiten vincular el marco de referencia formado por las coordenadas aproximadas de los puntos de la red con el marco de referencia formado por las coordenadas compensadas o ajustadas.

Como ejemplo numérico, el método desarrollado se aplica en la compensación de una trilateración bidimensional compuesta de seis puntos.

1 INTRODUCCIÓN

Una *red geodésica* es una estructura que involucra observaciones e incógnitas necesarias para describir la superficie y el campo de gravedad de la Tierra y sus variaciones temporales.

Esta definición puede ser ampliada si incluimos la totalidad de las actividades económicas y de organización, que se encuentran en estrecha conexión con la producción de una estructura determinada.

Diferentes sistemas de referencia geodésicos de nivel local, regional o global pueden ser utilizados para la descripción de la superficie de la Tierra mediante las coordenadas de un conjunto de puntos físicos.

Marcos Convencionales de Referencia Terrestre (CTRF) realizados mediante redes geodésicas globales que utilizan técnicas de la Geodesia espacial son usados en la actualidad para investigar terremotos, movimientos tectónicos, cambios en el nivel medio del mar, volcanes y la dinámica del manto y la corteza terrestre.

En este sentido, en las estrategias observacionales del programa integrado para la ciencia solida de la Tierra del “Solid Earth Science Working Group” (SESWG, NASA) se incluyen las redes geodésicas espaciales y el Marco Internacional de Referencia Terrestre (ITRF).

En este trabajo, analizaremos algunos aspectos relacionados con la definición y realización de un Sistema Convencional de Referencia Terrestre (CTRS) en el contexto de la definición del datum en la compensación de una red geodésica libre.

El cálculo de compensación consiste fundamentalmente en adaptar modelos matemáticos a datos empíricos (Grafared, E., et.al., 1993)

Los modelos que utilizaremos para compensar están basados en las coordenadas de los puntos físicos de una red geodésica bidimensional y en las observaciones que se realizan entre los puntos.

De acuerdo al Servicio Internacional de Rotación de la Tierra y Sistemas de Referencia (IERS) : a) un *Sistema Convencional de Referencia Terrestre (CTRS)* es *definido* por el conjunto de todas las *convenciones, algoritmos y constantes* que proveen el origen, escala y orientación del sistema y su evolución en el tiempo ; b) Un *Marco Convencional de Referencia Terrestre (CTRF)* es definido como un conjunto de puntos físicos con coordenadas *determinadas* precisamente en un específico sistema de coordenadas y es una *realización* de un ideal Sistema de Referencia Terrestre (TRS). (McCarthy, D. y Petit, G.,2004).

Un TRS es un objeto matemático *inaccesible* e invariable mientras que un TRF es *accesible* y *perfectible*. (Altamimi, Z.,et.al.,2002)

Según el National Geodetic Service (USA) un datum geodésico es un conjunto de parámetros y constantes que definen un sistema de coordenadas, incluyendo su origen, su orientación y escala, en tal forma que sean *accesibles* para aplicaciones geodésicas (Jekeli,C.,2003).

Conceptualmente esta definición incluye la *definición* de un *sistema de referencia* y su *realización*, es decir, el *marco de referencia* (Jekeli,C., 2003).

Por lo tanto, consideraremos que un datum geodésico es el *conjunto* de todas las *convenciones, algoritmos y constantes* necesarias para *definir* y *realizar* el origen, orientación , escala y evolución en el tiempo de un TRS en tal forma que sean *accesibles*.

En consecuencia, un datum geodésico provee al usuario de accesibilidad a una primera realización del TRS y las coordenadas compensadas de la red geodésica proveen de accesibilidad a un mayor número de usuarios, a una posterior realización del TRS.

En particular, los Sistemas Globales de Posicionamiento Satelital (GNSS) proveen marcos de referencia de una extensión global. En la actualidad, un número creciente de usuarios usan estos marcos en un amplio espectro de aplicaciones.

Consideraremos como parámetros incógnitas en la compensación de una red geodésica a las coordenadas de sus puntos físicos en un Sistema de Referencia Terrestre bidimensional cartesiano (x, y): $TRS(x, y)$ y como observaciones a las mediciones que vinculan los puntos de la red.

Teniendo en cuenta está forma de parametrización, nos referimos a una *red geodésica libre* como aquella red que tiene como parámetros incógnitas en la compensación a las coordenadas de sus puntos físicos y en la cual para una dada época, el origen, la orientación o la escala del TRS no están definidos, originando – teniendo en cuenta la definición anterior de datum geodésico- , un *defecto de datum*.

