

SIMULACIÓN NUMÉRICA DE LA RADIACIÓN TÉRMICA DE GASES NO GRISES EN CAVIDADES MULTIDIMENSIONALES

Daniel Rebollo

*Instituto de Mecánica Aplicada, Universidad Nacional de San Juan, Libertador 1109 Oeste, 5400,
San Juan, Argentina, drebollo@unsj.edu.ar*

Palabras Claves: radiación, método de los volúmenes finitos, gases no grises, suma ponderada de gases grises.

Resumen. En este trabajo se ha simulado numéricamente el proceso de transferencia de calor por radiación térmica en una cavidad rellena con un gas no gris que absorbe, emite y dispersa isotrópicamente la radiación térmica.

El gas no gris ha sido modelado con el Método de la Suma Ponderada de Gases Grises WSGGM y la ecuación de la transferencia radiante se ha resuelto por el Método de los Volúmenes Finitos FVM.

La emisividad total y la absorptividad total se representan por una suma de emisividades y absorptividades de gases grises ponderadas por un factor de peso dependiente de la temperatura. Los factores de peso se aproximan mediante polinomios de temperatura.

El procedimiento numérico ha sido implementado en un programa de computadora que fue utilizado para obtener los resultados presentados en este trabajo.

El dominio espacial ha sido discretizado utilizando volúmenes de control estructurados y el dominio angular se ha discretizado en un número finito de ángulos de control. Las soluciones obtenidas han sido comparadas con resultados publicados, obtenidos con métodos más exactos. El análisis muestra que las soluciones presentadas en este trabajo son correctas y pueden ser extendidas a situaciones más complejas con un amplio margen de seguridad.

Se han estudiado dos cavidades cartesianas de una y tres dimensiones con paredes grises, difusas e isotérmicas rellenas con vapor de agua a presión atmosférica.

Se ha analizado la influencia del tamaño de la grilla espacial, la discretización angular y el número de componentes de gases grises en la fuente de calor y en el flujo de calor incidente en la pared.

1 INTRODUCCIÓN

La transferencia de calor radiante es un fenómeno importante en muchas áreas, dispositivos y equipos, especialmente si las temperaturas son muy altas, como sucede en los generadores de vapor, refinerías, hornos de acero y de vidrio, las cámaras de la combustión de turbinas de gas, motores de reacción, en la utilización de la energía solar, la emisión de energía de una explosión nuclear y en los satélites y dispositivos que operan en el espacio. Existe una gran necesidad de disponer de modelos matemáticos y códigos computacionales que puedan resolver los diferentes problemas que se presentan en la radiación térmica. Entre estos se encuentra la modelación de los gases reales como el dióxido del carbono CO_2 , el vapor de agua H_2O y sus mezclas. Uno de los problemas importantes de la radiación de gas es la descripción de las propiedades radiativas de los gases reales o también llamados de gases no grises.

Los modelos usados al definir las propiedades radiantes de los gases de combustión en cálculos de radiación se pueden agrupar, en orden decreciente de complejidad, en tres grupos: (i) modelos espectrales línea a línea LBL, (ii) modelos espectrales de banda y (iii) modelos globales. Cada uno de estos modelos tiene sus propios méritos, defectos y áreas de aplicación. Históricamente el concepto más antiguo y más simple para predecir el comportamiento radiante de un gas es el modelo de gas gris. Este asume que el coeficiente de absorción es constante en todo el rango de longitudes de ondas, por lo que se obtienen predicciones muy poco precisas comparadas con las del modelo línea a línea que proporciona las mejores predicciones. En el modelo línea a línea la ecuación de la transferencia radiante se integra sobre el espectro molecular detallado del gas considerado, lo que requiere una cantidad enorme de cálculo, por lo que solo se usa solo en la determinación de soluciones benchmark.

El modelo estadístico de banda estrecha SNBM es muy preciso en la predicción de la transferencia radiante en los gases a altas temperaturas. Este da la transmisividad espectral promediada sobre una banda estrecha de longitudes de ondas. Debido a que es difícil acoplar el SNBM al método de solución de la ecuación de la transferencia radiante, tal como el método de los volúmenes finitos, donde se necesitan los valores del coeficiente de absorción espectral (monocromático) o su promedio sobre un intervalo de la longitud de onda. Además, la desventaja del modelo SNB es que requiere un gran número de bandas, y por consiguiente, requiere mucho cálculo. El modelo de banda ancho WBM es una simplificación del modelo SNB. En lugar de las líneas espectrales usa la bandas, requiere menos esfuerzo de cálculo y es razonablemente preciso. Este da la absortancia de la banda ancha, mientras la solución de la ecuación de la transferencia radiante por el método de los volúmenes finitos opera con el coeficiente de absorción, espectral o promediado. Por tanto el WBM no puede ser fácilmente incorporado en el FVM. Además, el WBM requiere el conocimiento de la longitud del camino en el modelo así como los parámetros espectrales asociados con la longitud del camino.

