

## UNA FORMULACIÓN VARIACIONAL PARA EL ANÁLISIS DINÁMICO DE PLACAS TRAPECIALES

**María V. Quintana, Liz G. Nallim**

*ICMASA - INIQUI - Facultad de Ingeniería - Universidad Nacional de Salta, Av. Bolivia 5150, 4400  
Salta, Argentina, [virginiaquintana@argentina.com](mailto:virginiaquintana@argentina.com), [lnallim@unsa.edu.ar](mailto:lnallim@unsa.edu.ar)*

**Palabras claves:** Placas trapeciales, Vibración, Reissner-Mindlin, Ritz-Galerkin, Vínculos Elásticos

**Resumen.** En este trabajo se presenta una formulación variacional general para la determinación de frecuencias naturales y formas modales de vibración libre de placas isótropas trapeciales de espesor variable. El análisis se lleva a cabo utilizando la teoría de Reissner-Mindlin, la cual incluye los efectos de la inercia rotatoria y de las deformaciones cortantes transversales. De esta manera es posible obtener mayor precisión en la determinación de los coeficientes de frecuencia correspondientes a los modos superiores de vibración aún para el caso de placas delgadas.

Las ecuaciones gobernantes se obtienen a través de la aplicación del método de Ritz-Galerkin. Para aproximar la geometría de la placa se utilizan coordenadas triangulares, mientras que los desplazamientos y rotaciones son aproximados con conjuntos de polinomios independientes expresados en estas coordenadas triangulares. El algoritmo desarrollado permite obtener soluciones analíticas aproximadas para placas con distinta relación de aspecto, variación de espesor y condiciones de contorno, incluyendo restricciones elásticas traslacionales y rotacionales.

El algoritmo es sencillo de programar, numéricamente estable y tiene la capacidad de tratar de manera uniforme todas las posibles combinaciones de condiciones de contorno. Placas de forma triangular pueden generarse como caso particular. Por otra parte, la solución analítica obtenida permite expresar la respuesta dinámica en función de los distintos parámetros involucrados. En particular, es posible expresar la ecuación de frecuencias en función, por ejemplo, de los parámetros que definen la variación de espesor  $y$ , de esta manera, tener una base para el diseño óptimo de estos elementos estructurales.

## 1 INTRODUCCIÓN

Las placas trapeciales de espesor variable se utilizan comúnmente como componentes estructurales en diversas aplicaciones tecnológicas, industriales y en numerosas ramas de la ingeniería, tales como mecánica, aeroespacial, electrónica, óptica, estructural, etc. En muchos casos, para estos componentes estructurales, la rápida y eficiente determinación de las frecuencias naturales de vibración y sus formas modales asociadas es fundamental en el diseño y evaluación del desempeño de un sistema mecánico. Más aún, las frecuencias de resonancias de estas placas y sus formas modales se utilizan para establecer la respuesta dinámica de complejos sistemas de ingeniería.

Los trabajos publicados respecto a la vibración de este tipo de placas están basados, en su mayoría, en la teoría de placas delgadas. Consideran, en general, placas de forma rectangular, espesor constante y condiciones de apoyo clásicas. Una excelente fuente de referencias la constituyen los trabajos de Leissa (1969, 1973, 1977, 1978, 1981a,b, 1987a,b). La teoría de placas delgadas desprecia los efectos de la deformación por corte y de la inercia rotatoria y esto conduce a resultados que sobrestiman las frecuencias de vibración. Este error es mayor cuando se incrementa el espesor de la placa. La alternativa más simple para considerar los efectos mencionados es el uso de la teoría de deformación por corte de primer orden para placas moderadamente gruesas, propuesta por Reissner (1945) y Mindlin (1951), en la cual se incorpora el efecto de la inercia rotatoria. Además, esta teoría requiere el uso de un factor de corrección para compensar el error resultante de la aproximación hecha respecto a la distribución no uniforme de deformaciones y tensiones cortantes.

Liew et al. (1995) presenta una revisión de los trabajos realizados sobre vibración de placas gruesas que utilizan, fundamentalmente, la teoría de primer orden. El estudio de placas gruesas de forma diferente a la rectangular mediante métodos analíticos aproximados presenta la dificultad de la construcción de simples y adecuadas funciones de aproximación que puedan aplicarse al dominio entero de la placa. Cuando estas placas tienen, además, restricciones elásticas en sus bordes, la estructura matemática de las condiciones de contorno se torna compleja dificultando la generación de tales funciones de aproximación. Para superar esta dificultad se desarrollaron y perfeccionaron diferentes técnicas. Karunasena et al. (1996) emplearon el método de Rayleigh–Ritz pb-2 para el análisis de vibración libre de placas triangulares Mindlin en voladizo. Posteriormente, Karunasena y Kitipornchai (1997) extendieron la metodología anterior a diferentes combinaciones de condiciones de contorno clásicas. Wu y Liu (2005) emplearon el método de la cubatura diferencial para el análisis de placas gruesas de forma arbitraria. Zhong (2000) analizó también la vibración libre de placas triangulares mediante el método de la cuadratura diferencial triangular.

La presencia de vínculos elásticos en el contorno de placas gruesas fue considerada por algunos autores, aunque sólo para el caso de placas de forma rectangular (Zhou, 2001; Malekzadeh y Shahpari, 2005; Xiang et al., 1997; Gorman, 1997).

De acuerdo a lo expresado en los párrafos anteriores, el objetivo de este trabajo es proponer un algoritmo general que permita la obtención de soluciones analíticas aproximadas para el estudio de la vibración libre de placas de formas trapeciales y triangulares gruesas, de espesor variable y con bordes elásticamente restringidos a rotación y traslación. Para ello, se presenta una metodología desarrollada en base a una extensión y generalización de un trabajo previo (Nallim et al., 2002), el cual fue formulado en base a las hipótesis de Kirchhoff para placas delgadas. El procedimiento se basa en el método de Ritz–Galerkin y engloba dos aspectos. El primero es la aproximación de la geometría de la placa mediante coordenadas triangulares y el segundo la aproximación de las componentes del campo de desplazamientos con polinomios simples de generación automática a partir de un polinomio base.