Esta circunstancia es frecuente en redes que no están conectadas a puntos “fijos” o de mayor orden externos.

Sin embargo, debe tenerse en cuenta que se puede compensar una red sin considerar a las observaciones inmersas en un particular sistema de referencia.

Teniendo en cuenta lo expresado, mostraremos en forma *explícita* en la compensación de una red geodésica libre cómo se puede establecer un datum geodésico para *definir* y *realizar* para una dada época la posición, orientación y escala de un $TRS(x, y)$ *utilizando* parámetros de una transformación de Helmert, y coordenadas de un TRF.

Esto será realizado en el contexto de la aplicación del método de mínimos cuadrados en un Modelo Singular (con defecto de datum) de Gauss-Markov para la compensación de una red geodésica libre bidimensional.

De particular interés son los parámetros de una transformación plana de Helmert o de semejanza: dos traslaciones t_x, t_y; una rotación diferencial $d\delta$, y un cambio de escala $(1+ds)$ que vinculan el marco de referencia formado por las coordenadas aproximadas o “a priori” de los puntos de la red con el marco de referencia formado por las coordenadas compensadas o ajustadas.

2 SOLUCIONES OPTIMAS EN LA COMPENSACION DE UNA RED GEODESICA LIBRE

Para compensar una red geodésica libre utilizaremos el método de mínimos cuadrados en el siguiente Modelo Singular (con defecto de datum) de Gauss-Markov (SGMM):

$$y - e = A\xi \quad , \; r(A) =: q < m < n \; , \; d =: m - q \, , \; e \sim (0, \sigma_0^2 P^{-1} =: D\{y\}) \qquad (1)$$

con :

$n =$ número de observaciones ; $m =$ número de parámetros incógnitas ; $\xi_{mx1} =$ vector de parámetros incógnitas (incrementos) ; $y_{nx1} =$ vector de las observaciones (incrementos) ; $\sigma_0^2 =$ factor de la varianza ; $A_{nxm} =$ matriz de “Diseño” ó de coeficientes (“Jacobiano”) ; $r =$ rango ; $e_{nx1} =$ vector de errores aleatorios de observación (incógnita), se considera que su esperanza matemática es cero; $d =$ número de defectos de datum ; $D =$ Dispersión ; $P_{nxn} =$ matriz de peso positiva-definida ; $o =$ orden.

El $r(A) =: q < m < n$ refleja la falta de definición para una dada época de la posición, orientación ó escala del TRS.

La deficiencia de rango $d =: m - q$ ó número de defectos de datum es igual al número de parámetros adicionales que son necesarios para definir para una cierta época, el origen, la orientación ó la escala del TRS

Basados en el principio de mínimos cuadrados pesados:

$$e^T Pe = \|e\|_P^2 = \|y - A\xi\|_P^2 = (y - A\xi)^T P(y - A\xi) = \min_{\xi} \tag{2}$$

A partir de (1) y (2) se llega a un sistema de ecuaciones normales singular, ya que $r(N) = r(A) =: q < m$:

$$N\hat{\xi} = c \ , \ r(N) = q < m \ , \ |N| = 0 \tag{3}$$

con,

$N := A^T PA =$ Matriz Normal

$c := A^T Py$

Se obtendrá una única solución $\hat{\xi}$ si se introducen "l" restricciones adicionales de la forma:

$$K\hat{\xi} = x_0 \quad , \ o(K) = lxm \, , \ r(K) = l \geq m - q \tag{4}$$

y si se cumple la condición :

$$R(K^T) \cup R(A^T) = \Re^m \tag{5}$$

siendo,

$$R(K^T) = \{K^T \alpha / \alpha \in \Re^l\} \ ; \ R(K^T) \subset \Re^m \ ; \ \dim R(K^T) = r(K) = l \tag{6}$$

$$R(A^T) = \{A^T \alpha / \alpha \in \Re^l\} \ ; \ R(A^T) \subset \Re^m \ ; \ \dim R(A^T) = r(A) = q \tag{7}$$

o una de las siguientes condiciones equivalentes :

$$r[A^T, K^T] = m \ ; \ r\begin{bmatrix} A \\ K \end{bmatrix} = m \ ; \ N + K^T K \text{ regular} \ ; \ R\begin{bmatrix} A^T & , & K^T \end{bmatrix} = \Re^m \tag{8}$$

Por lo tanto, para introducir (4) se *elimina el defecto de datum* agregando la condición $K\xi = x_0$ en (1) bajo el cumplimiento de (5).

