

SENSIBILIDAD DE MODELOS NEURONALES USADOS PARA EVALUAR PROPIEDADES DINÁMICAS DE ESTRUCTURAS A PARTIR DE MEDICIONES DE SU RESPUESTA EN EL TIEMPO

Juan Giró^{a,b}, Alejandro García^b y José Stuardi^a

^a *Departamento de Estructuras, Facultad de C. E. F. y N., Universidad Nacional de Córdoba, Casilla de Correo 916, 5000 Córdoba, Argentina, juanfgiro@gmail.com, <http://www.efn.uncor.edu>*

^b *Departamento de Ingeniería de Sistemas de Información, Facultad Regional Córdoba, Universidad Tecnológica Nacional, Córdoba, Argentina, secresis@bbs.frc.utn.edu.ar, <http://www.frc.utn.ar>*

Palabras clave: respuesta dinámica de estructuras, identificación de parámetros, modelos regresivos, redes neuronales artificiales.

Resumen. En este trabajo se continúa con la evaluación de un nuevo procedimiento, propuesto recientemente por los mismos autores, para determinar parámetros de sistemas estructurales lineales a partir de registros de respuesta en el dominio de tiempo. Está inspirado en la conveniencia de disponer de una herramienta efectiva para perfeccionar modelos estructurales y también para identificar daños y seguir su posterior evolución. La técnica empleada consta de dos etapas: en la primera se ajusta un modelo regresivo a partir de los registros temporales de excitación y de respuesta, utilizando para ello Redes Neuronales Artificiales. Una vez definido el modelo numérico se pasa a la segunda etapa destinada a la identificación de los parámetros, matrices de rigidez y de amortiguamiento, utilizando registros de desplazamientos del sistema estudiado. Este procedimiento está formulado en forma sistemática a través del álgebra matricial, de manera que es independiente de la complejidad o dimensión del sistema estructural estudiado. Como el método propuesto está destinado a operar a partir de registros experimentales, que contienen normalmente ruido y otras perturbaciones, es muy importante conocer la sensibilidad del modelo neuronal y de los parámetros evaluados a estas condiciones. Para ello se consideraron variantes en los modelos neuronales a los efectos de disponer de mayor capacidad de filtrado de las señales de entrada. Se estudió la relación entre las condiciones de operación del modelo neuronal y la calidad de los parámetros estructurales obtenidos sobre modelos progresivamente más complejos. Se presentan los resultados obtenidos con magnitudes crecientes de ruido, que demuestran la robustez del procedimiento desarrollado y su aptitud para una correcta identificación a partir de registros de entradas ruidosas. Finalmente se estudió la influencia del grado de amortiguamiento del sistema sobre el error en los parámetros identificados con el procedimiento propuesto.

1. INTRODUCCIÓN

El objetivo de este trabajo es continuar evaluando un procedimiento para identificar parámetros dinámicos de sistemas estructurales lineales presentado con anterioridad (Giró et al., 2007). Los parámetros que se identifican a través de este procedimiento son los elementos de las matrices de rigidez y de amortiguamiento, que se determinan a partir de registros de respuesta a la acción de cargas conocidas que varían en el tiempo. Para ello es necesario conocer previamente los elementos de la matriz de masa.

Cabe acotar que este tipo de problema pertenece al área de los denominados “inversos”, en contraposición con los problemas directos en los que se busca determinar la respuesta del sistema estructural a las cargas aplicadas.

Naturalmente, para identificar los parámetros de un sistema dinámico primero hay que acotarlo dimensionalmente, razón por la cual este proceso implica la definición de un sistema equivalente que es normalmente más simple que el sistema o estructura que se espera representar. Así, la identificación de parámetros resulta un medio adecuado para la obtención de sistemas equivalentes y los valores característicos obtenidos representan propiedades que podrían denominarse condensadas, tanto másicas como disipativas y elásticas. El calificativo de condensadas tiene su origen en el planteo directo del problema, donde a través del método de los elementos finitos se obtienen las matrices de inercia, amortiguamiento y rigidez del modelo y posteriormente la cantidad de grados de libertad es reducida en concordancia con el tipo de estudio que se quiere realizar.

Es necesario aquí reconocer que la identificación directa de parámetros a partir de mediciones experimentales ofrece algunos inconvenientes. El primero es la dificultad, e inclusive muchas veces imposibilidad, de excitar la estructura estudiada en forma apropiada para permitir la medición y posterior determinación de los valores buscados. Otra dificultad se origina en los errores inherentes a las mediciones, que se propagan luego a través de los procesos numéricos de identificación de parámetros y pueden llegar a tener fuerte impacto en los resultados, convirtiéndose en una importante fuente de incertidumbre. Como es de esperar, en muchos casos estos problemas restringen enormemente la potencialidad de los ensayos, desalientan su utilización y/o los dejan limitados al tratamiento de casos muy simples, de poco interés práctico.

El procedimiento propuesto busca superar estas limitaciones realizando mediciones “virtuales” sobre un modelo numérico, las que son luego utilizadas para identificar los parámetros dinámicos de la estructura. Obviamente, este modelo numérico debe reproducir fielmente el comportamiento de la estructura real estudiada.

La solución del problema planteado se obtiene en dos etapas, que son representadas en la Figura 1. La primera etapa está destinada al desarrollo del modelo numérico y para ello se utilizan registros reales de mediciones en el dominio del tiempo. Estas mediciones deben ser realizadas a partir de ciertas condiciones de excitación, que deben ser apropiadas para la definición del modelo y a la vez factibles de ser implementadas experimentalmente.

Una vez definido el modelo numérico se pasa a la segunda etapa destinada a la identificación de los parámetros. Aquí también deben definirse ciertas condiciones específicas de excitación, pero esta vez para ser aplicadas al modelo y por lo tanto sin las limitaciones y dificultades que son propias de las mediciones experimentales. Se obtienen así registros de la respuesta en el tiempo (desplazamientos) que son luego derivados numéricamente a efectos de obtener los vectores velocidad y aceleración.

Con los vectores de desplazamientos, velocidades y aceleraciones se determinan las matrices de rigidez y amortiguamiento del sistema con una implementación de mínimos cuadrados por álgebra matricial.