2 ANÁLISIS

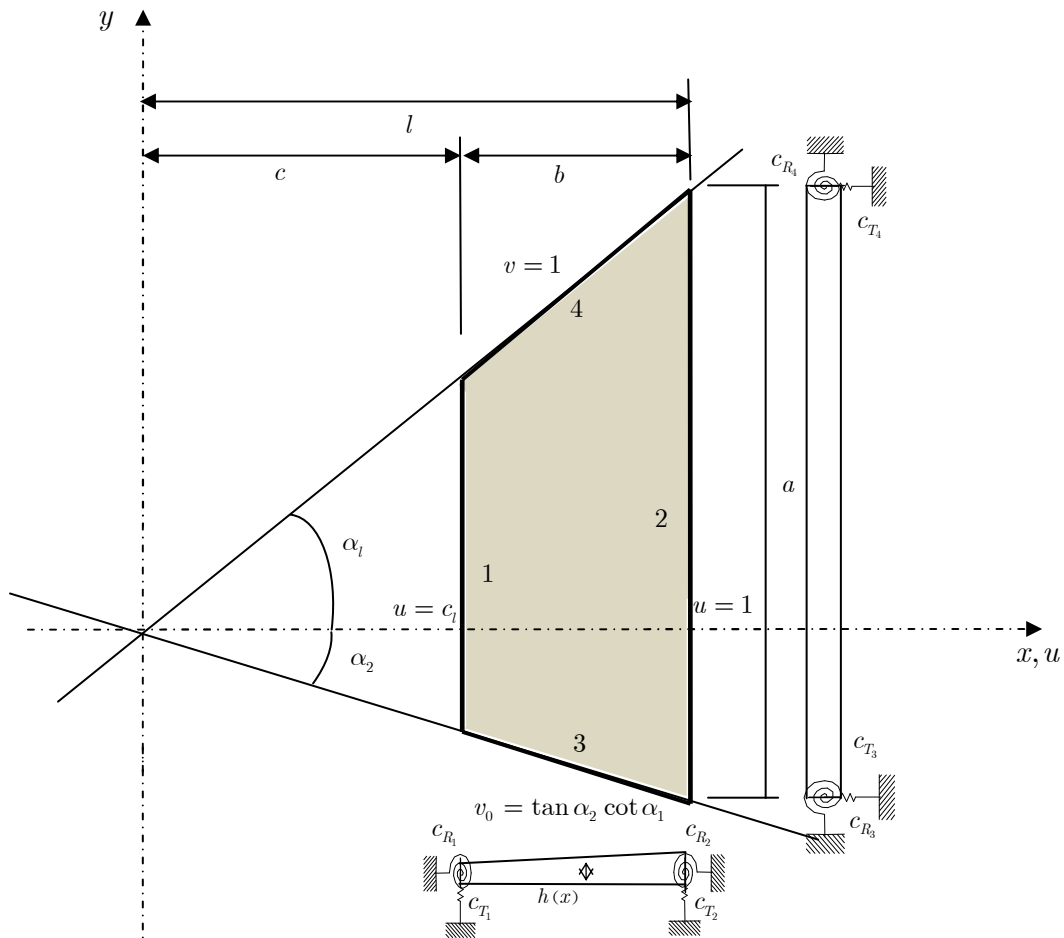


Figura 1. Descripción general de la geometría de la placa trapecoidal.

El esquema general de la placa isótropa de espesor variable analizada se muestra en la Figura 1. Teniendo en cuenta las hipótesis de la teoría de primer orden (Reissner, 1945; Mindlin, 1951) la máxima energía cinética de la placa ejecutando vibraciones libres, se puede expresar en coordenadas cartesianas rectangulares por

$$T_{\max} = \frac{1}{2} \rho \omega^2 \int_A h(x) \left[ W^2 + \frac{h^2(x)}{12} (\phi_x^2 + \phi_y^2) \right] dA \quad (1)$$

donde  $\rho$  es la densidad de masa del material de la placa,  $h(x)$  es el espesor no uniforme de la placa,  $\omega$  es la frecuencia circular,  $W(x, y)$  es la amplitud de desplazamiento transversal de la placa,  $\phi_y$  y  $\phi_x$  son las rotaciones de la sección transversal en las direcciones  $x$  e  $y$  respectivamente y la integración se realiza sobre el dominio  $A$  de la placa.

En este trabajo se considera que el espesor de la placa varía linealmente (Nallim et al., 2002):

$$h(x) = h^{(1)} f(x), \quad (2)$$

$$f(x) = \left[ 1 + c_h \left( \frac{x}{l} - c_l \right) \right], \quad (3)$$

donde  $h^{(1)}$  es el valor de  $h$  en el borde 1 de la placa (Fig.1).

La máxima energía de deformación del sistema mecánico está dada por

$$U_{\max} = U_{P,\max} + U_{R,\max} + U_{T,\max} \quad (4)$$

donde  $U_{P,\max}$  es la máxima energía de deformación debida a la flexión de la placa y está dada por

$$U_{P,\max} = \frac{1}{2} \int_A \left\{ D(x) \left[ \left( \frac{\partial \phi_x}{\partial x} + \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \right)^2 - 2(1-\mu) \left[ \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \frac{\partial \phi_y}{\partial y} - \frac{1}{4} \left( \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right)^2 \right] \right\} + kGh(x) \left[ \left( \phi_x + \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 + \left( \phi_y + \frac{\partial W}{\partial y} \right)^2 \right] dA \quad (5)$$

donde  $k$  es el factor de corrección por corte,  $G$  el módulo de corte y  $D(x)$  es la rigidez flexional dada por  $D(x) = D^{(1)} f^3(x)$ ,  $D^{(1)} = \frac{E(h^{(1)})^3}{12(1-\mu^2)}$ , en la cual  $E$  es el módulo de Young y  $\mu$  el coeficiente de Poisson.

La máxima energía de deformación de los resortes traslacionales y rotacionales ubicados en los bordes de la placa están dadas, respectivamente, por:

$$U_{T,\max} = \frac{1}{2} \oint_{\partial A} c_T(s) W^2 ds = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 \int_0^{l_i} c_{T_i} W^2 ds, \quad (6)$$

$$U_{R,\max} = \frac{1}{2} \oint_{\partial A} c_R(s) \phi_n^2 ds = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 \int_0^{l_i} c_{R_i} \phi_{ni}^2 ds, \quad (7)$$

donde  $\phi_n$  denota el giro de la sección transversal alrededor de la coordenada  $s$  y  $l_i$  la longitud del lado  $\partial A_i$  ( $i = 1, \dots, 4$ ).

## 2.1 Coordenadas triangulares no ortogonales.

La relación entre las coordenadas cartesianas rectangulares y las coordenadas triangulares utilizadas para definir de manera unificada la geometría del plano medio de la placa (ver Fig. 1) está dada por las siguientes expresiones:

$$u = \frac{x}{l}, \quad v = \frac{y}{x} \cot \alpha_1 \quad (8)$$

donde  $\tan \alpha_1$  es la pendiente del lado superior de la placa.

La relación entre las derivadas parciales en ambos sistemas de coordenadas está dada por:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial(\cdot)}{\partial x} \\ \frac{\partial(\cdot)}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{l} & -\frac{v}{ul} \\ 0 & \frac{1}{ul \tan \alpha_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial(\cdot)}{\partial u} \\ \frac{\partial(\cdot)}{\partial v} \end{bmatrix} \quad (9)$$

La máxima energía cinética y la máxima energía de deformación debida a la flexión se pueden expresar ahora en función de las coordenadas triangulares, reemplazando las ecs. (8) y (9) en las ecs. (1) y (4) se tiene:

$$\tilde{T}_{\max} = \frac{\rho h^{(1)} l^4 \tan \alpha_1}{2} \omega^2 \int_0^1 \int_{v_0}^1 \left[ \tilde{f}(u) u \tilde{W}^2 + \frac{\tilde{f}^3(u)}{12} u h_l^2 (\phi_x^2 + \phi_y^2) \right] dudv \quad (10)$$

donde  $\tilde{W} = \tilde{W}(u, v) = W(x, y) / l$ ,  $dudv = dxdy / (ul^2 \tan \alpha_1)$  y  $\tilde{f}(u) = [1 + c_h (u - c_l)]$ .

$$\begin{aligned} \tilde{U}_{P, \max} = & \frac{D^{(1)} \tan \alpha_1}{2} \int_0^1 \int_{v_0}^1 \left\{ \tilde{f}^3(u) \left[ u \left( \frac{\partial \phi_x}{\partial u} \right)^2 + \frac{2v^2 \tan^2 \alpha_1 + 1 - \mu}{2u \tan^2 \alpha_1} \left( \frac{\partial \phi_x}{\partial v} \right)^2 + \right. \right. \\ & + \frac{(1 - \mu) u}{2} \left( \frac{\partial \phi_y}{\partial u} \right)^2 + \frac{2 + (1 - \mu) v^2 \tan^2 \alpha_1}{2u \tan^2 \alpha_1} \left( \frac{\partial \phi_y}{\partial v} \right)^2 - 2v \frac{\partial \phi_x}{\partial u} \frac{\partial \phi_x}{\partial v} + \\ & + \frac{2\mu}{\tan \alpha} \frac{\partial \phi_x}{\partial u} \frac{\partial \phi_y}{\partial v} - \frac{v(1 + \mu)}{u \tan \alpha} \frac{\partial \phi_x}{\partial v} \frac{\partial \phi_y}{\partial v} + \frac{1 - \mu}{\tan \alpha} \frac{\partial \phi_y}{\partial u} \frac{\partial \phi_x}{\partial v} - v(1 - \mu) \frac{\partial \phi_y}{\partial u} \frac{\partial \phi_y}{\partial v} \left. \right\} + \quad (11) \\ & + \gamma \tilde{f}(u) \left[ u (\phi_x)^2 + u (\phi_y)^2 + u \left( \frac{\partial \tilde{W}}{\partial u} \right)^2 + \frac{v^2 \tan^2 \alpha_1 + 1}{u \tan^2 \alpha_1} \left( \frac{\partial \tilde{W}}{\partial v} \right)^2 + \right. \\ & \left. + 2u \frac{\partial \tilde{W}}{\partial u} \phi_x - 2v \frac{\partial \tilde{W}}{\partial v} \phi_x - 2v \frac{\partial \tilde{W}}{\partial u} \frac{\partial \tilde{W}}{\partial v} + \frac{2}{\tan \alpha} \frac{\partial \tilde{W}}{\partial v} \phi_y \right] \Big\} dudv \end{aligned}$$