Los modelos LBL, SNB y WBN son modelos muy precisos para predecir el comportamiento de los gases reales, pero requieren una gran cantidad de cálculo numérico y tiempo de computadora. Esto es un inconveniente, aún en nuestros días cuando se disponen de supercomputadoras muy potentes, debido a que la modelación de las propiedades radiantes del gas real es solo una parte del problema de radiación completo. Este, además, suele ser una parte de un cálculo más complejo que involucra dinámica de fluidos, flujos turbulentos, reacciones químicas y fluidos de varias fases en geometrías tridimensionales complejas.

Los modelos que predicen las propiedades radiantes globales están basados en el concepto del modelo WSGG (Modest, 1993). Este reemplaza las propiedades radiantes de los gases reales con un número finito equivalente de gases grises. El modelo WSGG se usa para evaluar

le emisividad y absorptividad total del gas para una longitud de camino dada.

Modest (1991) ha demostrado que el modelo WSGG se puede generalizar para usarlo con cualquier método de resolución de la ecuación de la transferencia radiante RTE. Este método necesita evaluar los factores de peso y los coeficientes de absorción, para cada componente gris de la mezcla de gases considerada.

Para cada una de las componentes grises se debe evaluar el coeficiente de absorción como independiente de la temperatura y los factores de peso dependientes de la temperatura en forma polinomial. La gran mayoría de las comparaciones de los diferentes modelos han sido hechas en geometrías unidimensionales, para geometrías bidimensionales y tridimensionales no se dispone de muchos datos para comparar.

El modelo WSGGM ha sido extensivamente usado en la predicción de las propiedades espectrales de gases reales, se lo ha aplicado a una gran cantidad de mezclas de gases, múltiples configuraciones geométricas multidimensionales y variados perfiles de temperatura. Se lo ha incorporado a diferentes métodos de resolución de la ecuación de la transferencia radiante y se lo ha comparado con modelos espectrales mucho más precisos dando resultados, desde el punto de vista de la ingeniería, alentadores.

Soufiani y Djavan (1994), implementaron el WSGGM y el SNBM en una mezcla de gases de combustión reales en una geometría plana y un horno de geometría cilíndrica con simetría axial que quema oxígeno y metano.

Denison y Webb (1995) extendieron el modelo de suma la suma ponderada de gases grises de línea espectral SLW a un medio no homogéneo y no isotérmico introduciendo una función de distribución de línea de absorción de cuerpo negro que permite que el modelo SLW sea aplicable a cualquier método de solución de la ecuación de la transferencia radiante. Además, Denison y Webb (1996) revisaron el desarrollo y validación del modelo SLW para la predicción de la transferencia radiante en gases a alta temperatura. Los parámetros del modelo fueron obtenidos directamente del espectro línea a línea del H_2O y CO_2 .

Liu, Becker y Bindar (1998) estudiaron dos modelos de cavidades conteniendo una mezcla de CO_2 y H_2O , y un horno con quemadores múltiples de gas natural, usando el modelo simple de gas gris, y el WSGGM. La ecuación de la transferencia radiante fue resuelta por el método de las ordenadas discretas DOM.

Cumber, Fairweather y Ledin (1998), adaptaron el WBM para resolver problemas de dinámica de fluidos. Ellos compararon sus predicciones con datos experimentales para un número de configuraciones homogéneas y no homogéneas idealizadas y para una llama en chorro.

Pierrot, Soufiani y Taine (1999) estudiaron la precisión de varios modelos de banda estrecha NBM y modelos globales WSGG, SLW aplicados a la transferencia radiante en una cavidad plana con diferentes perfiles de temperatura.

Maruyama y Guo (1999) calcularon la transferencia de calor radiante en un horno tridimensional con campos de temperatura y concentraciones conocidos usando el NBM de Elsasser y el WBN de Edwards (Edwards, 1976) acoplados con un modelo de emisión de rayos.

Bressloff (1999) comparó diferentes soluciones a la ecuación de la transferencia radiante empleando el WSGGM en mezclas de gases de combustión y partículas de carbón (hollín).

Liu (1999), estudio la radiación térmica no gris en tres dimensiones usando el modelo SNB. La ecuación de la transferencia radiante promediada en una banda estrecha fue resuelta por el método de traceado de rayos RTM.

Goutiere, Liu y Charette (2000) publicaron una comparación muy completa de diferentes modelos de predicción de las propiedades radiantes de gases reales, en geometrías

bidimensionales.