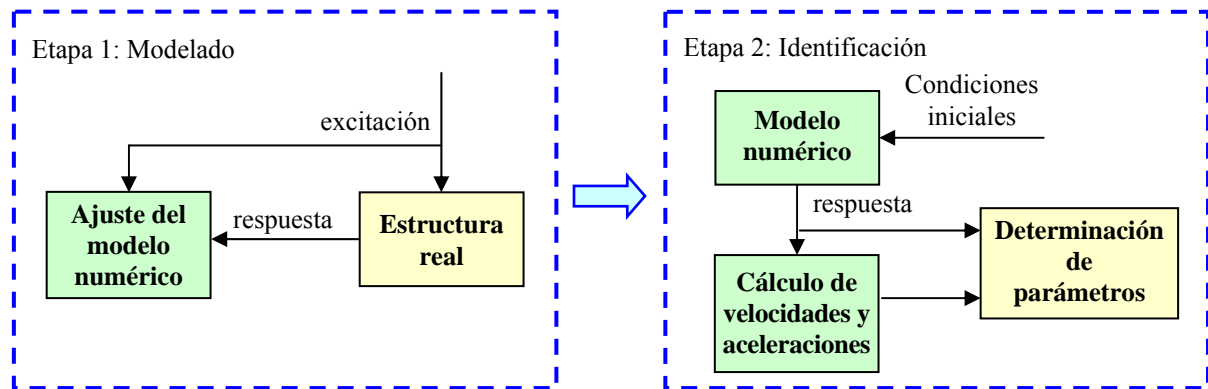


Figura 1: Etapas del procedimiento propuesto para la identificación de parámetros

En la primera parte de este trabajo se describe la técnica utilizada para la definición del modelo numérico y el procedimiento para la identificación de los parámetros. Luego, se presenta un análisis de la sensibilidad de los resultados obtenidos a diferentes factores, como ser: *i)* la complejidad del modelo regresivo utilizado, *ii)* la presencia de ruidos en los registros temporales y *iii)* el grado de amortiguamiento del sistema. Finalmente se presentan las conclusiones derivadas de los resultados obtenidos e ideas para desarrollos futuros.

2. MODELO NUMÉRICO

El desarrollo del modelo se apoya en la medición del comportamiento dinámico del sistema, es decir en los registros temporales de las excitaciones y sus respuestas, prescindiendo del planteo de la formulación matemática del fenómeno estudiado. Se trata por lo tanto de un enfoque de “caja negra”, del tipo identificado como ARX (Auto Regresivo y Exógeno), que encuentra en las redes neuronales artificiales un recurso muy conveniente para su implementación.

Hay tres aspectos que justifican la creciente utilización de distintas variantes de redes neuronales en el modelado de sistemas dinámicos: 1) aptitud para aproximar funciones complejas, 2) capacidad de aprendizaje, que posibilita ajustar el modelo a través de procesos que se basan en las conductas observadas y 3) tolerancia de las redes neuronales a datos imprecisos o incompletos, los que las hacen especialmente apropiadas para los casos en que se opera con datos de mediciones experimentales.

Con referencia al primer aspecto señalado, numerosos estudios (Valishevsky, 1998) han demostrado los buenos resultados que ofrecen las redes neuronales en la representación de funciones altamente complejas y no lineales. Para el caso aquí tratado se emplean las llamadas “hacia delante” o “feedforward”, en el sentido que establecen una relación directa entre entrada y salida que emula el comportamiento del sistema representado, sin ciclos de realimentación o procesos recurrentes.

Con respecto a la capacidad de aprendizaje, las redes neuronales artificiales son sistemas masivamente paralelos, que adecuan su desempeño mediante la progresiva modificación de los pesos de interconexión entre sus neuronas. Más aún, existe la posibilidad de alterar en forma dinámica la topología de una red, es decir, su número de capas, la cantidad de neuronas en cada capa o la manera como éstas son interconectadas, lo que ofrece otras formas menos convencionales de aprendizaje y brinda gran flexibilidad a este proceso. Todas estas técnicas tienen su antecedente en el método de backpropagation (Rumelhart et al., 1986) que estimuló una verdadera revolución en el campo de las redes neuronales.

Finalmente, con referencia a tolerancia a datos imprecisos o incompletos cabe señalar que las redes neuronales son capaces de reconocer patrones a partir de señales con ruido, distorsionadas

o incompletas. Esto es debido a que la información está distribuida en las conexiones entre neuronas, en un tipo de almacenamiento que presenta cierto grado de redundancia. En efecto, estudios realizados por [Chandra y Singh \(2003\)](#) han demostrado que la redundancia es el factor condicionante tanto de la tolerancia al ruido como también de la capacidad de generalización, y que ambas son a su vez propiedades mutuamente relacionadas entre sí.

A la vez que se mencionan estos buenos desempeños de las redes neuronales artificiales como aproximadores de funciones desconocidas, también deben reconocerse sus aspectos controvertidos, que se refieren a la carencia de recomendaciones definitivas que permitan seleccionar el tipo de red y la arquitectura más conveniente para cada caso. A pesar del intenso estudio de que son objeto, no es por el momento posible evitar una tarea de exploración para determinar la arquitectura de la red (cantidad de capas, unidades por capa y los vínculos entre ellas), las funciones de activación (lineales, hiperbólicas o sigmoideas) y las técnicas para el proceso de entrenamiento, entre otras.

Antes de comenzar la formulación del problema resulta conveniente establecer la nomenclatura que se utiliza en el resto del trabajo:

Nomenclatura utilizada

- n número de grados de libertad del sistema dinámico.
- p número de puntos de la respuesta.
- η factor de aprendizaje de la red neuronal.
- θ factor de momentum de la red neuronal.
- N_{co} número de unidades en la capa oculta de la red neuronal.
- \bar{y} valor exacto de la variable y .
- y valor calculado de la variable y .
- z vector de estado del sistema.
- Z matriz de vectores de estado.
- M matriz de masa del sistema.
- C matriz de amortiguamiento viscoso.
- K matriz de rigidez.
- u vector de cargas.
- R nivel de ruido en los datos de entrada.
- E_y error entre el valor exacto y el calculado de la variable y .
- $E_y^{\%}$ error porcentual respecto al mayor valor absoluto de la variable y .

En el sistema estructural elástico lineal estudiado, el equilibrio dinámico queda expresado por un sistema de ecuaciones diferenciales de la forma general:

$$M \ddot{y} + C \dot{y} + K y = u \quad (1)$$

y se busca un modelo cuyo comportamiento queda expresado a través de una función de tipo general, tal como:

$$y_t = \sum_{k=1}^{m_A} \alpha_k y_{t-k\Delta t} + \sum_{k=0}^{m_B} \beta_k u_{t-k\Delta t} + e_t \quad (2)$$

donde m_A es la cantidad de valores utilizados de la respuesta anteriores al instante t , m_B es la cantidad de valores de la excitación utilizados y el término e_t representa el error del modelo. Nótese que por tratarse de un sistema de varios grados de libertad α y β quedan representados por matrices, por el momento desconocidas.

Adoptando valores $m_A = 3$ y $m_B = 0$ queda definido un modelo regresivo equivalente al representado por la ecuación de [Houbolt \(1950\)](#), en el que los desplazamientos en un cierto

instante son calculados a partir de los desplazamientos en tres instantes anteriores y la carga aplicada, tal como muestra la ecuación 3:

$$y_{t+\Delta t} = f(y_t, y_{t-\Delta t}, y_{t-2\Delta t}, u_{t+\Delta t}) \quad (3)$$

Para implementar esta función regresiva se adoptó una red del tipo “multicapa” de perceptrones. Por lo tanto, en el caso de una estructura de “ n ” grados de libertad el modelo neuronal tiene $4n$ unidades en la capa de entrada y n unidades en la capa de salida. Queda por determinar la cantidad de unidades más conveniente para la capa oculta y este es uno de los objetivos de este trabajo.