donde  $\gamma = \frac{kGh^{(1)}l^2}{D^{(1)}} = \frac{6k(1 - \mu)}{h_l^2}$  con  $h_l = \frac{h^{(1)}}{l}$ .

La máxima energía de deformación almacenada en los resortes traslacionales puede ser expresada ahora en función de las coordenadas triangulares reemplazando las ecs. (8) en la ec.(6):

$$\begin{aligned} \tilde{U}_{T, \max} = & \frac{D^{(1)} \tan \alpha_1}{2} \left( c_l T_1 \int_{v_0}^1 W^2 \Big|_{u=c_l} dv + T_2 \int_{v_0}^1 W^2 \Big|_{u=1} dv + \right. \\ & \left. \frac{T_3}{\tan \alpha_1 \cos \alpha_2} \int_{c_l}^1 W^2 \Big|_{v=v_0} du + \frac{T_4}{\text{sen} \alpha_1} \int_{c_l}^1 W^2 \Big|_{v=1} du \right) \quad (12) \end{aligned}$$

donde  $T_i = \frac{c_i l^3}{D^{(1)}}$ .

Finalmente la máxima energía de deformación almacenada en los resortes rotacionales puede ser expresada ahora en función de las coordenadas triangulares reemplazando las ecs. (8) en la ec. (7):

$$\begin{aligned} \tilde{U}_{R,\max} = & \frac{D^{(1)} \tan \alpha_1}{2} \left\{ c_1 R_1 \int_{v_0}^1 \phi_y^2 \Big|_{u=c_1} dv + R_2 \int_{v_0}^1 \phi_y^2 \Big|_{u=1} dv + R_3 \left( v_0 \text{sen} \alpha_2 \int_{c_1}^1 \phi_y^2 \Big|_{v=v_0} du + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\cos \alpha_2}{\tan \alpha_1} \int_{c_1}^1 \phi_x^2 \Big|_{v=v_0} du - 2 \frac{\text{sen} \alpha_2}{\tan \alpha_1} \int_{c_1}^1 \phi_y \phi_x \Big|_{v=v_0} du \right) + R_4 \left( \text{sen} \alpha_1 \int_{c_1}^1 \phi_y^2 \Big|_{v=1} du + \right. \\ & \left. \left. + \frac{\cos \alpha_1}{\tan \alpha_1} \int_{c_1}^1 \phi_x^2 \Big|_{v=1} du + 2 \cos \alpha_1 \int_{c_1}^1 \phi_y \phi_x \Big|_{v=1} du \right) \right\} \end{aligned} \quad (13)$$

donde  $R_i = \frac{c_{R_i} l}{D^{(1)}}$ .

## 2.2 Funciones de aproximación

La deflexión transversal y las rotaciones se expresan como productos de polinomios simples unidimensionales en cada una de las coordenadas triangulares, de la siguiente manera:

$$\tilde{W}(u, v) = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(\tilde{W})} p(u)_i^{(\tilde{W})} q(v)_j^{(\tilde{W})} \quad (14)$$

$$\phi_x(u, v) = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(\phi_x)} p(u)_i^{(\phi_x)} q(v)_j^{(\phi_x)} \quad (15)$$

$$\phi_y(u, v) = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(\phi_y)} p(u)_i^{(\phi_y)} q(v)_j^{(\phi_y)} \quad (16)$$

donde los  $c_{ij}^{(\tilde{W})}$ ,  $c_{ij}^{(\phi_x)}$  y  $c_{ij}^{(\phi_y)}$  son los coeficientes de ponderación desconocidos que se determinarán a través de la aplicación del método de Ritz – Galerkin.

Los conjuntos de polinomios  $\{p(u)_i^{(\tilde{W})}\}$ ,  $\{q(v)_j^{(\tilde{W})}\}$ ,  $\{p(u)_i^{(\phi_x)}\}$ ,  $\{q(v)_j^{(\phi_x)}\}$ ,  $\{p(u)_i^{(\phi_y)}\}$  y  $\{q(v)_j^{(\phi_y)}\}$ , se generan de manera automática a partir de polinomios base que se obtienen satisfaciendo las condiciones de borde esenciales correspondientes a la viga equivalente en cada coordenada triangular.

## 3 MÉTODO DE RITZ

La aplicación del método de Ritz requiere la minimización del siguiente funcional de energía:

$$\Pi = \bar{U}_{\max} - \bar{T}_{\max} \quad (17)$$

donde  $\bar{T}_{\max}$  y  $\bar{U}_{\max}$  están dados respectivamente por las ecs. (10) y (11)-(13).

Del proceso de minimización del funcional dado por la ec. (17), se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones lineales, expresado en forma matricial:

$$([K] - \Omega^2 [M]) \{\bar{c}\} = \{0\}, \quad (18)$$

donde  $\Omega$  es el parámetro adimensional de frecuencia dado por  $\Omega = \omega l^2 \sqrt{\frac{\rho h^{(1)}}{D^{(1)}}}$  y

$$[K] = \begin{bmatrix} [K^{\bar{W}\bar{W}}] & [K^{\bar{W}\phi_x}] & [K^{\bar{W}\phi_y}] \\ & [K^{\phi_x\phi_x}] & [K^{\phi_x\phi_y}] \\ \text{sim.} & & [K^{\phi_y\phi_y}] \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad [M] = \begin{bmatrix} [M^{\bar{W}\bar{W}}] & [0] & [0] \\ & [M^{\phi_x\phi_x}] & [0] \\ \text{sim.} & & [M^{\phi_y\phi_y}] \end{bmatrix} \quad (19)$$

Las expresiones de los distintos elementos de la matriz de rigidez  $[K]$  y de la matriz de masa  $[M]$  están dados por:

$$K_{ijmn}^{\bar{W}\bar{W}} = \int_0^1 \int_{v_0}^1 2\gamma \tilde{f}(u) \left( u \frac{\partial p_i^{(\bar{W})}}{\partial u} q_j^{(\bar{W})} \frac{\partial p_m^{(\bar{W})}}{\partial u} q_n^{(\bar{W})} + \frac{v^2 \tan^2 \alpha_1 + 1}{u \tan^2 \alpha_1} p_i^{(\bar{W})} \frac{\partial q_j^{(\bar{W})}}{\partial v} p_m^{(\bar{W})} \frac{\partial q_n^{(\bar{W})}}{\partial v} - v \left( \frac{\partial p_i^{(\bar{W})}}{\partial u} q_j^{(\bar{W})} p_m^{(\bar{W})} \frac{\partial q_n^{(\bar{W})}}{\partial v} + p_i^{(\bar{W})} \frac{\partial q_j^{(\bar{W})}}{\partial v} \frac{\partial p_m^{(\bar{W})}}{\partial u} q_n^{(\bar{W})} \right) \right) dudv + \quad (20)$$