Yu, Baek y Park (2000) extendieron el WSGGM a una mezcla de dos fases con partículas no grises resolviendo la ecuación de la transferencia radiante por el método de las ordenadas discretas en una geometría unidimensional.

Kim y Song (2000) presentaron el modelado de baja resolución para H₂O, CO₂ y sus mezclas aplicando el WSGGM a cada banda estrecha. Ellos compararon la emisividad calculada con los valores de emisividad exactos obtenidos por Soufiani y Taine (1997).

Coelho (2002), simuló la transferencia radiante tridimensional para gases no grises usando el método de las ordenadas discretas y el método de la transferencia discreta DTM para resolver la ecuación de la transferencia radiante junto con los modelos de distribución-k correlacionado CK, SLW y WSGG para simular las propiedades radiantes de los gases efectuando comparaciones con los resultados publicados por Liu (1999), los cuales fueron usados como benchmark. Coelho concluye que el WSGGM es computacionalmente económico y de precisión moderada.

Trivc (2004) resolvió la ecuación de la transferencia radiante por el método de los volúmenes finitos acoplado al WSGGM de Smith, Shen y Friedman (1982) en la misma cavidad tridimensional utilizada por Liu (1999).

Boutoub, Benticha y Sassi (2006) calculó la transferencia radiante en las mismas configuraciones geométricas y térmicas que estudio Kim (1991), acoplado el método de los volúmenes finitos, el WSGGM de Smith, Shen y Friedman (1982) y dispersión anisotrópica.

Byun y Baek, (2007) llevaron a cabo un análisis numérico de las características de la combustión de combustible líquido en flujo turbulento y compresible utilizando el método de los volúmenes finitos para resolver la ecuación de la transferencia radiante y el WSGGM para tener en cuenta el comportamiento no gris de los productos de la combustión.

Finalmente, Borjini, Guedri y Saïd (2007) resolvieron el problema de la transferencia radiante en un horno industrial tridimensional de forma compleja relleno de una mezcla de CO₂ y H₂O con campos de temperatura no uniforme. Ellos usaron una variación del método de los volúmenes finitos conocido como FTn FVM acoplado con el WSGGM.

El objetivo de este trabajo fue desarrollar un código computacional para resolver la ecuación de la transferencia radiante que tenga en cuenta el comportamiento de los gases no grises mediante la incorporación de un modelo no gris de fácil acople con el método de los volúmenes finitos, bajo costo computacional y precisión aceptable.

En este trabajo se ha incorporado el WSGGM de Smith, Shen y Friedman (1982) aprovechando las ventajas comparativas de este método respecto de los métodos más precisos que requieren mucho tiempo de cálculo y son difíciles de acoplar al método de los volúmenes finitos. De esta manera, el código desarrollado en este trabajo será razonablemente preciso, aplicable a una gran variedad de problemas de ingeniería y apropiado para ser incorporados en códigos más complejos donde se resuelvan problemas combinados de transferencia de calor por convección y radiación combinadas.

2 FORMULACIÓN MATEMÁTICA

2.1 Ecuación de la transferencia radiante para un gas gris

La ecuación de la transferencia radiante para un medio gris, en forma compacta, está dada por (Brewster, 1992; Modest, 1993; Siegel y Howell, 1992)

$$\frac{dI(\vec{r}, \hat{s})}{ds} = -\beta(\vec{r})I(\vec{r}, \hat{s}) + S(\vec{r}, \hat{s}) \quad (1)$$

Esta ecuación indica que el cambio de la intensidad radiante se efectúa a lo largo de la longitud ds . La ecuación simplemente establece que el cambio de intensidad a lo largo de un camino, o la acumulación de energía, es igual a la diferencia entre la energía ganada y la energía perdida. Aquí el término $-\beta(\vec{r})I(\vec{r}, \hat{s})$ tiene en cuenta la atenuación y el término $S(\vec{r}, \hat{s})$ el aumento.

El coeficiente de extinción $\beta(\vec{r})$ se escribe como

$$\beta(\vec{r}) = \kappa(\vec{r}) + \sigma(\vec{r}) \quad (2)$$

Donde $\kappa(\vec{r})$ representa la absorción de energía radiante y $\sigma(\vec{r})$ tiene en cuenta la dispersión saliente de la energía radiante. La función fuente de energía $S(\vec{r}, \hat{s})$, esta dado por

$$S(\vec{r}, \hat{s}) = \kappa(\vec{r})I_b(\vec{r}) + \frac{\sigma(\vec{r})}{4\pi} \int_{4\pi} I(\vec{r}, \hat{s}')\Phi(\hat{s}', \hat{s})d\Omega' \quad (3)$$

El primer término en esta expresión, $\kappa(\vec{r})I_b(\vec{r})$ representa la emisión del gas, mientras que el segundo término tiene en cuenta la acumulación de energía radiante debido a la dispersión entrante desde todas las direcciones en el dominio.