3. IDENTIFICACIÓN DE PARÁMETROS

Para la identificación de parámetros se presentan dos alternativas, que son operar con la ecuación de estado o hacerlo a partir de la relación entrada-salida, adoptándose aquí la primera. Así, una vez que se cuenta con el modelo neuronal se procede a determinar su respuesta a ciertas condiciones iniciales y luego se determinan numéricamente los vectores velocidad y aceleración. Todos ellos son agrupados en dos vectores de dimensión $2n$, que representan el vector de estado z y su derivada:

$$z = \begin{Bmatrix} \dot{y} \\ y \end{Bmatrix}, \quad \dot{z} = \begin{Bmatrix} \ddot{y} \\ \dot{y} \end{Bmatrix} \quad (4)$$

Con los p vectores z y \dot{z} correspondientes a p instantes de la respuesta del sistema se definen las columnas de las matrices Z y \dot{Z} , esto es:

$$Z = [z_1 \ z_2 \ z_3 \ \dots \ z_p], \quad \dot{Z} = [\dot{z}_1 \ \dot{z}_2 \ \dot{z}_3 \ \dots \ \dot{z}_p] \quad (5)$$

Reordenando la ecuación 1 en función del vector de estado y sus derivadas, y considerando la respuesta del sistema en los p instantes de tiempo, se tiene:

$$\dot{Z} = F Z + G U \quad F = \begin{bmatrix} -M^{-1}C & -M^{-1}K \\ I & 0 \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} -M^{-1} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

Considerando ahora el caso de un sistema que responda solo a condiciones iniciales, sin cargas exteriores, la matriz F puede expresarse en función del vector de estado y su derivada:

$$F^T = \begin{bmatrix} F_{11}^T & I \\ F_{12}^T & 0 \end{bmatrix} = (Z^T)^\dagger \dot{Z}^T \quad (7)$$

y las particiones de F son:

$$F_{11} = -M^{-1}C \quad F_{12} = -M^{-1}K \quad (8)$$

donde \dagger denota la matriz pseudoinversa de Moore-Penrose. Luego, considerando la matriz de masa M , que habitualmente es diagonal, a partir de las ecuaciones 8 pueden determinarse las matrices de rigidez K y amortiguamiento C :

$$K = -M F_{12} \quad C = -M F_{11} \quad (9)$$

La utilización de la pseudoinversa o inversa de Moore-Penrose de una matriz merece algunas consideraciones. En primer lugar reconocer que se trata de una optimización implícita de un problema sobredeterminado, es decir que se dispone de más ecuaciones que incógnitas y cuya solución corresponde a un planteo de mínimos cuadrados. Además, nótese que este procedimiento está supeditado a que la pseudoinversa de la matriz Z exista, lo que implica que debe ser de rango completo.

4. CASO DE ESTUDIO

Se seleccionó un caso muy simple para ilustrar la aplicación del método y evaluar la sensibilidad de los resultados ante la variación de diversos factores, como ser: número de unidades en la capa oculta, nivel de ruido en los registros de entrada y grado de amortiguamiento del sistema. Se trata de un sistema elástico lineal de tres grados de libertad con masas concentradas y con bajo amortiguamiento viscoso de tipo proporcional (1.5, 2.8 y 3.7 % en los modos primero segundo y tercero respectivamente). Las propiedades del sistema seleccionado como “caso de estudio” son las siguientes:

$$\bar{M} = \begin{bmatrix} 0,02 & 0 & 0 \\ 0 & 0,02 & 0 \\ 0 & 0 & 0,02 \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$\bar{K} = \begin{bmatrix} 0,2512 & -0,1256 & 0 \\ -0,1256 & 0,2512 & -0,1256 \\ 0 & -0,1256 & 0,2512 \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$\bar{C} = \begin{bmatrix} 0,004 & -0,002 & 0 \\ -0,002 & 0,004 & -0,002 \\ 0 & -0,002 & 0,004 \end{bmatrix} \quad (12)$$

5. RESULTADOS OBTENIDOS

5.1 Registros de datos utilizados

A efectos de facilitar la evaluación de los modelos neuronales en lugar de emplearse registros de mediciones experimentales se generaron numéricamente registros de respuesta artificiales. Esos registros fueron obtenidos mediante la integración numérica de la respuesta del caso de estudio a diferentes condiciones de excitación e iniciales.

Hay dos motivos que justifican utilizar datos generados numéricamente, que son los siguientes:

- 1) Disponer de respuestas precisas que permitieran cuantificar los errores cometidos en ambas etapas del método propuesto.
- 2) Poder introducir niveles conocidos de errores a los registros de datos, de manera de simular perturbaciones en las lecturas de las mediciones. Para ello se incorporaron diversos niveles de ruido a las respuestas correctas obtenidas en condiciones ideales, usándose funciones de distribución Gaussiana, con media nula y desviación estándar especificada.

Los resultados mostrados en este trabajo se obtuvieron utilizando registros de respuestas, del sistema elástico, provistos por la red neuronal, en un intervalo de 20 segundos y calculados con un incremento de tiempo de 0,05 seg. Para entrenar la red se utilizaron registros de iguales características. Se dispusieron así de los desplazamientos correspondientes a 400 puntos de cada grado de libertad para cada una de las condiciones de excitación. Una de estas respuestas es representada en la Figura 2, pudiendo observarse la atenuación de las amplitudes de oscilación debida al moderado amortiguamiento del sistema. También se evidencia que los tres modos de vibración están presentes por haber sido convenientemente excitados.

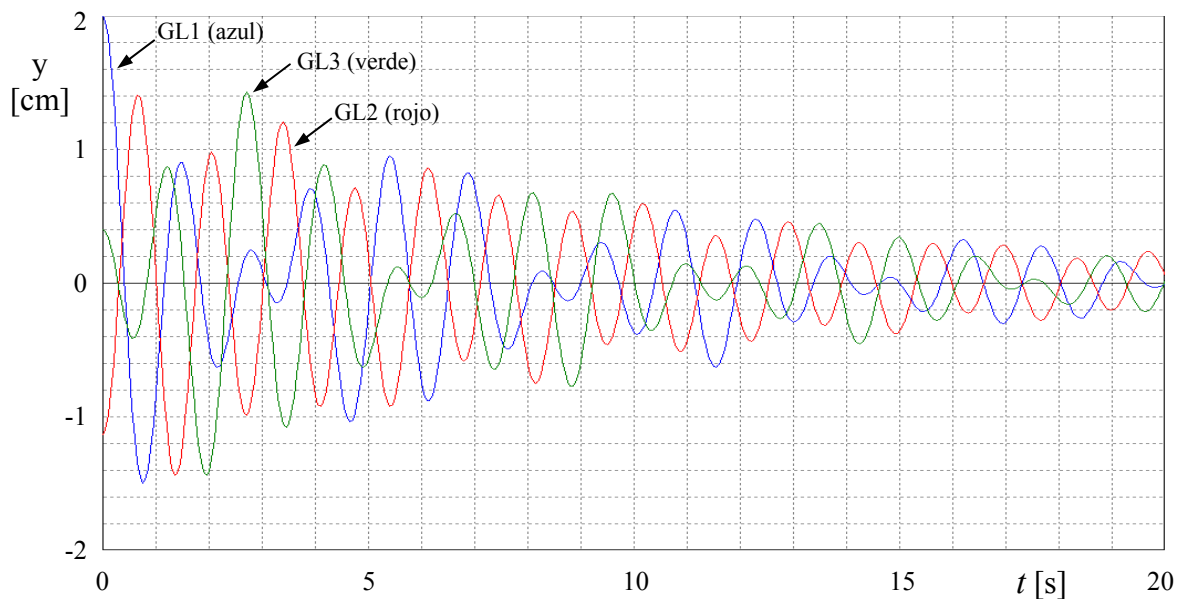


Figura 2 Representación de los desplazamientos de la respuesta del sistema en un intervalo de 20 seg.