$$+ 2c_i T_1 \int_{v_0}^1 \left( p_i^{(\bar{W})} q_j^{(\bar{W})} p_m^{(\bar{W})} q_n^{(\bar{W})} \right) \Big|_{u=c_i} dv + 2T_2 \int_{v_0}^1 \left( p_i^{(\bar{W})} q_j^{(\bar{W})} p_m^{(\bar{W})} q_n^{(\bar{W})} \right) \Big|_{u=1} dv + 2 \frac{T_3}{\tan \alpha_1 \cos \alpha_2} \int_{c_i}^1 \left( p_i^{(\bar{W})} q_j^{(\bar{W})} p_m^{(\bar{W})} q_n^{(\bar{W})} \right) \Big|_{v=v_0} du + 2 \frac{T_4}{\text{sen} \alpha_1} \int_{c_i}^1 \left( p_i^{(\bar{W})} q_j^{(\bar{W})} p_m^{(\bar{W})} q_n^{(\bar{W})} \right) \Big|_{v=1} du$$

$$K_{ijmn}^{\bar{W}\phi_x} = \int_0^1 \int_{v_0}^1 2\gamma \tilde{f}(u) \left\{ u \frac{\partial p_i^{(\bar{W})}}{\partial u} q_j^{(\bar{W})} p_m^{(\phi_x)} q_n^{(\phi_x)} - v p_i^{(\bar{W})} \frac{\partial q_j^{(\bar{W})}}{\partial v} p_m^{(\phi_x)} q_n^{(\phi_x)} \right\} dudv \quad (21)$$

$$K_{ijmn}^{\bar{W}\phi_y} = \int_0^1 \int_{v_0}^1 \gamma \tilde{f}(u) \frac{2}{\tan \alpha_1} p_i^{(\bar{W})} \frac{\partial q_j^{(\bar{W})}}{\partial v} p_m^{(\phi_y)} q_n^{(\phi_y)} dudv \quad (22)$$

$$K_{ijmn}^{\phi_x\phi_x} = \int_{c_i}^1 \int_{v_0}^1 \left\{ \tilde{f}^3(u) \left( \frac{2v^2 \tan^2 \alpha_1 + 1 - \mu}{u \tan^2 \alpha_1} p_i^{(\phi_x)} \frac{\partial q_j^{(\phi_x)}}{\partial v} p_m^{(\phi_x)} \frac{\partial q_n^{(\phi_x)}}{\partial v} + 2u \frac{\partial p_i^{(\phi_x)}}{\partial u} q_j^{(\phi_x)} \frac{\partial p_m^{(\phi_x)}}{\partial u} q_n^{(\phi_x)} - 2v \left( \frac{\partial p_i^{(\phi_x)}}{\partial u} q_j^{(\phi_x)} p_m^{(\phi_x)} \frac{\partial q_n^{(\phi_x)}}{\partial v} + p_i^{(\phi_x)} \frac{\partial q_j^{(\phi_x)}}{\partial v} \frac{\partial p_m^{(\phi_x)}}{\partial u} q_n^{(\phi_x)} \right) \right) \right\} + \quad (23)$$

$$+ 2\gamma \tilde{f}(u) u p_i^{(\phi_x)} q_j^{(\phi_x)} p_m^{(\phi_x)} q_n^{(\phi_x)} \Big\} dudv + 2 \frac{\cos \alpha_2}{\tan \alpha_1} R_3 \int_{c_i}^1 \left( p_i^{(\phi_x)} q_j^{(\phi_x)} p_m^{(\phi_x)} q_n^{(\phi_x)} \right) \Big|_{v=v_0} du +$$

$$+ 2 \frac{\cos \alpha_1}{\tan \alpha_1} R_4 \int_{c_i}^1 \left( p_i^{(\phi_x)} q_j^{(\phi_x)} p_m^{(\phi_x)} q_n^{(\phi_x)} \right) \Big|_{v=1} du$$

$$K_{ijmn}^{\phi_x\phi_y} = \int_0^1 \int_{v_0}^1 \left\{ \tilde{f}^3(u) \left( \frac{2\mu}{\tan \alpha_1} \frac{\partial p_i^{(\phi_x)}}{\partial u} q_j^{(\phi_x)} p_m^{(\phi_y)} \frac{\partial q_n^{(\phi_y)}}{\partial v} - \frac{v(1+\mu)}{u \tan \alpha_1} p_i^{(\phi_x)} \frac{\partial q_j^{(\phi_x)}}{\partial v} p_m^{(\phi_y)} \frac{\partial q_n^{(\phi_y)}}{\partial v} + \frac{v(1-\mu)}{\tan \alpha_1} p_i^{(\phi_x)} \frac{\partial q_j^{(\phi_x)}}{\partial v} \frac{\partial p_m^{(\phi_y)}}{\partial u} q_n^{(\phi_y)} \right) \right\} dudv - 2 \text{sen} \alpha_2 R_3 \int_{c_i}^1 \left( p_i^{(\phi_x)} q_j^{(\phi_x)} p_m^{(\phi_y)} q_n^{(\phi_y)} \right) \Big|_{v=v_0} du + \quad (24)$$

$$+ 2 \cos \alpha_1 R_4 \int_{c_i}^1 \left( p_i^{(\phi_x)} q_j^{(\phi_x)} p_m^{(\phi_y)} q_n^{(\phi_y)} \right) \Big|_{v=1} du$$

$$\begin{aligned}
K_{ijmn}^{\phi_y \phi_y} = & \int_{c_1}^1 \int_{v_0}^1 \left\{ \tilde{f}^3(u) \left( \frac{2 + (1 - \mu)v^2 \tan^2 \alpha_1}{u \tan^2 \alpha_1} p_i^{(\phi_y)} \frac{\partial q_j^{(\phi_y)}}{\partial v} p_m^{(\phi_y)} \frac{\partial q_n^{(\phi_y)}}{\partial v} + \right. \right. \\
& + u(1 - \mu) \frac{\partial p_i^{(\phi_y)}}{\partial u} q_j^{(\phi_y)} \frac{\partial p_m^{(\phi_y)}}{\partial u} q_n^{(\phi_y)} - v(1 - \mu) \left( \frac{\partial p_i^{(\phi_y)}}{\partial u} q_j^{(\phi_y)} p_m^{(\phi_y)} \frac{\partial q_n^{(\phi_y)}}{\partial v} + \right. \\
& \left. \left. p_i^{(\phi_y)} \frac{\partial q_j^{(\phi_y)}}{\partial v} \frac{\partial p_m^{(\phi_y)}}{\partial u} q_n^{(\phi_y)} \right) \right\} + 2\gamma \tilde{f}(u) u p_i^{(\phi_y)} q_j^{(\phi_y)} p_m^{(\phi_y)} q_n^{(\phi_y)} \left. \right\} dudv + \\
& + 2c_1 R_1 \int_{v_0}^1 \left( p_i^{(\phi_y)} q_j^{(\phi_y)} p_m^{(\phi_y)} q_n^{(\phi_y)} \right) \Big|_{u=c_1} dv + 2R_2 \int_{v_0}^1 \left( p_i^{(\phi_y)} q_j^{(\phi_y)} p_m^{(\phi_y)} q_n^{(\phi_y)} \right) \Big|_{u=1} dv + \\
& + 2v_0 \text{sen} \alpha_2 R_3 \int_{c_1}^1 \left( p_i^{(\phi_y)} q_j^{(\phi_y)} p_m^{(\phi_y)} q_n^{(\phi_y)} \right) \Big|_{v=v_0} du + 2 \text{sen} \alpha_1 R_4 \int_{c_1}^1 \left( p_i^{(\phi_y)} q_j^{(\phi_y)} p_m^{(\phi_y)} q_n^{(\phi_y)} \right) \Big|_{v=1} du
\end{aligned} \tag{25}$$

$$M_{ijmn}^{\bar{w} \bar{w}} = \int_0^1 \int_{v_0}^1 \tilde{f}(u) u p_i^{(\bar{w})} q_j^{(\bar{w})} p_m^{(\bar{w})} q_n^{(\bar{w})} dudv \tag{26}$$

$$M_{ijmn}^{\phi_x \phi_x} = \int_0^1 \int_{v_0}^1 \frac{\tilde{f}^3(u)}{6} u h_1^2 p_i^{(\phi_x)} q_j^{(\phi_x)} p_m^{(\phi_x)} q_n^{(\phi_x)} dudv \tag{27}$$

$$M_{ijmn}^{\phi_y \phi_y} = \int_0^1 \int_{v_0}^1 \frac{\tilde{f}^3(u)}{6} u h_1^2 p_i^{(\phi_y)} q_j^{(\phi_y)} p_m^{(\phi_y)} q_n^{(\phi_y)} dudv \tag{28}$$