La intensidad radiante $I(\vec{r}, \hat{s})$ depende de la posición espacial \vec{r} y de la dirección angular \hat{s} . Para una cavidad tridimensional la intensidad radiante depende de cinco variables espaciales $I(x, y, z, \theta, \phi)$, donde x, y, z son las coordenadas cartesianas del vector de posición \vec{r} y θ, ϕ son el ángulo polar y azimutal, respectivamente, que definen la dirección de la intensidad \hat{s} .

2.2 Condición de frontera para una superficie difusa opaca para un gas gris

La condición de frontera para una superficie opaca y difusa, dada en la forma de la intensidad de frontera, esta dada por

$$I(\vec{r}, \hat{s}) = \varepsilon(\vec{r})I_b(\vec{r}) + \frac{\rho(\vec{r})}{\pi} \int_{\hat{s}' \cdot \vec{n} < 0} I(\vec{r}, \hat{s}')|\hat{s}' \cdot \vec{n}|d\Omega' \quad (4)$$

El primer término del lado derecho de esta ecuación es la emisión debida a la temperatura de la superficie, la así llamada radiación del cuerpo negro. El segundo término representa la reflexión de la intensidad entrante. La energía radiante que abandona una superficie opaca difusa es precisamente la suma de estos dos efectos.

2.3 Ecuaciones de la transferencia de calor radiante para un gas gris

Además de las intensidades radiantes y de las ecuaciones escritas anteriormente, cantidades y expresiones adicionales deben ser definidas. La radiación incidente proveniente de todas las direcciones (es decir, integrada sobre los 4π radianes) esta dada por

$$G(\vec{r}) = \int_{4\pi} I(\vec{r}, \hat{s})d\Omega \quad (5)$$

El flujo de calor radiante en la dirección del vector unitario \hat{i} esta expresado como

$$q_i(\vec{r}) = \int_{4\pi} I(\vec{r}, \hat{s})(\hat{s} \cdot \hat{i})d\Omega \quad (6)$$

Usando esta ecuación, el flujo de calor radiante en las direcciones x, y, z viene dado por

$$q_x(\vec{r}) = \int_{4\pi} I(\vec{r}, \hat{s})(\hat{s} \cdot \hat{e}_x) d\Omega \quad (7)$$

$$q_y(\vec{r}) = \int_{4\pi} I(\vec{r}, \hat{s})(\hat{s} \cdot \hat{e}_y) d\Omega \quad (8)$$

$$q_z(\vec{r}) = \int_{4\pi} I(\vec{r}, \hat{s})(\hat{s} \cdot \hat{e}_z) d\Omega \quad (9)$$

La dirección angular esta definida por el vector unitario

$$\hat{s} = (\sin\theta \cos\phi)\hat{e}_x + (\sin\theta\sin\phi)\hat{e}_y + (\cos\theta)\hat{e}_z \quad (10)$$

El termino fuente – sumidero de radiación para un medio gris absorbente, emisor y dispersante esta dado por

$$\kappa(\vec{r}) \int_{4\pi} [I(\vec{r}, \hat{s}) - I_b(\vec{r})] d\Omega \quad (11)$$

El primer término bajo la integral es la radiación incidente y el segundo término es la emisión debida a la temperatura del gas, o radiación del cuerpo negro.

Si el coeficiente de absorción $\kappa(\vec{r})$ no depende de la posición \vec{r} , entonces

$$\kappa(\vec{r}) = \kappa \quad (12)$$

De esta forma, la ecuación (11) es puede escribir como

$$\kappa \left[\int_{4\pi} I(\vec{r}, \hat{s}) d\Omega - \int_{4\pi} I_b(\vec{r}) d\Omega \right] \quad (13)$$

La primera integral entre los corchetes de la ecuación (13) es la radiación incidente dada por la ecuación (5) como $G(\vec{r})$. En la segunda integral, puesto que el termino $I_b(\vec{r})$ (representando la radiación del cuerpo negro el cual puede ser expresado como σT^4) no depende de las direcciones Ω , luego de ser integrada puede ser escrita como

$$\int_{4\pi} I_b(\vec{r}) d\Omega = I_b(\vec{r}) \int_{4\pi} d\Omega = 4\pi I_b(\vec{r}) \quad (14)$$

Luego de estas transformaciones, el termino fuente – sumidero, ecuación (11), se puede expresar como

$$\kappa [G(\vec{r}) - 4\pi I_b(\vec{r})] \quad (15)$$

La ecuación (15) con el signo negativo, como se la acostumbra a considerar en la literatura, es la divergencia del flujo de calor radiante, designada por $\nabla \cdot q$,

$$\nabla \cdot q = \kappa [4\pi I_b(\vec{r}) - G(\vec{r})] \quad (16)$$

2.4 Emisividad y absorptividad total del gas

La palabra *total* se usa aquí para enfatizar que la emisividad y absorptividad del gas se definen para el rango completo de longitudes de onda en lugar de un valor particular de longitud de onda. Las variables definidas para un valor específico de longitudes de onda se llaman variables monocromáticas o espectrales.