5.2 Definición del modelo neuronal

Para el ajuste de los modelos neuronales se implementó una versión básica del método de Backpropagation, en la que se evitó el uso de algoritmos más sofisticados para tener mayor sensibilidad a las diferentes condiciones de las señales de entrada. La única mejora fue permitir el ajuste del factor de aprendizaje η durante el proceso de entrenamiento (Plagianakos et al., 2002) mientras que se mantuvo constante el factor de momentum θ .

En este proceso se utilizaron registros de datos correspondientes a dos condiciones distintas de cargas impulsivas: una condición para entrenar el modelo y otra condición de carga diferente para su validación. La finalidad de utilizar dos juegos de datos fue poder verificar la capacidad de generalización del modelo neuronal. Así pudo comprobarse que, como era de esperar, los modelos neuronales no se limitan a memorizar patrones de conducta del sistema real, sino que verdaderamente capturan sus propiedades, por lo que una vez entrenados reproducen correctamente su respuesta a cualquier condición de excitación y condiciones iniciales.

Al preparar los registros de datos fue necesario asegurar que en todos los casos las condiciones de excitación del sistema provocaran la presencia de todos los modos de vibración en las respuestas. Cabe aquí aclarar que estas condiciones de carga, que son necesarias para el entrenamiento del modelo, no son fáciles de anticipar y pueden requerir un proceso exploratorio para su determinación.

Para implementar los modelos neuronales se probaron redes con diferente cantidad de unidades en su capa oculta: entre 3 y 30. Se consideró un número elevado de unidades siguiendo la ya mencionada recomendación de acudir a la redundancia como factor determinante tanto de la tolerancia al ruido como también de la capacidad de generalización. Sin embargo, cabe aclarar que por considerarse aquí sistemas lineales, se utilizaron funciones de activación también lineales y en este caso la redundancia pierde en parte su significación.

Para el cálculo de los errores atribuibles a los modelos se adoptó el error cuadrático medio de los errores E_y (y el error porcentual $E_y^{\%}$) correspondientes a los tres grados de libertad considerando las diferencias entre los datos \bar{y}_{ik} y las respuestas calculadas con el modelo y_{ik} en todo el

intervalo, tal como lo muestra la ecuación 13:

$$E_y = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sqrt{\frac{1}{p} \sum_{k=1}^p (y_{ik} - \bar{y}_{ik})^2} \quad E_y^{\%} = \frac{100 E_y}{\text{mayor} \{ |\bar{y}_{ik}| \}} \quad (13)$$

donde p es el número de datos del registro utilizado ($p=400$) y n es el número de grados de libertad ($n=3$). El error porcentual se definió respecto del mayor de los datos en valor absoluto.

En la Figura 3 se muestra la evolución del error durante el proceso de entrenamiento de un caso en el que se utilizaron los factores $\eta = 0,005$ y $\theta = 0,93$. La curva 1 corresponde a los errores obtenidos con los datos de entrenamiento y la curva 2 a los errores de validación.

Las curvas 3 y 4 muestran otro proceso de entrenamiento con factores $\eta = 0,003$ y $\theta = 0,90$ sobre los mismos datos. Como puede observarse, los procesos muestran un comportamiento monótono descendente y asintótico, que tiende a estabilizarse en niveles de error muy pequeño y del mismo orden de magnitud. Cabe acotar que la evolución del error se torna oscilante cuando se utilizan valores del factor η superiores a 0,01.

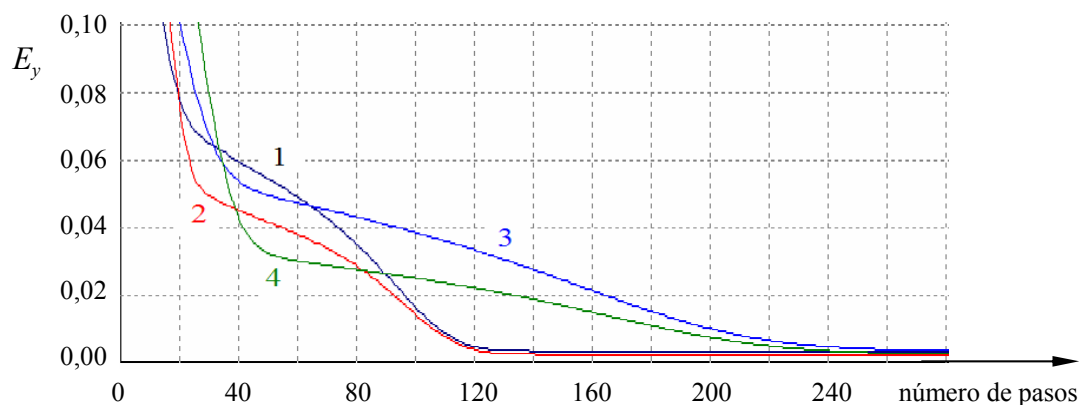


Figura 3 Evolución del error durante el proceso de entrenamiento del modelo neuronal

En la Figura 4 se representan los errores finales obtenidos al entrenar redes con diferentes cantidades de unidades en la capa oculta, N_{co} , que variaron entre 3 y 30. Se consideraron dos condiciones de excitación diferentes y un nivel de ruido del 0,5 % en la entrada. Se han graficado con puntos (rombos y cuadrados) los valores obtenidos para cada caso y se han trazado las rectas de tendencia de mínimos cuadrados en línea llena. Como puede observarse, el desempeño en todos los casos fue muy similar, obteniéndose errores del orden del 0,005 y del 0,008 % para cada caso.