## 4 RESULTADOS NUMÉRICOS

En esta sección se presentan resultados numéricos que permiten apreciar la variación del parámetro de frecuencia adimensional  $\Omega$  para distintas geometrías de placas trapeziales y para diferentes condiciones de apoyo perimetral. En los cálculos numéricos se trabajó con un factor de corrección por corte  $k$  de  $5/6$ , y se asume un valor de 0.3 para la relación de Poisson  $\mu$ .

Se introduce la siguiente terminología usada para describir las condiciones de borde. La designación C-S-F-S, por ejemplo, identifica una placa cuadrilátera con los bordes 1 empotrado, 2 simplemente apoyado, 3 libre y 4 simplemente apoyado (ver Figura 1). En los casos particulares donde la placa tiene forma triangular el borde 1 desaparece y la nomenclatura se inicia a partir del borde 2.

### 4.1 Estudio de estabilidad y convergencia

Polinomios simples fueron propuestos en la sección anterior como funciones de forma para la aplicación del método de Ritz – Galerkin en el análisis de placas gruesas. Para evaluar la precisión del método y de las funciones de formas propuestos se realizaron estudios de estabilidad y convergencia. La Tabla 1 muestra los cuatro primeros coeficientes de frecuencia adimensional  $\Omega / \pi^2 = \omega / \pi^2 l^2 \sqrt{\rho h^{(1)} / D^{(1)}}$  para placas triangulares F-C-F ( $\tan \alpha_1 = 0.5$ ,  $\tan \alpha_2 = 0$ ) moderadamente gruesas para dos relaciones de espesor  $h_1 = 0.05, 0.2$ . Con respecto al número de funciones de formas usadas en las aproximaciones, en esta tabla se observa que la convergencia es rápida y monótona decreciente en los dos casos estudiados. La comparación de los resultados con los proporcionados por Karunasena y Kitipornchai (1997) muestra que se puede obtener una precisión bastante satisfactoria usando un número bajo de polinomios en cada dirección.



$h_t$	$M \times N$	$\Omega_1 / \pi^2$	$\Omega_2 / \pi^2$	$\Omega_3 / \pi^2$	$\Omega_4 / \pi^2$
0.05	5x5	2.200	6.657	10.867	15.673
	6x6	2.192	5.888	10.730	14.319
	7x7	2.184	5.867	10.676	11.609
	8x8	2.181	5.791	10.663	11.503
	9x9	2.180	5.782	10.636	11.193
	10x10	2.180	5.778	10.629	11.178
	Karunasena and Kitipornchai (1997)	2.179	5.773	10.621	11.164
0.2	5x5	1.845	4.212	6.145	8.214
	6x6	1.843	3.995	6.090	7.521
	7x7	1.841	3.984	6.077	6.974
	8x8	1.841	3.974	6.074	6.930
	9x9	1.840	3.972	6.073	6.890
	10x10	1.840	3.970	6.072	6.889
	Karunasena and Kitipornchai (1997)	1.840	3.972	6.072	6.882

Tabla 1. Estudios de convergencia de los cuatro primeros valores del parámetro de frecuencia

$\Omega / \pi^2 = \omega / \pi^2 t^2 \sqrt{\rho h^{(1)} / D^{(1)}}$  de una placa triangular ( $\tan \alpha_1 = 0.5$ ,  $\tan \alpha_2 = 0$ ,  $c_l = 0$ ) de espesor uniforme ( $c_h = 0$ ) para dos relaciones  $h_t$ . Condiciones de borde: F-C-F.

## 4.2 Comparación de resultados

En esta sección se lleva a cabo comparaciones con los valores numéricos proporcionados por otros investigadores mediante la aplicación de otros métodos. La Tabla 2 muestra los valores del coeficiente de frecuencia  $\Omega / \pi^2$  para distintas placas triangulares de espesor uniforme, se consideran placas delgadas y placas relativamente gruesas con distintas condiciones de borde perimetrales. Se utilizaron nueve términos en las funciones aproximantes en cada una de las direcciones. Los valores obtenidos fueron comparados con los resultados dados por Karunasena and Kitipornchai (1997). La Tabla 3 muestra valores de los coeficientes de frecuencia adimensional

$$\lambda = \frac{\omega}{2\pi} l^2 (\tan \alpha_1 - \tan \alpha_2)^2 \sqrt{\rho h^{(1)} / D^{(1)}} = \frac{\omega}{2\pi} a^2 \sqrt{\rho h^{(1)} / D^{(1)}},$$

correspondientes a placas delgadas trapeciales con diferentes condiciones de borde y de espesor uniforme ( $h_t = 0.001$ ,  $c_h = 0$ ). Los valores obtenidos fueron comparados con los resultados proporcionados por Nallim et al. (2002). En todos los casos se observa coincidencia en los valores numéricos lo que indica la precisión que se puede lograr con la aplicación de la presente metodología.

Condiciones de Borde	$\tan \alpha_1$	$h_l$		$\Omega_1 / \pi^2$	$\Omega_2 / \pi^2$	$\Omega_3 / \pi^2$	$\Omega_4 / \pi^2$
CCC	1	0.001	Presente	9.504	16.033	19.788	24.955
			Karunasena and Kitipornchai (1997)	9.503	15.988	19.741	24.655
	2	0.001	Presente	5.416	8.386	11.639	12.478
			Karunasena and Kitipornchai (1997)	5.415	8.355	11.518	12.357
SSS	1	0.001	Presente	5.000	10.012	13.025	17.036
			Karunasena and Kitipornchai (1997)	5.000	9.999	13.000	17.005
	2	0.001	Presente	2.813	5.064	7.760	8.374
			Karunasena and Kitipornchai (1997)	2.813	5.054	7.569	8.241
FSC	0.5	0.001	Presente	9.217	18.284	26.703	30.564
			Karunasena and Kitipornchai (1997)	9.214	18.156	26.490	29.184
		0.2	Presente	5.286	8.402	11.243	11.810
			Karunasena and Kitipornchai (1997)	5.285	8.400	11.236	11.746
	1	0.001	Presente	3.220	7.379	9.575	13.600
			Karunasena and Kitipornchai (1997)	3.220	7.376	9.559	13.486
		0.2	Presente	2.428	4.813	5.562	7.527
			Karunasena and Kitipornchai (1997)	2.428	4.812	5.561	7.523
FCF	0.5	0.05	Presente	2.180	5.783	10.636	11.193
			Karunasena and Kitipornchai (1997)	2.179	5.773	10.621	11.164
		0.2	Presente	1.840	3.972	6.073	6.890
			Karunasena and Kitipornchai (1997)	1.840	3.972	6.072	6.882
	2	0.05	Presente	0.167	0.715	1.218	1.740
			Karunasena and Kitipornchai (1997)	0.167	0.715	1.216	1.739
		0.2	Presente	0.164	0.670	1.000	1.530
			Karunasena and Kitipornchai (1997)	0.164	0.670	1.000	1.530

Tabla 2. Valores de los parámetros de frecuencia adimensional  $\Omega/\pi^2 = \omega / \pi^2 l^2 \sqrt{\rho h^{(1)} / D^{(1)}}$  para placas triangulares de espesor uniforme ( $c_l = 0, \tan \alpha_2 = 0, c_h = 0$ ).