Entonces, el modelo (1) se transforma en:

$$y - e = A\xi \quad , \ r(A) =: q < m < n \ , \ d =: m - q \, , \ e \sim (0, \sigma_0^2 P^{-1} =: D\{y\}) \tag{9}$$

$$K\xi = x_0 \quad , \ o(K) = lxm \, , \ r(K) = l \geq d \ , \ R(K^T) \cup R(A^T) = \Re^m$$

La solución por mínimos cuadrados pesados $\hat{\xi}$ (W-LESS : Weighted LEast Squares Solution) se basa en la función objetivo:

$$\phi(\xi, \lambda) := (y - A\xi)^T P(y - A\xi) + 2\lambda^T (K\xi - x_0) = \min_{\xi, \lambda} \tag{10}$$

Siendo el vector λ de $(lx1)$ los multiplicadores de Lagrange.

$$\frac{1}{2}\frac{\partial \phi}{\partial \xi} = N\hat{\xi} + K^T \hat{\lambda} - c = 0 \tag{11}$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial\phi}{\partial\lambda} = K\hat{\xi} - x_0 = 0$$

De las ecuaciones normales extendidas equivalentes:

$$(K^T QK)\hat{\xi} = K^T Qx_0 \tag{12}$$

$$(N + K^T QK)\hat{\xi} + K^T\hat{\lambda} = c + K^T Qx_0$$

Se obtienen las coordenadas compensadas:

$$\hat{\xi} = N_K^{-1}c + N_K^{-1}K^T[KN_K^{-1}K^T]^{-1}[x_0 - KN_K^{-1}c] \tag{13}$$

Con: $N_K := (N + K^T QK)$ regular y Q_{m-q} : cualquier matriz positiva-definida

Si en (9) se considera que $l = d =: m - q$, entonces las ecuaciones $K\xi = x_0$ se denominan restricciones *mínimas* de datum y la solución por mínimos cuadrados pesados $\hat{\xi}$ se encuentra a partir del modelo:

$$y - e = A\xi \;\;,\;\; r(A) =: q < m < n \;,\; d =: m - q \,,\; e \sim (0, \sigma_0^2 P^{-1} =: D\{y\}) \tag{14}$$

$$K\xi = x_0 \;,\; o(K) = dxm \,,\; r(K) = d \;,$$

$$R(A^T) \oplus R(K^T) = \Re^m$$

$R(A^T)$ y $R(K^T)$ son subespacios *complementarios* en $\Re^m$

Para encontrar una *óptima* elección de K que minimize la $tr\{D\{\hat{\xi}\}\}$ ó parte de ella, se define una matriz E mediante la relación de ortogonalidad :

$$AE^T = 0 \;,\; o(E) = dxm \;,\; r(E) = d \tag{15}$$

En consecuencia:

$$R(A^T) \overset{\perp}{\oplus} R(E^T) = \Re^m \tag{16}$$

Entonces, la solución óptima por mínimos cuadrados $\hat{\xi}_{opt}$ de una red geodésica libre (Schaffrin, B.,1985) se encuentra a partir de un modelo que incluye a las restricciones *óptimas mínimas* de datum en la forma $E\xi = x_0$, $(K = E)$, es decir:

$$y - e = A\xi \;\;,\;\; r(A) =: q < m < n \;,\; d =: m - q \,, e \sim (0, \sigma_0^2 P^{-1}) \tag{17}$$

$$E\xi = x_0$$

$$AE^T = 0 \;,\; o(E) = dxm \;,\; r(E) = d$$

$$\Rightarrow R(A^T) \overset{\perp}{\oplus} R(E^T) = \Re^m$$

La solución es (Schaffrin, B.,1985):

$$\hat{\xi}_{opt} = (N + E^T QE)^{-1}c + E^T(EE^T)^{-1}x_0 \tag{18}$$

$$D\{\hat{\xi}_{opt}\} = \sigma_0^2 (N + E^T QE)^{-1} - \sigma_0^2 E^T (EE^T QEE^T)^{-1} E = \sigma_0^2 N^+$$

La Seudoinversa de N es $N^+ = (N + E^T QE)^{-1} - E^T (EE^T QEE^T)^{-1} E$

$tr\{D\{\hat{\xi}_{opt}\}\} = \min$; x_{0dx1} : es un vector arbitrario ; Q_{m-q} : es una matriz positiva-definida