Las variables requeridas para definir la emisividad y absorptividad total del gas se definen

de la siguiente manera (Smith, Shen y Friedman, 1982; Trivic, 2004):

$$\varepsilon_g = f_1(L, p, P, C, T_g) \quad (17)$$

$$\alpha_{gs} = f_2(L, p, P, C, T_g, T_s) \quad (18)$$

Las dependencias de la emisividad y absorptividad total del gas sobre todas las otras variables son muy complejas y hasta la fecha no han sido expresadas en una forma matemáticamente explícita y conveniente.

Aquí C es la composición del gas. Esta se incluye para mostrar los efectos de las colisiones moleculares para diferentes especies. Debería mencionarse que la absorptividad total depende de las mismas variables que la emisividad total más la dependencia de la temperatura de la superficie que rodea al gas.

2.5 Modelo de la suma ponderada de gases grises WSGGM

Existen varios modelos de las propiedades radiativas de los gases, llamados globales, cuyos desarrollos están basados en el concepto de suma ponderada de gases grises. En este proyecto se sigue el modelo WSGG desarrollado por Smith, Shen y Friedman (1982).

En el WSGGM la emisividad se evalúa de la siguiente manera:

$$\varepsilon = \sum_{i=0}^I a_{\varepsilon,i}(T) [1 - e^{-\kappa_i P S}] \quad (19)$$

Donde $a_{\varepsilon,i}$ es el factor de peso de la emisividad para la componente de gas gris i los cuales dependen de la temperatura del gas T . La expresión entre corchetes en la ecuación (19) es la emisividad de la componente i del gas gris, siendo su coeficiente de absorción κ_i , presión parcial P y el espesor de la capa de gas o longitud de camino S . para una mezcla de gases, P es la suma de las presiones parciales de los gases absorbentes. La interpretación física del factor de peso $a_{\varepsilon,i}$ es la cantidad fraccional de energía del cuerpo negro en las regiones del espectro donde existe el gas gris con coeficiente de absorción κ_i . Al coeficiente de absorción κ_i se le asigna un valor nulo para $i = 0$. Esta componente de gas se llama gas limpio y tiene en cuenta las *ventanas* en el espectro entre las regiones espectrales que tienen absorción. La emisividad total crece con el producto de la presión parcial y la longitud de camino y tiene como límite máximo la unidad. Por lo tanto la sumatoria de los factores de peso es igual a la unidad y además deben tener valor positivo. El factor de peso para el gas limpio $i = 0$ se define como

$$a_{\varepsilon,0}(T) = 1 - \sum_{i=1}^I a_{\varepsilon,i} \quad (20)$$

De esta manera se deben evaluar la cantidad I de factores de pesos. La dependencia de los factores de peso con la temperatura se expresa en forma polinomial de orden $J - 1$ dada por

$$a_{\varepsilon,i}(T) = \sum_{j=1}^J b_{\varepsilon,i,j} T^{j-1} \quad (21)$$

Aquí $b_{\varepsilon,i,j}$ son los coeficientes del polinomio de la emisividad del gas. Los coeficientes de

absorción κ_i y los coeficientes del polinomio $b_{e,i,j}$ se obtienen ajustando la ecuación (19) a una tabla de emisividades totales previamente calculadas usando el método exponencial de banda ancha EWBM, el cual tiene un grado de precisión mucho mayor que el WSGGM considerado en esta trabajo. Para la absorptividad total, se debe tener en cuenta la temperatura de irradiación de las superficies que rodean al gas T_s . De esta manera, la expresión para la absorptividad total resulta:

$$\alpha = \sum_{i=0}^I a_{\alpha,i}(T, T_s) [1 - e^{-\kappa_i P S}] \quad (22)$$

El valor del factor de peso para $i = 0$ se evalúa como

$$a_{\alpha,0} = 1 - \sum_{i=1}^I a_{\alpha,i} \quad (23)$$

La dependencia de los factores de peso sobre las temperaturas del gas y de irradiación de las superficies se expresa por polinomios de orden $J - 1$ y $K - 1$, respectivamente, de la siguiente manera:

$$a_{\alpha,i} = \sum_{j=1}^J \left[\sum_{k=1}^K c_{\alpha,i,j,k} T_s^{k-1} \right] T^{j-1} \quad (24)$$

Donde $c_{\alpha,i,j,k}$ son los coeficientes del polinomio de absorptividad. Los coeficientes de absorción κ_i se toman igual para la emisividad y absorptividad total con el objeto de reducir el esfuerzo computacional, pero el orden de los polinomios respectivos puede ser diferente.