### 4.3 Resultados numéricos nuevos

En esta sección se presentan resultados numéricos que pueden servir como un suplemento a la base de dato existente sobre la vibración característica de placas trapeciales y triangulares moderadamente gruesas. Un gran número de problemas fueron resueltos y debido a que la cantidad de casos tratados es extensa sólo se presentan los resultados de algunos de ellos.

La Tabla 4 muestra los primeros coeficientes de frecuencia adimensional  $\lambda$  correspondientes a los cuatro primeros modos de vibración libre de placas trapeciales con diferentes ángulos  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$ . Se consideraron dos tipos de condiciones de borde: F-F-F-F y S-F-C-F y tres relaciones del parámetro geométrico  $h_l = 0.001, 0.05, 0.2$  y espesor uniforme.

$\tan \alpha_1$	$\tan \alpha_2$	$c_i$		$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$
Boundary Conditions: F-C-F-F							
0.5	-0.5	0	Presente	1.07	4.64	4.65	11.11
			Nallim et. al. (2002)	1.07	4.64	4.65	11.12
0.4	-0.4	0.2	Presente	0.82	3.53	3.88	9.19
			Nallim et. al. (2002)	0.82	3.53	3.88	9.18
0.3	-0.3	0.4	Presente	0.70	2.65	3.67	7.30
			Nallim et. al. (2002)	0.70	2.65	3.67	7.30
Boundary Conditions: C-F-C-C							
1	0	0	Presente	6.55	13.80	17.39	24.27
			Nallim et. al. (2002)	6.54	13.80	17.36	24.21
		0.2	Presente	6.54	13.80	17.37	24.25
			Nallim et. al. (2002)	6.54	13.80	17.35	24.18
1	-1	0	Presente	9.26	20.23	28.60	36.97
			Nallim et. al. (2002)	9.26	20.23	28.71	37.32
		0.2	Presente	9.29	20.23	29.28	37.39
			Nallim et. al. (2002)	9.29	20.23	29.41	37.71

Tabla 3. Valores de los parámetros de frecuencia adimensional  $\lambda = \omega / (2\pi) a^2 \sqrt{\rho h^{(1)} / D^{(1)}}$  para placas trapeciales con diferentes condiciones de borde y espesor uniforme ( $h_i = 0.001, c_h = 0$ ).

Las Figuras 2 y 3 muestran la variación del parámetro de frecuencia  $\lambda$  con respecto al parámetro  $c_h$  para los cuatro primeros modos de vibración libre de placas cuadriláteras ( $\tan \alpha_1 = 2, \tan \alpha_2 = -0.5$ ) para dos relaciones distintas de  $h_i$ . La condición de contorno es S-F-F-C y el parámetro geométrico es  $c_i = 0.2$ . En estas figuras se observa que la variación en la frecuencia con respecto al parámetro considerado es aproximadamente lineal para los 4 modos analizados. Es interesante notar que la pendiente de la curva se incrementa para los modos superiores de vibración.

Los primeros cuatro modos de vibración y parámetros nodales para una placa trapecial C-S-S-F con espesor uniforme y diferentes relaciones del parámetro  $h_i$  se muestran en las Figuras 4 y 5.

La Figura 6 muestra la variación del coeficiente de frecuencia  $\Omega/\pi^2$  para una placa triangular isósceles con todos sus bordes restringidos elásticamente a traslación.

$\tan \alpha_1$	$\tan \alpha_2$	$h_1$	$c_1$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$
Condiciones de borde: F-F-F-F							
0.5	-0.5	0.001	0	26.689	31.430	34.366	66.420
			0.2	31.632	34.167	34.758	76.131
			0.4	33.890	45.587	56.747	85.205
		0.05	0	26.129	30.431	33.440	63.944
			0.2	30.652	33.442	33.837	72.403
			0.4	32.795	33.095	55.172	80.176
		0.2	0	22.346	24.652	27.559	47.540
			0.2	25.016	27.237	28.375	50.327
			0.4	26.631	27.390	42.702	55.199
2	-1	0.001	0	36.867	76.484	111.513	145.051
			0.2	36.871	76.240	112.509	148.754
			0.4	35.324	76.153	118.542	152.423
		0.05	0	36.691	75.710	109.885	142.282
			0.2	36.695	75.540	110.617	145.865
			0.4	35.169	74.657	115.049	148.530
		0.2	0	35.384	70.175	97.425	123.771
			0.2	35.379	70.336	97.656	126.420
			0.4	33.987	69.891	98.664	131.238
Condiciones de borde: S-F-C-F							
0.5	-0.5	0.001	0	8.282	30.674	36.186	76.126
			0.2	8.318	32.168	36.270	83.749
			0.4	9.008	35.811	46.197	87.945
		0.05	0	8.200	29.779	35.129	72.384
			0.2	8.200	30.903	35.176	79.033
			0.4	8.806	34.595	44.236	83.029
		0.2	0	7.593	23.176	27.346	49.570
			0.2	7.529	23.876	27.399	53.223
			0.4	7.882	26.551	33.392	54.770
2	-1	0.001	0	10.925	45.023	78.309	114.282
			0.2	13.338	45.951	95.118	145.578
			0.4	19.288	49.340	113.784	185.325
		0.05	0	10.870	44.746	76.554	112.567
			0.2	12.927	45.423	92.050	137.552
			0.4	18.439	48.354	109.962	177.350
		0.2	0	10.673	42.504	66.209	99.875
			0.2	12.340	42.720	80.948	111.897
			0.4	17.397	44.651	99.359	141.996

Tabla 4. Valores de los parámetros de frecuencia  $\lambda = \omega / (2\pi) a^2 \sqrt{\rho h^{(1)} / D^{(1)}}$  de placas trapeciales completamente libres y espesor uniforme ( $c_h = 0$ ).

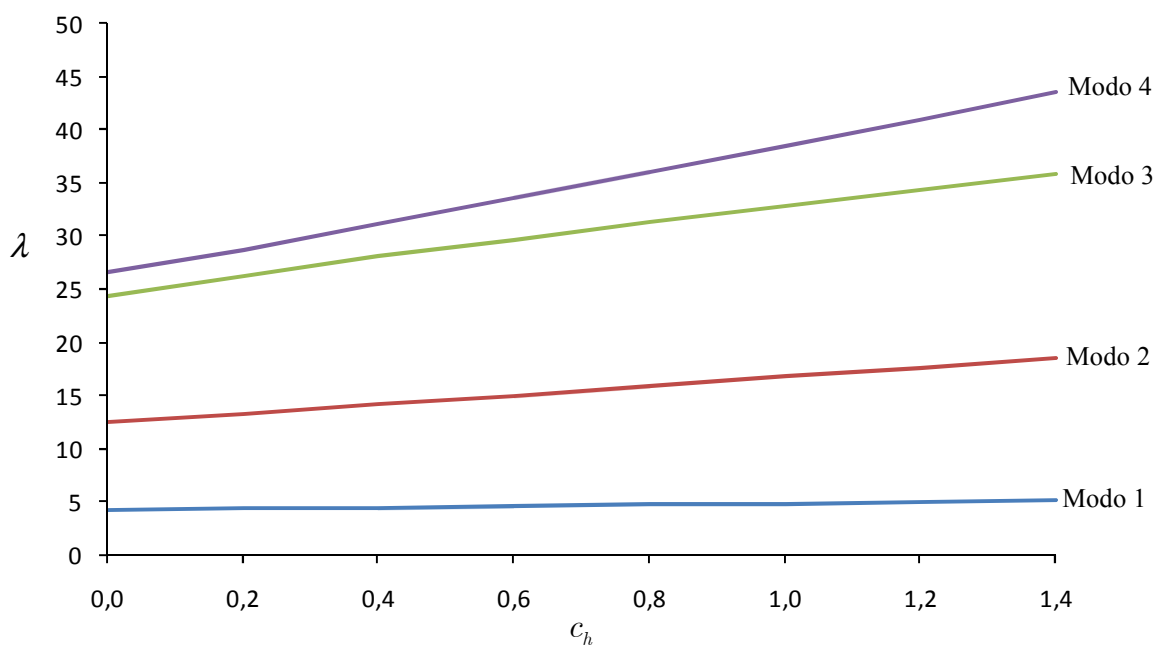


Figura 2. Variación de los cuatro primeros valores del parámetro de frecuencia  $\lambda = \omega / (2\pi) a^2 \sqrt{\rho h^{(1)} / D^{(1)}}$  con respecto al parámetro  $c_h$  en la vibración libre de una placa trapecial ( $\tan \alpha_1 = 2$ ,  $\tan \alpha_2 = -0.5$ ,  $c_l = 0.2$ ,  $h_l = 0.001$ ). Las condiciones de borde son S-F-F-C.