Sí en (17) $x_{0dx1} = 0_{dx1}$ se obtendrá una clase particular de solución óptima llamada Solución por mínimos cuadrados pesados con norma mínima (MINOLESS: MInimun NOrm LEast Square Solution) $\hat{\xi}_{ml}$. Es decir $\hat{\xi}_{ml}$ surge del modelo (17) modificado:

$$y - e = A\xi \quad , \quad r(A) =: q < m < n \quad , d =: m - q \, , e \sim (0, \sigma_0^2 P^{-1}) \tag{19}$$

$$E\xi = 0_{dx1}$$

$$AE^T = 0 \quad o(E) = dxm \; , \; r(E) = d$$

$$\Rightarrow R(A^T) \overset{\perp}{\oplus} R(E^T) = \Re^m$$

La solución es (Schaffrin, B.,1985):

$$\hat{\xi}_{ml} = (N + E^T QE)^{-1} c = N^+ c \quad , \quad \hat{\xi}_{ml} \in \left\{\hat{\xi}_{opt}\right\} \tag{20}$$

$$\left\|\hat{\xi}_{ml}\right\|^2 = \hat{\xi}_{ml}^T \hat{\xi}_{ml} = \min\{ \left\|\hat{\xi}\right\|^2 / \hat{\xi} \text{ es LESS}\}$$

$$D\{\hat{\xi}_{ml}\} = \sigma_0^2 N^+ \quad \text{con} \quad tr\{D\{\hat{\xi}_{ml}\}\} = \min$$

3 DATUM. MARCOS DE REFERENCIA Y PARAMETROS DE TRANSFORMACION EN LA COMPENSACION DE UNA RED GEODESICA LIBRE BIDIMENSIONAL

Consideremos una red geodésica libre formada por "k" puntos físicos P_i con coordenadas (x_i, y_i), $i = 1 \ldots k$ en el $TRS(x, y)$, y conectados mediante "n" observaciones, y no estando *definida* para ninguna época la posición, orientación y escala del $TRS(x, y)$.

Además, consideremos disponibles las coordenadas (x_i^0, y_i^0), $i = 1 \ldots k$ de un marco de referencia "a priori" ó "aproximado" $TRF\,(x_0, y_0)$.

Para compensar, utilizamos el método de mínimos cuadrados en el modelo singular de Gauss-Markov (SGMM) dado en (1):

$$y - e = A\xi \quad , r(A) =: q < m < n \quad , d =: 4 = m - q \, , \; e \sim (0, \sigma_0^2 P^{-1} =: D\{y\}) \tag{21}$$

$\xi_{mx1} = [dx_1, dy_1 \ldots dx_k, dy_k]^T$; $dx_i = x_i - x_i^0$; $dy_i = y_i - y_i^0$, $i = 1 \ldots k$, $m = 2k$

$\xi_{mx1} = X_{mx1} - X_{mx1}^0$

X_{mx1} = Vector de coordenadas (parámetros) incógnitas de P_i en el $TRS(x, y)$

$X_{mx1} = [x_1, y_1 \ldots x_k, y_k]^T$

X_{mx1}^0 = Vector de coordenadas de P_i del disponible $TRF\,(x_0, y_0)$

$X_{mx1}^0 = [x_1^0, y_1^0 \ldots x_k^0, y_k^0]^T$

La deficiencia de rango ó número de defectos de datum $d =: 4 = m - q$ nos muestra que para definir el origen, orientación y escala del $TRS(x, y)$ es necesario introducir cuatro parámetros adicionales.

Como se explicó en la sección anterior, será suficiente con introducir en (21) las restricciones *mínimas* de datum:

$$K_{4xm}\xi_{mx1} = x_{0\,4x1}\,,\ r(K) = 4 \tag{22}$$

Para eliminar el defecto de datum y obtener una solución única $\hat{\xi}$.

Introduciendo (22) en (21) y de acuerdo a (14), la solución por mínimos cuadrados pesados $\hat{\xi}$ se encuentra a partir del modelo:

$$y - e = A\xi \quad , r(A) =: q < m < n\,, d =: 4 = m - q\,,\ e \sim (0, \sigma_0^2 P^{-1} =: D\{y\}) \tag{23}$$

$$K\xi = x_0\ ,\ o(K) = 4xm\,,\ r(K) = 4\ ,$$

$$R(A^T) \oplus R(K^T) = \Re^m$$

A continuación, mostraremos en forma *explícita* cómo las restricciones *mínimas* de datum $K_{4xm}\xi_{mx1} = x_{0\,4x1}$ de (22) ó (23) pueden *definir* y *realizar* para una dada época la posición, orientación y escala del $TRS(x, y)$ *utilizando*: a) valores adoptados para cuatro parámetros de una transformación plana de Helmert, y b) las coordenadas del marco $TRF\,(x_0, y_0)$.