2.6 Modificación de la ecuación de la transferencia radiante para usarla acoplada al WSGGM

La ecuación integro – diferencial general de la transferencia radiante, valida cuando la radiación se modela para un solo gas gris, se debe modificar para acoplarla al WSGGM. Se deriva un nuevo conjunto de ecuaciones, cada una de ellas para una componente del gas gris, con sus respectivos factores de peso para la emisividad y absorptividad.

Sustituyendo la ecuación (3) en la ecuación (1), la ecuación de la transferencia radiante para una sola componente de gas gris se expresa como:

$$\frac{dI(\vec{r}, \hat{s})}{ds} = -\beta(\vec{r})I(\vec{r}, \hat{s}) + \kappa(\vec{r})I_b(\vec{r}) + \frac{\sigma(\vec{r})}{4\pi} \int_{4\pi} I(\vec{r}, \hat{s}') \Phi(\hat{s}', \hat{s}) d\Omega' \quad (25)$$

El acople entre la ecuación de la transferencia radiante para una sola componente de gas gris con el modelo WSGG se basa en que a cada componente de gas le corresponde una ecuación de transferencia radiante. De esta manera, la ecuación de la transferencia radiante para cada componente de gas gris se escribe como:

$$\frac{dI_{g,i}(\vec{r}, \hat{s})}{ds} = -\beta_{g,i}(\vec{r})I_{g,i}(\vec{r}, \hat{s}) + \kappa_{g,i}(\vec{r})I_b(\vec{r})a_{e,i}(T) + \frac{\sigma(\vec{r})}{4\pi} \int_{4\pi} I_{g,i}(\vec{r}, \hat{s}') \Phi(\hat{s}', \hat{s}) d\Omega' \quad (26)$$

Aquí el coeficiente de extinción esta dado por

$$\beta_{g,i}(\vec{r}) = \kappa_{g,i}(\vec{r}) + \sigma(\vec{r}) \quad (27)$$

La condición de borde dada por la ecuación (4), para un solo gas gris, se debe modificar para tener en cuenta cada una de las componentes del gas gris, así la condición de borde aplicada al modelo WSGG resulta:

$$I_{g,i}(\vec{r}, \hat{s}) = \varepsilon(\vec{r})I_b(\vec{r})a_{\varepsilon,i}(T, T_s) + \frac{\rho(\vec{r})}{\pi} \int_{\hat{s}' \cdot \vec{n} < 0} I_{g,i}(\vec{r}, \hat{s}') |\hat{s}' \cdot \vec{n}| d\Omega' \quad (28)$$

De la misma manera, el término fuente – sumidero dado por la ecuación (11) resulta:

$$\kappa_{g,i}(\vec{r}) \int_{4\pi} [I_{g,i}(\vec{r}, \hat{s}) - a_{\varepsilon,i}(T)I_b(\vec{r})] d\Omega \quad (29)$$

El término fuente – sumidero total, cuando el modelo WSGG se aplica a todas las componentes del gas gris, es igual a la sumatoria de todas las componentes de la ecuación (29), es decir:

$$\sum_{i=1}^I \kappa_{g,i}(\vec{r}) \int_{4\pi} [I_{g,i}(\vec{r}, \hat{s}) - a_{\varepsilon,i}(T)I_b(\vec{r})] d\Omega \quad (30)$$

Aplicando el concepto del método WSGG, la energía radiante total transferida por todas las componentes del gas gris resulta:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^I \frac{dI_{g,i}(\vec{r}, \hat{s})}{ds} &= -\sum_{i=1}^I \beta_{g,i}(\vec{r})I_{g,i}(\vec{r}, \hat{s}) + \sum_{i=1}^I \kappa_{g,i}(\vec{r})I_b(\vec{r})a_{\varepsilon,i}(T) \\ &+ \sum_{i=1}^I \frac{\sigma(\vec{r})}{4\pi} \int_{4\pi} I_{g,i}(\vec{r}, \hat{s}) \Phi(\hat{s}', \hat{s}) d\Omega' \end{aligned} \quad (31)$$

2.7 Ecuaciones de la transferencia de calor radiante modificadas para ser usadas por el modelo WSGG

La radiación incidente total, proveniente de todas las direcciones, dada para cada componente de gas gris por la ecuación (5), resulta:

$$G_{\text{tot}}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^I G_{g,i}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^I \int_{4\pi} I_{g,i}(\vec{r}, \hat{s}) d\Omega \quad (32)$$