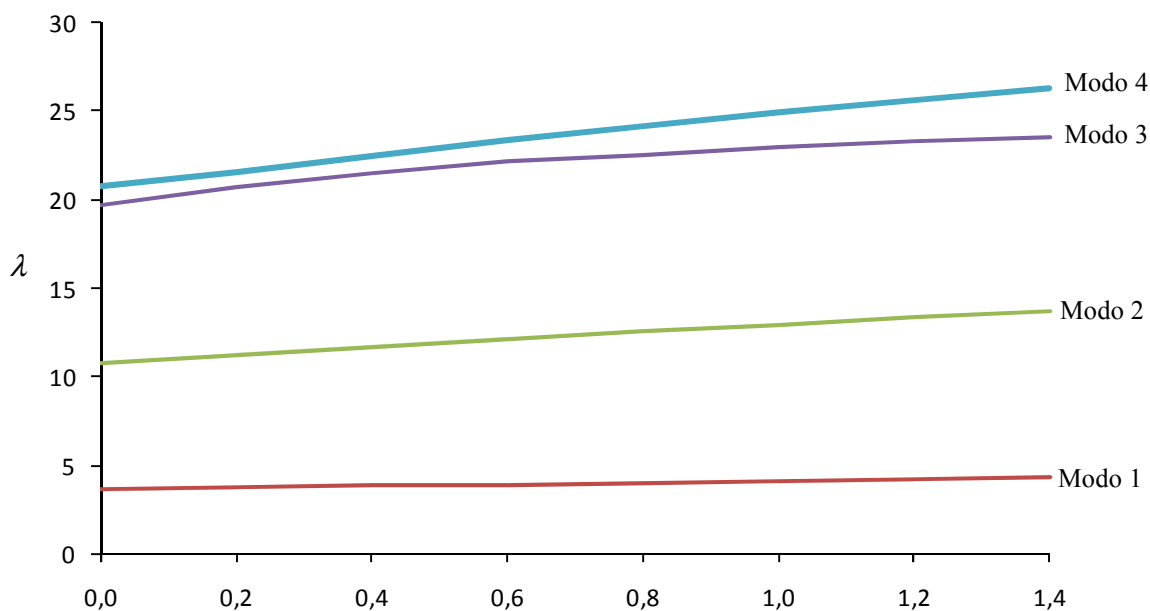


Figura 3. Variación de los cuatro primeros valores del parámetro de frecuencia  $\lambda = \omega / (2\pi) a^2 \sqrt{\rho h^{(1)} / D^{(1)}}$  con respecto al parámetro  $c_h$  en la vibración libre de una placa trapecial ( $\tan \alpha_1 = 2$ ,  $\tan \alpha_2 = -0.5$ ,  $c_l = 0.2$ ,  $h_l = 0.2$ ). Las condiciones de borde son S-F-F-C.

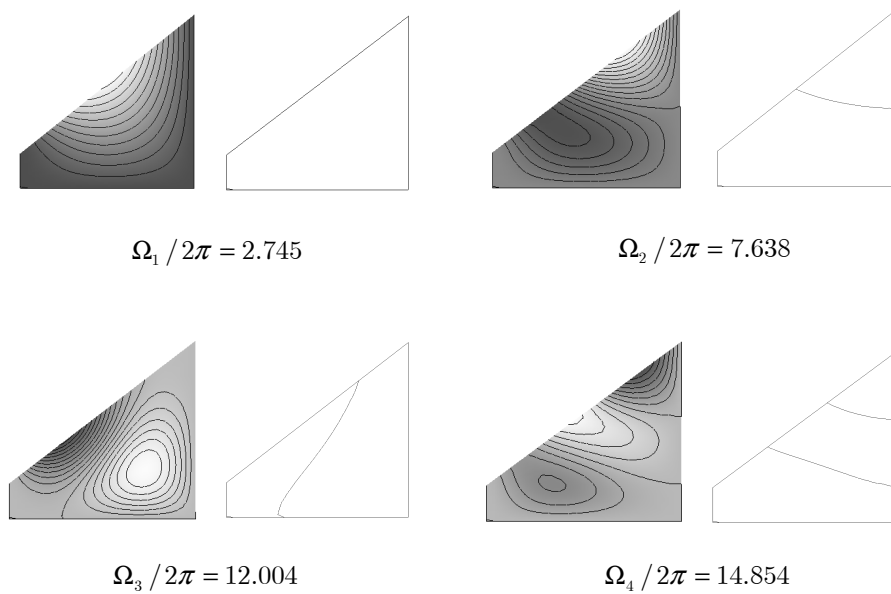


Figura 4. Formas modales y patrones nodales de una placa trapezoidal uniforme C-S-S-F con  $\tan \alpha_1 = 1$ ,  $\tan \alpha_2 = 0$ ,  $c_l = 0.2$ ,  $h_l = 0.001$  y  $c_h = 0$ .

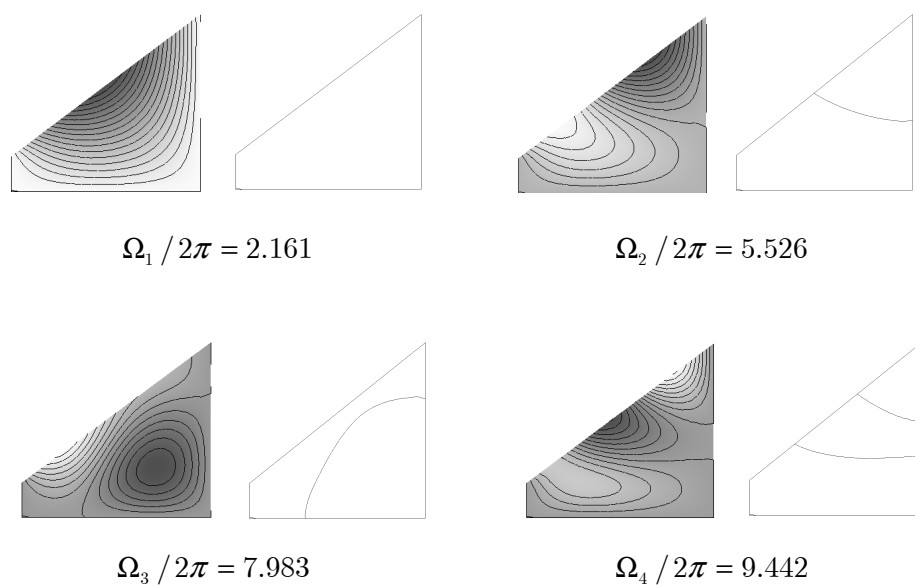


Figura 5. Formas modales y patrones nodales de una placa trapezoidal uniforme C-S-S-F con  $\tan \alpha_1 = 1$ ,  $\tan \alpha_2 = 0$ ,  $c_l = 0.2$ ,  $h_l = 0.2$  y  $c_h = 0$ .