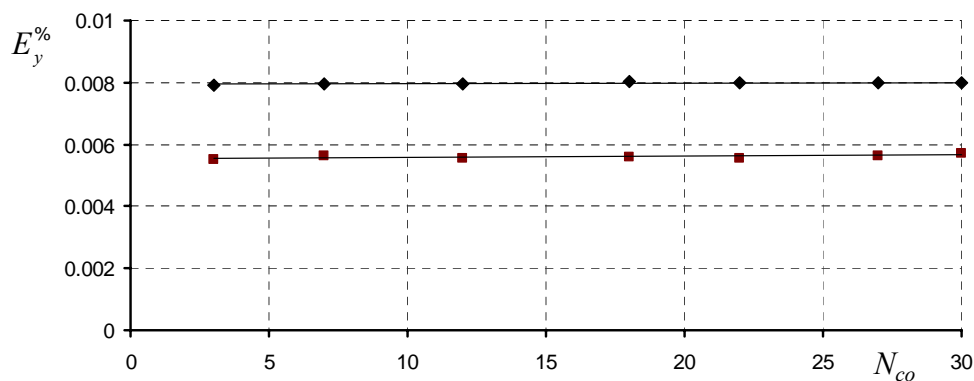


Figura 4 Error final porcentual de modelos con diferente cantidad de unidades en la capa oculta

Como fue anticipado, se dio especial importancia al estudio de la incidencia del ruido en el desempeño de los modelos neuronales y para ello se introdujeron perturbaciones en los datos de entrenamiento con una amplitud máxima de hasta 1%.

En la Figura 5 se muestra la evolución del error al considerar datos correspondientes a tres condiciones de excitación diferentes aplicadas sobre el caso de estudio (ecuaciones 10, 11 y 12). El modelo utilizado tiene 30 unidades en su capa oculta y los resultados mostraron un incremento monótono del error de alrededor del 0,0015 % al aumentar el nivel de ruido (R) desde 0 hasta 1 %.

En todos los casos considerados pudo confirmarse el excelente desempeño de los modelos neuronales multicapa de perceptrones para representar sistemas lineales, tal como lo pusieron de manifiesto los muy bajos órdenes de magnitud de los errores obtenidos.

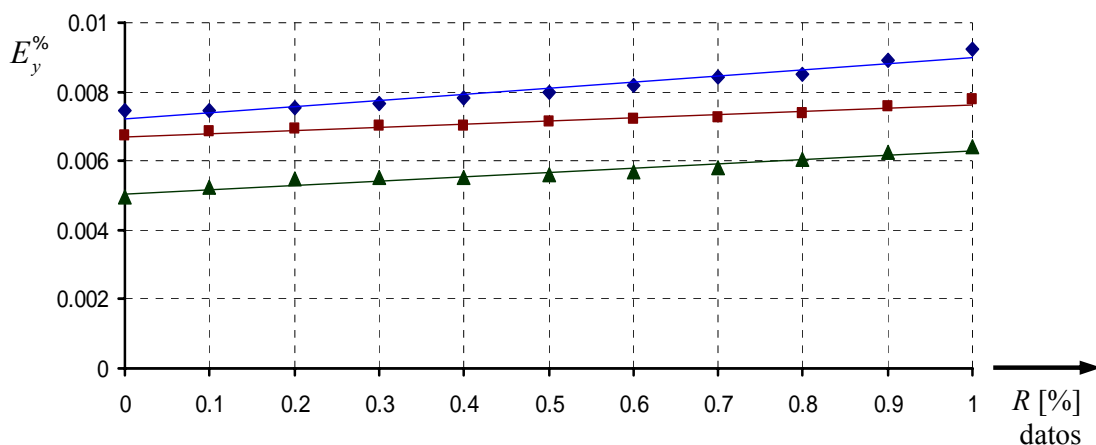


Figura 5 Error porcentual final en modelos entrenados con nivel de ruido creciente en datos de entrada

5.3 Determinación de la matriz de rigidez

En la implementación de la segunda etapa se utilizaron los mismos modelos neuronales ya entrenados en la etapa anterior. Sobre estos modelos se aplicaron condiciones iniciales de posición, sin cargas exteriores, a fin de hacer aplicable la ecuación 7. Como ya fue comentado, estas condiciones iniciales debieron ser cuidadosamente definidas de manera de asegurar la presencia de todos los modos de vibración en la respuesta del sistema. En todos los casos se tuvo en cuenta esta importante condición ya que se comprobó que es un prerequisite esencial para la obtención de buenos resultados.

Una vez conocidos los registros de desplazamientos se procedió a derivarlos, para obtener los correspondientes vectores de velocidades y aceleraciones. Aquí se utilizaron inicialmente las fórmulas de derivación numérica (McCormick, 1964) mostradas en las ecuaciones 14, aunque las experiencias realizadas confirmaron la conveniencia de utilizar formulas de mayor orden, como las representadas en las ecuaciones 15.

$$\dot{y}_t = (11y_t - 18y_{t-\Delta t} + 9y_{t-2\Delta t} - 2y_{t-3\Delta t}) / (6\Delta t) \quad (14)$$

$$\ddot{y}_t = (2y_t - 5y_{t-\Delta t} + 4y_{t-2\Delta t} - y_{t-3\Delta t}) / (\Delta t^2)$$

$$\dot{y}_t = (25y_t - 48y_{t-\Delta t} + 36y_{t-2\Delta t} - 16y_{t-3\Delta t} + 3y_{t-4\Delta t}) / (12\Delta t) \quad (15)$$

$$\ddot{y}_t = (35y_t - 104y_{t-\Delta t} + 114y_{t-2\Delta t} - 56y_{t-3\Delta t} + 11y_{t-4\Delta t}) / (12\Delta t^2)$$

Una vez conocidos los vectores de estado se calculó la matriz F con la ecuación 7. A modo de ejemplo, en la ecuación 17 se muestra la matriz F calculada para uno de los casos estudiados. Allí puede observarse que las particiones, unitaria I y nula 0 , de la matriz F muestran exactamente unos y ceros hasta la sexta cifra significativa. Además, las particiones F_{11} y F_{12} son simétricas con una muy buena aproximación.

$$F = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ I & 0 \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$F = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0.30168 & -0.15663 & 0.00318 & 12.57330 & -6.29262 & 0.00426 \\ -0.15674 & 0.30491 & -0.15647 & -6.29249 & 12.57770 & -6.29224 \\ 0.00344 & -0.15660 & 0.30150 & 0.00458 & -6.29217 & 12.57318 \\ \hline -1.00000 & -0.00000 & -0.00000 & -0.00000 & -0.00000 & -0.00000 \\ -0.00000 & -1.00000 & -0.00000 & -0.00000 & 0.00000 & 0.00000 \\ 0.00000 & 0.00000 & -1.00000 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 \end{array} \right] \quad (17)$$

Luego se recurrió a la matriz de masas definida en la ecuación 10 y con la ecuación 9 se determinó la matriz de rigidez K . En la ecuación 18 se muestra a modo de ejemplo la matriz K obtenida a partir de la matriz F de la ecuación 17, que aproxima muy bien a la matriz K de la ecuación 11.

$$K = -M F_{12} = \begin{bmatrix} 0,25146 & -0,12585 & 0,00008 \\ -0,12585 & 0,25155 & -0,12584 \\ 0,00009 & -0,12584 & 0,25146 \end{bmatrix} \quad (18)$$

Cabe aquí acotar que los resultados no mostraron sensibilidad aparente a la cantidad p de columnas de la matriz Z (ver ecuación 5), es decir, a la cantidad de puntos de la respuesta del sistema utilizados para determinar la matriz F . Si bien la condición matemática es que la cantidad p de valores utilizados sea igual o superior a $2n$, se considera recomendable que el problema esté sobredeterminado, adoptando $p \geq 4n$.