Si consideramos como modelo de transformación de las coordenadas del $TRS\,(x_0, y_0)$ al $TRS(x, y)$, a una transformación Euclideana de semejanza de cuatro parámetros o Modelo de transformación plana de Helmert (se adopta la convención "right-handed" para los ejes) se tiene:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \end{bmatrix} + ds. \begin{bmatrix} 1 & -d\delta \\ d\delta & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} \tag{24}$$

Siendo los cuatro parámetros de la transformación: dos traslaciones t_x y t_y; una rotación diferencial $d\delta$ (del $TRS(x, y)$), y un factor de escala $ds.$ que se agrupan en el vector PT_{4x1}:

$$PT = [t_x, t_y, d\delta, ds]^T \tag{25}$$

Quedará definida la posición, orientación y escala del $TRS(x, y)$ para una dada época sí se define su situación relativa respecto del $TRS\,(x_0, y_0)$.

Esto se logra, si para los parámetros de transformación t_x, t_y, $d\delta$ y ds de (24) ó (25) se adoptan los valores: t_x^*, t_y^*, $d\delta^*$ y ds^* respectivamente.

O sea, si por definición se establece que:

$$PT = PT^* \tag{26}$$

$$PT^* = [t_x^*, t_y^*, d\delta^*, ds^*]$$

Entonces , para $(x_i, y_i), (x_i^0, y_i^0)$, $i = 1 \ldots k$ de acuerdo a (24) y (26):

$$\begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_i^0 \\ y_i^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t_x^* \\ t_y^* \end{bmatrix} + ds^*.\begin{bmatrix} 1 & -d\delta^* \\ d\delta^* & 1 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} x_i^0 \\ y_i^0 \end{bmatrix} \tag{27a}$$

$$\Rightarrow \qquad \begin{bmatrix} dx_i \\ dy_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -y_i^0 & x_i^0 \\ 0 & 1 & x_i^0 & y_i^0 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} t_x^* \\ t_y^* \\ d\delta^* \\ ds^* \end{bmatrix} \tag{27b}$$

$\therefore$ Para los "k" puntos:

$$\xi = E^T PT^* \tag{28}$$

con :

$$E_{4xm} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 1 \\ -y_1^0 & x_1^0 & \ldots & -y_u^0 & x_u^0 \\ x_1^0 & y_1^0 & \ldots & x_u^0 & y_u^0 \end{bmatrix} \tag{29}$$

La matriz E_{4xm} de (29) satisface las condiciones (15) y (16).

Incorporando (28) en (22):

$$K_{4xm}\xi_{mx1} = K_{4xm}E_{mx4}^T PT_{4x1}^* \quad , \quad r(K) = 4 \tag{30}$$

$$\Rightarrow \qquad x_{0\,4x1} = K_{4xm}E_{mx4}^T PT_{4x1}^* \tag{31}$$

La ecuación (30) muestra en forma *explícita* cómo las restricciones *mínimas* de datum $K_{4xm}\xi_{mx1} = x_{0\,4x1}$ pueden *definir* y *realizar* para una dada época la posición, orientación y escala del $TRS(x, y)$ *utilizando* PT_{4x1}^* y las coordenadas del marco $TRF\,(x_0, y_0)$ mediante E_{4xm}.

Introduciendo (30) en (23) y teniendo en cuenta (15) y (16), se obtiene:

$$y - e = A\xi \quad , r(A) =: q < m < n \;, d =: 4 = m - q \,,\; e \sim (0, \sigma_0^2 P^{-1}) \tag{32}$$

$$K_{4xm}\xi_{mx1} = K_{4xm}E_{mx4}^T PT_{4x1}^* \;\;,\; o(K) = 4xm \,,\; r(K) = 4 \;,$$

$$R(A^T) \oplus R(K^T) = \Re^m$$

$$AE^T = 0 \;,\; o(E) = dxm \;,\; r(E) = d$$

$$\Rightarrow R(A^T) \overset{\perp}{\oplus} R(E^T) = \Re^m$$

El modelo (32) incorpora en forma explícita en sus ecuaciones de restricciones mínimas del datum a cuatro parámetros de una transformación plana de Helmert: dos traslaciones t_x^*, t_y^*, una rotación diferencial $d\delta^*$, un cambio de escala $(1 + ds^*)$ y a una matriz E_{4xm} vinculada al disponible $TRF\,(x_0, y_0)$.