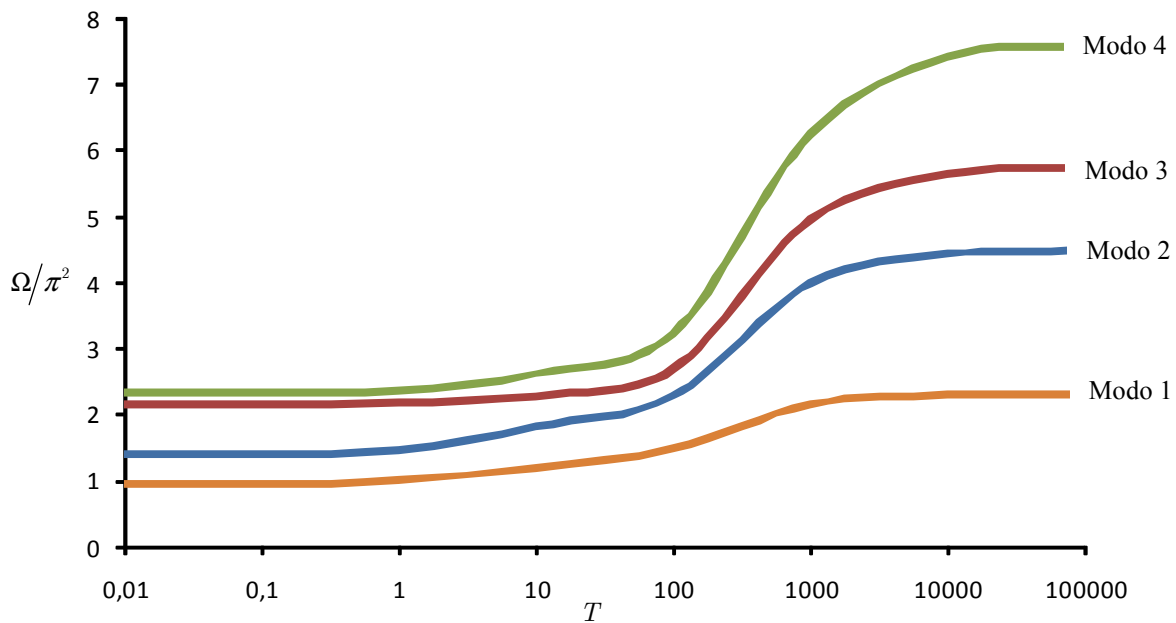


Figura 6. Variación de los cuatro primeros valores del parámetro de frecuencia  $\Omega/\pi^2 = \omega / \pi^2 l^2 \sqrt{\rho h^{(1)} / D^{(1)}}$  con respecto al parámetro de la restricción traslacional  $T = T_2 = T_3 = T_4$  para una placa triangular uniforme ( $\tan \alpha_1 = 1$ ,  $\tan \alpha_2 = -1$ ,  $c_l = 0$ ,  $h_l = 0.1$ ),  $R_2 = R_3 = R_4 = 0$ .

## 5 CONCLUSIONES

En este trabajo se propone una aproximación simple, computacionalmente eficiente y precisa para determinar los parámetros de frecuencias y las formas modales de la vibración libre de placas trapeciales y triangulares. La metodología se basa en el método de Ritz y en el uso de coordenadas triangulares no ortogonales para la aproximación de la geometría de la placa. El campo de desplazamientos se aproxima mediante conjuntos de polinomios simple que se generan automáticamente. El algoritmo desarrollado es muy general ya que permite el tratamiento unificado de placas gruesas con distintas formas geométricas, variación de espesor y condiciones de contorno, incluyendo bordes elásticamente restringidos a rotación y traslación. La solución obtenida tiene, además, la ventaja de ser una solución analítica (aunque aproximada), que permite apreciar de manera clara la forma en que los distintos parámetros mecánicos y geométricos influyen en la respuesta dinámica del sistema, lo que resulta especialmente atractivo en problemas de diseño y optimización. Finalmente, se destaca que el método propuesto puede ser fácilmente extendido para su aplicación al análisis estático y de estabilidad. También puede ser generalizado para estudiar placas trapeciales gruesas anisótropas.

### Agradecimientos

Este trabajo fue financiado por el Proyecto PICTO – UNSa N° 36690.

### REFERENCIAS

- Gorman, D. J. Accurate free vibration analysis of shear-deformable plates with torsional elastic edge support. *Journal of Sound and Vibration*, 203(2): 209-218, 1997.
- Karunasena, W. and Kitipornchai, S. Free vibration of shear-deformable general triangular plates. *Journal of Sound and Vibration*, 199(4): 595-613, 1997.

- Karunasena, W., Kitipornchai, S. and Al-bermani, F.G.A. Free vibration of cantilevered arbitrary triangular Mindlin plates. *International Journal of Mechanical Science*, 38(4): 431-442, 1996.
- Leissa, A. W. *Vibration of plates*. NASA SP-160, 1969.
- Leissa, A. W. The free vibration of rectangular plates. *Journal of Sound and Vibration*, 31, 257-293, 1973.
- Leissa, A.W. Recent research in plate vibrations: classical theory. *The Shock and Vibration Digest*, 9 (10), 13-24, 1977
- Leissa, A.W. Recent research in plate vibrations, 1973-1976: complicating effects. *The Shock and Vibration Digest*, 10 (12), 21-35, 1978.
- Leissa, A.W. Plate vibration research, 1976-1980: classical theory. *The Shock and Vibration Digest*, 13 (9), 11-22, 1981a.
- Leissa, A.W. Plate vibration research, 1976-1980: complicating effects. *The Shock and Vibration Digest*, 13 (10), 1981b.
- Leissa, A.W. Recent studies in plate vibrations, 1981-1985. Part I: classical theory. *The Shock and Vibration Digest*, 19 (2), 11-18, 1987a.
- Leissa, A.W. Recent studies in plate vibrations, 1981-1985. Part II: complicating effects. *The Shock and Vibration Digest*, 19 (3), 10-24, 1987b.
- Liew, K. M., Xiang, Y. and Kitipornchai, S. Research on thick plate vibration: A literature survey. *Journal of Sound and Vibration*, 180(1): 163-176, 1995.
- Malekzadeh, P. and Shahpari, S.A. Free vibration analysis of variable thickness thin and moderately thick plates with elastically restrained edges by DQM. *Thin-Walled Structures*, 43: 1037-1050, 2005.
- Mindlin, R.D. Influence rotatory inertia and shear in flexural motion of isotropic, elastic plates. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 18, 31-38 1951.
- Nallim, L.G., Luccioni, B. M. and Grossi, R. O. A Rayleigh-Ritz approach to transverse vibration of isotropic polygonal plates with variable thickness. *Journal Multi-body Dynamics*, 216:213-222, 2002.
- Reissner, E. The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plate. *American Society of Mechanical Engineers Journal of Applied Mechanics*, 12,69-76.1945
- Wu L. and Liu J.. Free vibration analysis of arbitrary shaped thick plates by differential cubature method. *International Journal of Mechanical Science*, 47: 63-81, 2005.
- Xiang, Y., Liew, K. M. and Kitipornchai, S. Vibration analysis of rectangular Mindlin plates resting on elastic edge supports. *Journal of Sound and Vibration*, 204(1): 1-16, 1997.
- Zhong, H. Z., Free vibration analysis of isosceles triangular Mindlin plate by the triangular differential quadrature method. *Journal of Sound and Vibration*, 237(4): 697-708, 2000.
- Zhou, D. Vibrations of Mindlin rectangular plates with elastically restrained edges using static Timoshenko beam functions with the Rayleigh-Ritz method. *International Journal of Solid and Structure*, 38:5565-5580, 2001.