Finalmente, para evaluar la calidad de los resultados obtenidos se tomó como valor de comparación el error medio cuadrático de los m elementos no nulos de esta matriz, representado por la ecuación 19:

$$E_K = \sqrt{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n (K_{ik} - \bar{K}_{ik})^2} \quad E_K^{\%} = \frac{100 E_K}{\text{mayor}\{|\bar{K}_{ik}|\}} \quad (19)$$

En la Figura 6 se muestran los errores en el cálculo de la matriz de rigidez a partir de las respuestas de diferentes modelos para dos condiciones de excitación diferentes. En este caso los modelos tienen diferente cantidad de unidades en la capa oculta y se observa que los errores aumentan gradualmente en un 0,04 % al aumentar las unidades de 3 a 30.

Para considerar la incidencia del ruido se utilizó una red de 30 unidades en la capa oculta a la que se le aplicaron las dos mismas condiciones de excitación del estudio anterior. En este caso pudo comprobarse una evolución monótona creciente del error porcentual del orden del 0,2 % con un nivel de ruido (R) que aumentó de 0 al 1%, tal como lo muestra la Figura 7.

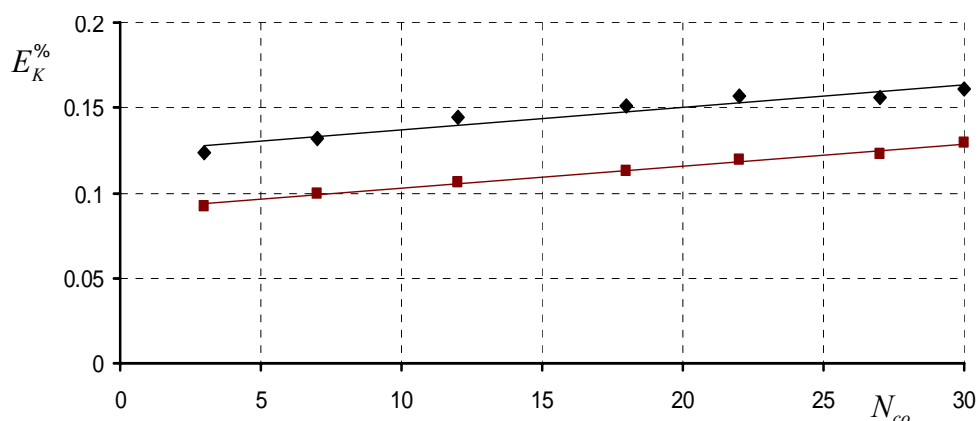


Figura 6 Error medio porcentual de la matriz de rigidez en función de la cantidad de unidades en la capa oculta

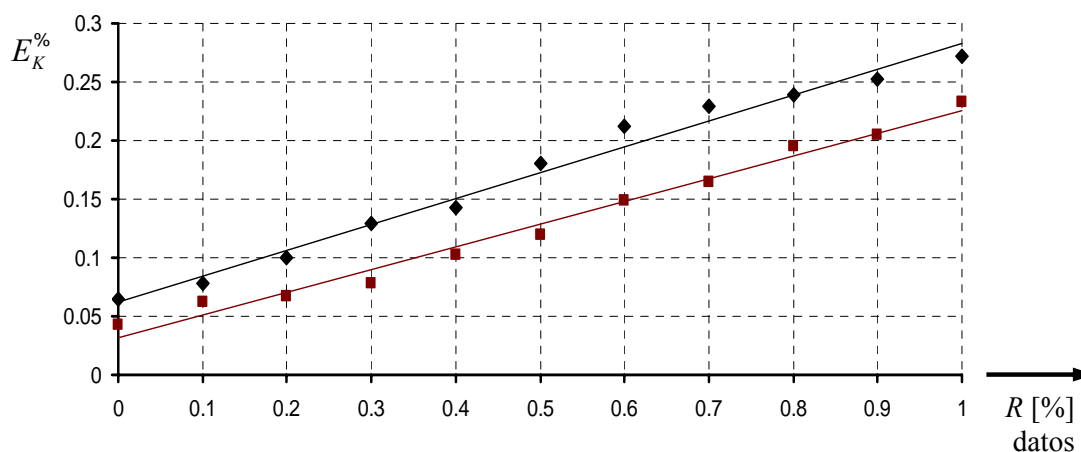


Figura 7 Error medio porcentual de la matriz de rigidez para niveles crecientes de ruido en los datos de entrada

Los resultados obtenidos permiten concluir que el procedimiento propuesto determina los elementos de la matriz de rigidez con muy buena aproximación. Además, los resultados muestran una sensibilidad moderada a la presencia de ruido en las señales utilizadas para entrenar los modelos neuronales.

5.4 Determinación de la matriz de amortiguamiento

De acuerdo a la ecuación 9, aquí también fue necesario considerar que la matriz de masas es conocida para poder calcular la matriz de amortiguamiento. A modo de ejemplo en la ecuación 20 se muestra la matriz de amortiguamiento C obtenida a partir de la matriz de masas de la ecuación 10 y de la matriz F de la ecuación 17, que debe compararse con la matriz C de la ecuación 12:

$$C = -M F_{11} = \begin{bmatrix} 0,00440 & -0,00232 & 0,00008 \\ -0,00232 & 0,00448 & -0,00232 \\ 0,00008 & -0,00232 & 0,00440 \end{bmatrix} \quad (20)$$

Para evaluar la calidad de los valores obtenidos se utilizó el error medio cuadrático de los m elementos no nulos de la matriz de amortiguamiento definido en la ecuación 21:

$$E_C = \sqrt{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n (C_{ik} - \bar{C}_{ik})^2} \quad E_C^{\%} = \frac{E_C}{\text{mayor}\{|\bar{C}_{ik}|\}} \quad (21)$$

Al igual que en los casos anteriores, los coeficientes de amortiguamiento fueron determinados utilizándose las respuestas de diferentes modelos para dos condiciones de excitación diferentes. Estos modelos neuronales tenían en su capa oculta una cantidad de unidades que variaba entre 3 y 30 y la evolución de los errores porcentuales es representada en la Figura 8. Nótese que, a diferencia de lo ocurrido en el caso de la matriz de rigidez, el error no muestra aquí tendencia creciente, pero hay que destacar que es un orden de magnitud mayor.