El flujo de calor total, en la dirección del vector unitario i , dada para cada componente del gas gris por la ecuación (6), resulta:

$$q_{i,\text{tot}}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^I q_{i,g,i}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^I \int_{4\pi} I_{g,i}(\vec{r}, \hat{s}) (\hat{s} \cdot \hat{i}) d\Omega \quad (33)$$

De la misma manera, los flujos de calor total en las direcciones x , y , z resultan

$$q_{x,\text{tot}}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^I q_{x,g,i}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^I \int_{4\pi} I_{g,i}(\vec{r}, \hat{s}) (\hat{s} \cdot \hat{e}_x) d\Omega \quad (34)$$

$$q_{y,\text{tot}}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^I q_{y,g,i}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^I \int_{4\pi} I_{g,i}(\vec{r}, \hat{s}) (\hat{s} \cdot \hat{e}_y) d\Omega \quad (35)$$

$$q_{z,\text{tot}}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^I q_{z,g,i}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^I \int_{4\pi} I_{g,i}(\vec{r}, \hat{s})(\hat{s} \cdot \hat{e}_z) d\Omega \quad (36)$$

Luego de integrar la ecuación (30), el termino fuente – sumidero total resulta

$$\sum_{i=1}^I \kappa_{g,i}(\vec{r}) [G_{g,i}(\vec{r}, \hat{s}) - 4\pi a_{e,i}(T) I_b(\vec{r})] \quad (37)$$

La divergencia total del flujo de calor radiante, igual a la suma de las divergencias de cada componente del gas gris, expresadas por la ecuación (16), resulta:

$$\nabla \cdot q_{\text{tot}} = \sum_{i=1}^I \nabla \cdot q_{g,i} = \sum_{i=1}^I \kappa_{g,i} [4\pi a_{e,i}(T) I_b(\vec{r}) - G_{g,i}(\vec{r})] \quad (38)$$

3 DETALLES NUMÉRICOS

La ecuación de la transferencia radiante total para todas las componentes del gas gris, ecuación 31, se resuelve por el método de los volúmenes finitos, el cual ha sido extensamente usado para resolver problemas de transporte radiante (Raithby y Chui, 1990; Chui y Raithby, 1993; Chai, Lee y Patankar, 1994; Chai, Parthasarathy, Lee y Patankar, 1995; Kim y Beak, 1997; Gonçalves y Coelho, 1997).

El dominio espacial ha sido discretizado en 100 volúmenes de control para la coordenada espacial x en la placa unidimensional y en $21 \times 21 \times 21$ volúmenes de control en las coordenadas x, y, z en la cavidad tridimensional. El dominio angular ha sido discretizado en 90 direcciones polares para la geometría unidimensional y 18×36 direcciones polares y azimutales para el problema tridimensional.

Se han utilizado tres componentes de gases grises más una componente de gas transparente.

En este trabajo se ha utilizado el esquema de interpolación conocido como *step*, análogo al esquema *upwind* utilizado en dinámica de fluidos computacional, donde el valor de la cantidad física en la frontera del volumen de control aguas abajo se toma igual al del centro del volumen de control aguas arriba.

El proceso de cálculo de la intensidad de radiación térmica I_p^l se repite para cada dirección y cada volumen de control hasta que se satisface la condición de convergencia

$$\frac{|(I_p^l)^{n+1} - (I_p^l)^n|}{(I_p^l)^n} \leq 10^{-5} \quad (39)$$

Donde n es el índice de actualización de I_p^l en el proceso de cálculo.

4 CONFIGURACIONES GEOMÉTRICAS Y TÉRMICAS

Se estudian dos cavidades, una cavidad unidimensional compuesta de dos placas planas, infinitas, paralelas y separadas una longitud L_x , y una cavidad tridimensional rectangular de dimensiones $L_x = 2$ m, $L_y = 2$ m y $L_z = 4$ m. Ambas cavidades están rellenas con vapor de agua a la presión atmosférica. Las superficies de las cavidades son opacas, grises y difusas.