Una solución por mínimos cuadrados *óptima* $\hat{\xi}_{opt}$ (véase (18)) se encuentra a partir del modelo que incluye a las restricciones *óptimas mínimas* de datum que surgen de la selección:

$$K_{4xm} = E_{4xm} \ , \ r(E) = 4 \tag{33}$$

Reemplazando (33) en (30):

$$E\xi = EE^T PT^* \ , o(E) = 4xm, \ \ r(E) = 4 \tag{34}$$

La ecuación (34) muestra en forma explícita cómo las restricciones óptimas mínimas de datum pueden *definir y realizar* para una dada época, la posición, orientación y escala del $TRS(x, y)$ *utilizando solamente* a PT^*_{4x1} y al $TRF\,(x_0, y_0)$ mediante E_{4xm}.

Incorporando (33) en (32) se tiene:

$$y - e = A\xi \quad , r(A) =: q < m < n \ , \ d =: 4 = m - q \, , e \sim (0, \sigma_0^2 P^{-1}) \tag{35}$$

$$E\xi = EE^T PT^*$$

$$AE^T = 0 \ , \ o(E) = 4xm \ , \ r(E) = 4$$

$$\Rightarrow R(A^T) \overset{\perp}{\oplus} R(E^T) = \Re^m$$

Teniendo en cuenta (18), la solución óptima $\hat{\xi}_{opt}$ a partir de (35) es:

$$\hat{\xi}_{opt} = (N + E^T QE)^{-1} c + E^T PT^* \tag{36}$$

Sí se define,

$$PT^*_{4x1} = 0_{4x1} \tag{37}$$

De acuerdo a (34):

$$\Rightarrow \qquad E\xi = 0_{4x1} \tag{38}$$

Incorporando (38) en (35), y de acuerdo a (19) se tiene:

$$y - e = A\xi \quad , r(A) =: q < m < n \ , d =: 4 = m - q \, , e \sim (0, \sigma_0^2 P^{-1}) \tag{39}$$

$$E\xi = 0_{4x1}$$

$$AE^T = 0 \quad o(E) = 4xm \ , \ r(E) = 4$$

$$\Rightarrow R(A^T) \overset{\perp}{\oplus} R(E^T) = \Re^m$$

La solución $\hat{\xi}_{ml}$ obtenida de (39) es de acuerdo a (20): $\hat{\xi}_{ml} = (N + E^T QE)^{-1} c = N^+ c$, y debido a (38):

$$E\hat{\xi}_{ml} = 0_{4x1} \tag{40}$$

como:

$$\hat{\xi}_{ml} = \hat{X}_{ml} - X_0 \tag{41}$$

según (40):

$$\Rightarrow \qquad E(\hat{X}_{ml} - X_0) = 0_{4x1} \tag{42}$$

según (34) y (41):

$$E(\hat{X}_{ml} - X_0) = EE^T PT^* \tag{43}$$

según (37) y (42):

$$\Rightarrow \qquad (EE^T)^{-1} E(\hat{X}_{ml} - X_0) = 0_{4x1} \tag{44}$$

Las restricciones óptimas mínimas de datum (42) y (44) vinculadas a los cuatro parámetros de transformación $PT^*_{4x1} = 0_{4x1}$ y al proyector $(EE^T)^{-1}E$ muestran que el vector solución MINOLESS $\hat{X}_{ml}$ está expresado en el *mismo* TRF que X_0.

4 EJEMPLO

Consideremos una trilateración bidimensional formada por "k=6" puntos P_i con coordenadas (x_i, y_i), $i = 1...6$ en el $TRS(x,y)$, y conectados los puntos mediante "n=15" distancias observadas s_{ij}^{obs} (entre P_i y P_j, con $i < j$, $i = 1...6$; $j = 2...6$, ver Tabla 1), y no estando *definida* para ninguna época la posición y orientación del $TRS(x,y)$.

Además, consideremos disponibles las coordenadas (x_i^0, y_i^0), $i = 1...6$ de un marco de referencia "a priori" ó aproximado: $TRF\,(x_0, y_0)$ (ver Tabla 2).

s_{ij}^{obs}	Distancia observada (m)	s_{ij}^{obs}	Distancia observada (m)
s_{12}	3909.689	s_{26}	6049.851
s_{13}	6689.716	s_{34}	3303.415
s_{14}	6378.095	s_{35}	3200.381
s_{15}	3801.321	s_{36}	6834.644
s_{16}	4899.990	s_{45}	2823.129
s_{23}	3108.161	s_{46}	4201.184
s_{24}	4534.929	s_{56}	4110.973
s_{25}	2084.621		

Tabla 1: Distancias observadas en una trilateración bidimensional de seis puntos.