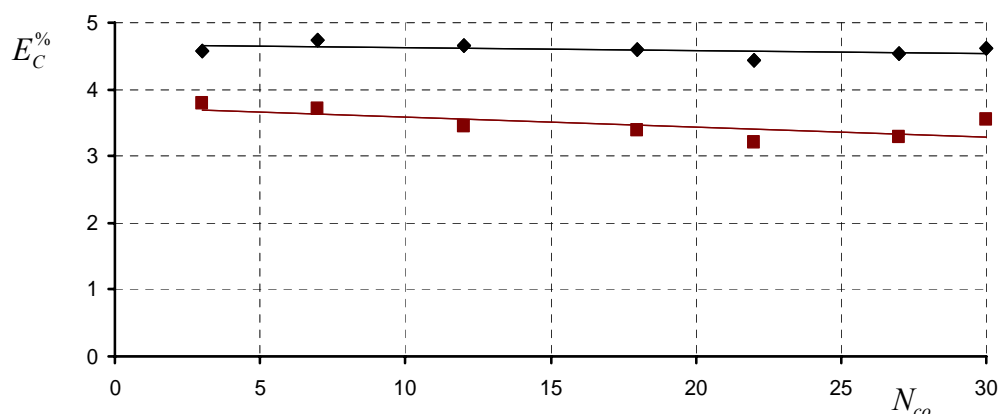


Figura 8 Error porcentual de la matriz de amortiguamiento en función de la cantidad de unidades en la capa oculta

Para considerar la incidencia del ruido en la calidad de los coeficientes de la matriz de amortiguamiento se utilizó la misma red neuronal de 30 unidades en la capa oculta que fue empleada en el estudio de la influencia del ruido en la matriz de rigidez. La red fue también sometida a las dos mismas condiciones de excitación para hacer comparables los resultados, que son presentados en la Figura 9. Como puede observarse, la evolución del error porcentual es también monótono creciente con niveles que varían entre 2 y 6 %.

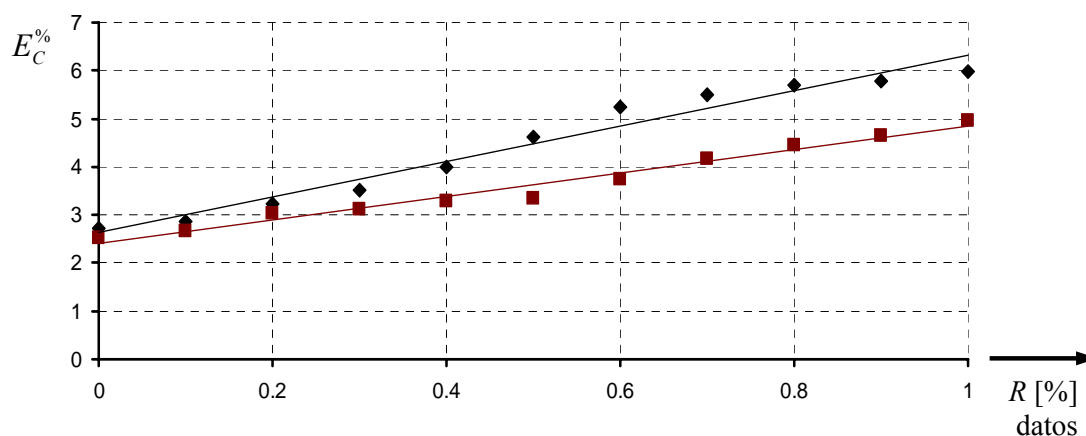


Figura 9 Error porcentual de la matriz de amortiguamiento para niveles crecientes de ruido en los datos de entrada

De los resultados obtenidos se concluye que el procedimiento propuesto es apto para determinar los elementos de la matriz de amortiguamiento, aunque con un error significativamente superior al que se obtiene con la matriz de rigidez. Como contrapartida, el crecimiento del error al aumentar los niveles de ruido es más moderado que en el caso de la rigidez.

5.5 Estudio de la influencia del amortiguamiento del sistema

En las secciones anteriores se estudió como incide sobre la calidad de los resultados obtenidos, cuando se utilizan: *i*) cantidades diferentes de unidades en la capa oculta de los modelos neuronales y *ii*) niveles crecientes de ruido en las señales de entrada. Todo ello para un caso tomado como testigo, con ciertas propiedades másicas, elásticas y disipativas (ecuaciones 10 a 12).

Para definir el amortiguamiento en la ecuación 12 se adoptó una matriz de amortiguamiento de tipo proporcional o de Rayleigh (Clough y Penzien, 1975) cuya forma general es:

$$\bar{C} = a_m \bar{M} + a_k \bar{K} \quad (22)$$

donde $a_m = 0$ y $a_k = 0,0159236$ (igual a $0,004/0,2512$, ver ecuaciones 11 y 12).

Por ser este amortiguamiento proporcional a la matriz de rigidez, la matriz de amortiguamiento generalizada resulta desacoplada y los factores de amortiguamiento correspondientes a los tres modos de vibración tienen los siguientes valores que van desde 1,5 al 3,7 %:

$$\xi = \begin{Bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,01527 \\ 0,02822 \\ 0,03690 \end{Bmatrix} \quad (23)$$

Se presenta a continuación un análisis para determinar como incide al grado de amortiguamiento del sistema, sobre la capacidad de identificación del procedimiento. Para ello se tomó como referencia el caso de estudio y se multiplicó la matriz de amortiguamiento por una constante ρ , lo que equivale a decir que el mismo multiplicador ρ afectó a los tres factores de amortiguamiento. A este multiplicador se le asignaron valores entre 0,25 y 2 y se mantuvieron inalteradas las matrices de masas y rigidez, obteniéndose los registros de las respuestas de estos sistemas con los diferentes grados de amortiguamiento. En estos casos se trabajó con las señales limpias, es decir sin incorporarles ruido.

Una vez definidos los modelos neuronales para todos estos casos, se pasó a la segunda etapa en la que se obtuvieron los registros de respuestas “virtuales”, sus derivadas, y a partir de ellos se calcularon los coeficientes de las matrices de rigidez y amortiguamiento. En todos los casos se siguió el mismo procedimiento aplicado en las secciones anteriores y finalmente se calcularon los errores de estas matrices mediante las ecuaciones 19 y 21.

En la Figura 10 se representa el error en la determinación de la matriz de rigidez K de sistemas con diferentes grados de amortiguamiento y en la Figura 11 se representa el error porcentual correspondiente a la determinación de la matriz de amortiguamiento C .

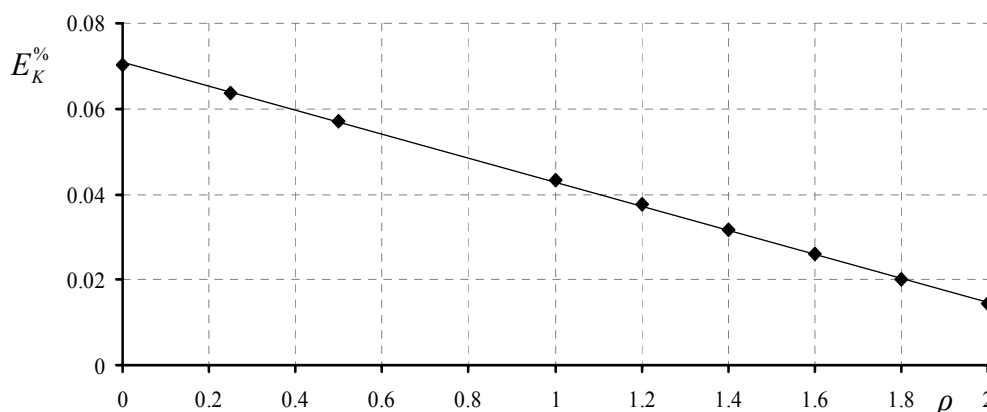


Figura 10 Error porcentual de la matriz de rigidez K en función del multiplicador de amortiguamiento ρ

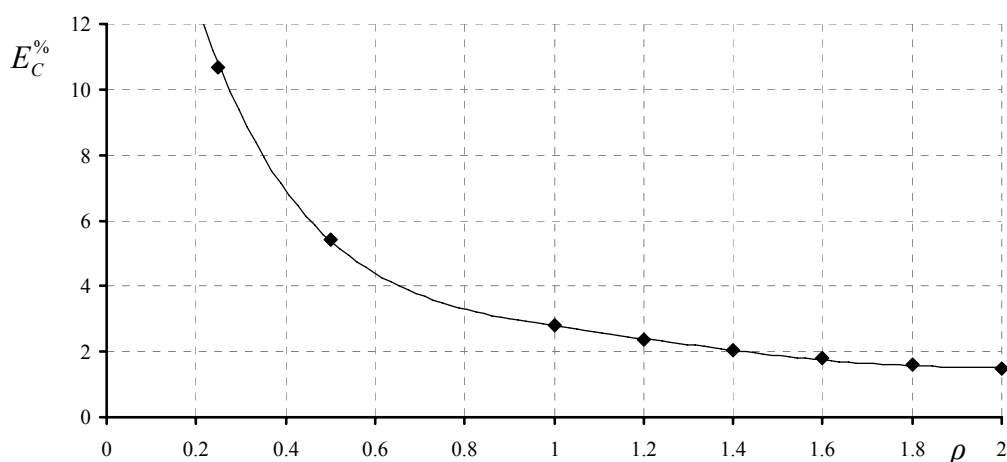


Figura 11 Error porcentual de la matriz de amortiguamiento C en función del multiplicador de amortiguamiento ρ

Es interesante observar que en ambos casos el método brinda mejores resultados a medida que el amortiguamiento del sistema crece. En el caso del cálculo de la matriz de rigidez el error resulta insignificante y muestra un comportamiento lineal descendente.

El error en la matriz de amortiguamiento es significativamente mayor que el obtenido al calcular la matriz de rigidez, este fenómeno ya fue observado al comparar la Figura 8 con la Figura 7. El error decrece rápidamente al aumentar el grado de amortiguamiento y tiende a estabilizarse en un valor inferior al 2 %.

Hay que destacar la gran dificultad que tiene el método propuesto para determinar correctamente el amortiguamiento cuando el mismo es muy pequeño, aunque este fenómeno se da siempre en los métodos experimentales.

También cabe reiterar la gran importancia que tiene la presencia de todos los modos en los registros de respuesta utilizados para el cálculo de la matriz F . En efecto, pudo comprobarse que en los casos (no presentados en este trabajo) en que el amortiguamiento reduce rápidamente la presencia de algún modo en la respuesta, los errores en el cálculo de ambas matrices crecen notablemente.

6. CONCLUSIONES

En este trabajo se evaluó un procedimiento que obtiene los parámetros característicos de sistemas mecánicos lineales a partir de registros de su respuesta en el dominio del tiempo y del conocimiento de la matriz de masa. Estos parámetros característicos quedan expresados a través de las matrices de rigidez y amortiguamiento.

El método se desarrolla en dos etapas. En la primera se ajusta un modelo regresivo en base a los registros de la respuesta del sistema real y para ello se emplean redes neuronales artificiales. En la segunda etapa se estudia la respuesta del modelo neuronal a ciertas condiciones iniciales convenientemente elegidas y se utilizan los registros de respuesta para la identificación de los parámetros buscados. En esta última etapa el procedimiento queda completamente formulado a través del álgebra matricial, lo que lo hace apropiado para abordar problemas complejos.

Los resultados obtenidos hasta el momento con sistemas relativamente simples han permitido comprobar que:

- i) Pudo obtenerse una muy buena aproximación de los elementos de las matrices de rigidez y amortiguamiento.
- ii) No son necesarios los modelos neuronales complejos, ya que no producen mejora en los resultados.

- iii) El error de los resultados crece con el aumento del nivel del ruido en las señales de entrada, pero a una tasa moderada.
- iv) La matriz de amortiguamiento es determinada con mayor error que la de rigidez.
- v) El error de la matriz de amortiguamiento muestra menor sensibilidad al ruido que la matriz de rigidez.
- vi) Los errores en el cálculo de la rigidez y amortiguamiento decrecen a medida que se trabaja sobre sistemas más amortiguados.
- vii) El error al calcular el amortiguamiento es grande cuando su valor es muy pequeño, aunque este fenómeno se da siempre en los métodos experimentales.

Por el momento se vienen utilizando registros de respuesta obtenidos por simulación, que progresivamente serán reemplazados por registros experimentales. Además, se tratarán en el futuro problemas de mayor dimensión y complejidad, se estudiarán variantes en los modelos neuronales a los efectos de disponer de mayor capacidad de filtrado del ruido y se trabajará para una mejor comprensión de las relaciones entre las condiciones de excitación utilizadas y los resultados obtenidos. El objetivo es poder confirmar que este método es apto para tratar registros de mediciones reales y es útil para detectar daños estructurales.

REFERENCIAS

- Chandra P. y Singh Y., Fault tolerance of feedforward artificial neural networks- a framework of study. *Proceedings of the International Joint Conference on Neural Networks, School of Information Technology, Indraprastha University, Delhi, India*.1:489-494, 2003.
- Clough R. y Penzien J., *Dynamics of Structures*, Mc Graw Hill, 1975.
- Giró J., García A. y Stuardi J., Identificación de parámetros de sistemas dinámicos a través de redes neuronales artificiales, *Revista Mecánica Computacional*, 26:2585-2599, 2007.
- Houbolt J., A recurrent matrix solution for the dynamic response of elastic aircraft. *Journal of Aeronautical Science*, 17:540-550, 1950.
- McCormick, J. y Salvadori, M., *Numerical Methods in Fortran*, Prentice-Hall, 1964.
- Plagianakos V.P., Magoulas G.D. y Vrahatis M.N.. Deterministic nonmonotone strategies for effective training of multilayer perceptrons. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 13(6):1268-1284, 2002.
- Rumelhart D., Hinton G. y Williams R., Learning internal representations by error propagation. *Parallel distributed processing: Explorations in the microstructures of cognition*, MIT Press, I:318-362, 1986.
- Valishevsky A., Comparative analysis of different approaches towards multilayer perceptron training , *Department of Computer Science, University of Latvia, Riga*, 1998.