Pto.	$x^0(m)$	$y^0(m)$
1	0	0
2	275	3900
3	2250	6300
4	4800	4200
5	2200	3100
6	4900	0

Tabla 2: Coordenadas de P_i de una trilateración bidimensional procedentes del $TRF\,(x_0, y_0)$

Para compensar, utilizamos el método de mínimos cuadrados en el modelo singular de Gauss-Markov (SGMM) dado en (1):

$$y-e=A\xi \quad , \ r(A)=:9<12<15 \ , \ d=:3=12-9 \, , \ e\sim(0,\sigma_0^2 I_{15x15}=:D\{y\}) \tag{45}$$

$y_{15x1}=$ vector de las observaciones (incrementos)

$y_{15x1}=\left[(s_{12}^{obs}-s_{12}^{0}),(s_{13}^{obs}-s_{13}^{0}),\ldots,(s_{ij}^{obs}-s_{ij}^{0}),\ldots,(s_{56}^{obs}-s_{56}^{o})\right]^T$

$s_{ij}^0=\sqrt{(\Delta x_{ij}^0)^2+(\Delta y_{ij}^0)^2}$

$\Delta x_{ij}^0=x_j^0-x_i^0 \ ; \ \Delta y_{ij}^0=y_j^0-y_i^0$

$$A_{15x12}=\begin{bmatrix}\alpha_{12}\\ \cdots\\ \alpha_{ij}\\ \cdots\\ \alpha_{56}\end{bmatrix} \ ; \ \alpha_{ij}=[0,\ldots,-\Delta x_{ij}^0,-\Delta y_{ij}^0,\ldots,\Delta x_{ij}^0,\Delta y_{ij}^0,\ldots,0].(1/s_{ij}^0)$$

$\xi_{12x1}=[dx_1,dy_1\ldots dx_6,dy_6]^T \ ; \ dx_i=x_i-x_i^0 \ ; \ dy_i=y_i-y_i^0 \, , \ m=2k=12$

$\xi_{12x1}=X_{12x1}-X_{12x1}^0$

$X_{12x1}=$ Vector de coordenadas (parámetros) incógnitas de P_i en el $TRS(x,y)$

$X_{12x1}=[x_1,y_1\ldots x_6,y_6]^T$

$X_{12x1}^0=$ Vector de coordenadas de P_i del disponible $TRF\,(x_0,y_0)$

$X_{12x1}^0=[x_1^0,y_1^0\ldots x_6^0,y_6^0]^T$

$I_{15x15}=$ Matriz Identidad

La deficiencia de rango ó número de defectos de datum $d=:3=m-q$ nos muestra que para definir el origen y la orientación del TRS es necesario introducir tres parámetros adicionales.

Esto puede ser realizado mediante la aplicación del modelo (35):

$$y-e=A\xi \quad , \ r(A)=:9<12<15 \ , \ d=:3=12-9 \, , \ e\sim(0,\sigma_0^2 I_{15x15}=:D\{y\}) \tag{46}$$

$$E\xi=EE^T PT^*$$

$$AE^T=0 \ , \ o(E)=3x12 \ , \ r(E)=3$$

$$\Rightarrow R(A^T)\overset{\perp}{\oplus}R(E^T)=\Re^{12}$$

Con:

$$E_{3x12}=\begin{bmatrix}1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0\\ 0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1\\ -y_1^0&x_1^0&-y_2^0&x_2^0&-y_3^0&x_3^0&-y_4^0&x_4^0&-y_5^0&x_5^0&-y_6^0&x_6^0\end{bmatrix} \tag{47}$$

$$PT^*=[t_x^*,t_y^*,d\delta^*]^T \tag{48}$$

Como se explico en (34), la ecuación $E\xi=EE^T PT^*$ en (46) muestra en forma explícita cómo las restricciones óptimas mínimas de datum pueden *definir y realizar* para una dada época, la posición, orientación y escala del $TRS(x,y)$ *utilizando solamente* a PT^{*}_{3x1} de (48) y al $TRF\,(x_0, y_0)$ disponible de la Tabla 2 mediante E_{3x12} de (47).

En la tabla 3 se muestran los resultados obtenidos para la norma y la traza de la matriz de dispersión de soluciones óptimas $\hat{\xi}_{opt}$ (incluyendo la MINOLESS $\hat{\xi}_{ml}$ para $PT^{*}_{3x1} = 0_{3x1}$) correspondientes a un conjunto de valores para PT^{*}_{3x1} de (48).

PT^{*}	$EE^{T}PT^{*}$	$\hat{\xi}^{T}_{opt}\hat{\xi}_{opt}\,(m^2)$	$tr\{D\{\hat{\xi}_{opt}\}\}\,(10^{-4}m^2)$
$\begin{bmatrix} 1\,m \\ 1\,m \\ 0.5'' \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ -2737.6 \end{bmatrix}$	11.9861	3.7
$\begin{bmatrix} 0.5\,m \\ 0.5\,m \\ 0.1'' \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ -1470 \end{bmatrix}$	2.9987	3.7
$\begin{bmatrix} 0.01\,m \\ 0.01\,m \\ 0.01'' \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.06 \\ 0.06 \\ -24 \end{bmatrix}$	0.0014	3.7
$\begin{bmatrix} 0\,m \\ 0\,m \\ 0'' \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	0.0002	3.7

Tabla 3: Norma $\left\|\hat{\xi}_{opt}\right\| = \hat{\xi}^{T}_{opt}\hat{\xi}_{opt}$ y traza de la matriz de dispersión $tr\{D\{\hat{\xi}_{opt}\}\}$ de soluciones óptimas $\hat{\xi}_{opt} = (N + E^{T}E)^{-1}c + E^{T}PT^{*}$ correspondientes a un conjunto de valores para PT^{*}_{3x1}, $(Q_{3x3} = I_{3x3})$, I_3 : Matriz Identidad.

4 CONCLUSIONES

En el Modelo Singular (con defecto de datum) de Gauss-Markov para la compensación por mínimos cuadrados de una red geodésica libre bidimensional, se mostro en forma explícita:

a) Cómo las restricciones *mínimas* de datum $K_{4xm}\xi_{mx1} = x_{0\,4x1}$ pueden *definir* y *realizar* para una dada época la posición, orientación y escala del $TRS(x,y)$ *utilizando* PT^{*}_{4x1} y las coordenadas del marco $TRF\,(x_0, y_0)$ mediante E_{4xm}.

b) Cómo las *restricciones óptimas mínimas* de datum pueden *definir y realizar* para una dada época, la posición, orientación y escala del $TRS(x,y)$ *utilizando solamente* a PT^{*}_{4x1} y al $TRF\,(x_0, y_0)$ mediante E_{4xm}.

Las restricciones óptimas mínimas de datum $E(\hat{X}_{ml} - X_0) = 0_{4x1}$ y $(EE^{T})^{-1}E(\hat{X}_{ml} - X_0) = 0_{4x1}$ vinculadas a los cuatro parámetros de transformación $PT^{*}_{4x1} = 0_{4x1}$ y al proyector $(EE^{T})^{-1}E$ muestran que el vector solución MINOLESS $\hat{X}_{ml}$ está expresado en el *mismo* TRF que X_0.

5 REFERENCIAS

Altamimi, Z., Sillard, P., y Boucher, C., ITRF2000: A new release of the International Terrestrial Reference Frame for earth science applications. *Journal of Geophysical Research*, Vol. 107, No. B10, 2214, pp.1-19,2002.

Grafarend, E.W. y Schaffrin, B., *Ausgleichungs-Rechnung in Linearen Modellen*. ISBN 3-411-16381-X, Mannheim, Germany 1:483, 1993.

Jekeli, C., *Geometric Reference Systems in Geodesy*. Division of Geodesy and Geospatial Science. School of Earth Sciences. Ohio State University, 2006.

McCarthy, D., y Petit, G., IERS Conventions (2003). *IERS Technical Note No.32*. Verlag des Bundesants fur katographie und Geodasie. Frankfurt and Maim, pp.1-127,2004.

National Aeronautics and Space Administration (NASA), *Integrated Program for solid Earth Science*. Space geodetic networks and the International Terrestrial Reference Frame (ITRF). Solid Earth Science Working Group (SESWG).,2008. (http://solidearth.jpl.nasa.gov/PAGES/pr_obs06.html).

Schaffrin, B., Aspects of Network Design. En: Grafarend, E.W. y Sanso, F., *Optimization and Design of Geodetic Networks.* Springer-Verlag. ISBN: 3-540-15739-5.Section D, 74:122, 1985.