Para la cavidad unidimensional se han considerado tres configuraciones térmicas diferentes compuestas de (i) un perfil de temperatura constante, $T_g = 1000$ K, con emisividades $\varepsilon_o = \varepsilon_e =$

1.0 y temperaturas $T_o = T_e = 0$ K, en las paredes, y dos longitudes $L_x = 0.1$ y 1.0 m; (ii) dos perfiles de temperatura parabólicos, (iia) perfil utilizado por Kim (1990) con temperaturas en $T(l=0) = T(l=1) = 400$ K y $T(l=0.5) = 1111$ K y $L_x = 0.05$ m, y (iib) el perfil utilizado por Kim, Menart y Lee (1991) con temperaturas en $T(l=0) = T(l=1) = 400$ K y $T(l=0.5) = 900$ K y $L_x = 0.4$ m, en ambos casos con emisividades $\varepsilon_o = \varepsilon_e = 0.99$ y temperaturas $T_o = T_e = 0$ K en las paredes; (iii) un perfil tipo capa límite con $T(l=0) = 1500$ K y $T(l=1) = 300$ K, $\varepsilon_o = \varepsilon_e = 1.0$ y temperaturas $T_o = 1500$ y $T_e = 300$ K y $L_x = 0.2$ m, donde l es una coordenada local adimensional, $l = x/L_x$.

Perfil de temperatura	L_x [m]	Kim (1990)				Rebollo
		CNBM		NCNBM	NCWBM	WSGGM
		τ_v (μ)	MBL	MBL	MBL	
Uniforme	0.1	14.72 (0%)	15.58 (5.8%)	14.06 (4.5%)	15.24 (3.5%)	14.187 3.62%
	0.5	25.52 (0%)	26.53 (3.9%)	23.85 (6.5%)	23.94 (6.2%)	21.688 15.02%
		29.94 (0%)	30.95 (3.4%)	27.79 (7.1%)	26.98 (9.9%)	24.922 16.76%
Parabólico	0.05	8.73 (0%)	9.34 (7.0%)	9.48 (8.6%)	10.62 (21.6%)	8.938 2.38%
Capa Límite	0.2	263.63 (0%)	263.31 (0.1%)	264.66 (0.4%)	260.86 (1.1%)	269.676 2.29%

Tabla 1: Flujo de calor neto en las paredes de la cavidad unidimensional (KW / m²)

Para la cavidad tridimensional se considera el medio a una temperatura uniforme $T_g = 1000$ K, rodeado de paredes negras, emisividades $\varepsilon = 1.0$, a una temperatura $T_s = 300$ K.

Todas las magnitudes usadas están expresadas en el sistema internacional de medidas. La descripción detallada de las configuraciones estudiadas y reproducidas en este trabajo, se puede encontrar en los trabajos de Kim (1990), Kim, Menart y Lee (1991), Liu (1999), Coelho (2002) y Trivic (2004).

5 RESULTADOS Y DISCUSIONES

5.1 Cavidad unidimensional

En las tablas 1, 2 y 3 se muestran los flujos de calor en las paredes de la placa plana, para todas las configuraciones térmicas, publicados por diferentes autores y los resultados obtenidos en este trabajo junto con los errores relativos correspondientes.

La tabla 1 corresponde a los resultados publicados por Kim (1990) obtenidos con el método de las ordenadas discretas con 16 direcciones angulares y 27 puntos espaciales, aplicando modelos espectrales de banda estrecha correlacionados CNBM y no correlacionados NCNBM y banda ancha no correlacionados NCWBM. Además, se incluyen los resultados correspondientes a este trabajo junto con los errores calculados por Kim, entre paréntesis, para distinguirlos de los calculados en este trabajo. Para el cálculo del error Kim utilizo los resultados correspondientes al modelo de la longitud de camino y banda estrecha correlacionado, individualizado con τ_v (μ), como los valores exactos correspondiéndoles el valor de error cero. Con el mismo criterio, se calcularon los errores correspondientes en este trabajo. Para el perfil de temperatura uniforme, se obtienen muy buenos resultados para $L_x =$

0.1, pero el error comienza a crecer con L_x y alcanza valores muy altos respecto a los valores publicados. Para el perfil parabólico, se obtienen resultados excelentes, para el perfil de capa límite, los resultados son aceptables.

Perfil de temperatura	L_x [m]	Kim, Menart y Lee (1991)				Soufani, Hartmann y Taine (1985)		Boutoub, Benticha y Sassi (2006)	Rebollo
		NBM		WBM		NBM	WBM	WSGGM	WSGG M
		NG	G	NG	G	NG	G		
Uniforme	0.1	14.3 0%	14.0 2.10%	14.4 0.70%	14.1 1.40%	14.2 0.70%	14.3 0.00%	14.53 1.61%	14.187 0.79%
	1.0	28.2 0%	27.7 1.77%	27.6 2.13%	26.3 6.74%	28.1 0.35%	27.4 2.84%	26.60 5.67%	24.922 11.62%
Parabólico	0.4	6.7 0%	8.0 19.40%	6.6 1.49%	8.1 20.90%	6.8 1.49%	6.5 2.99%		6.212 7.28%
		277.4 0%	278.5 0.40%	277.0 0.14%	281.7 1.55%	277.7 0.11%	276.7 0.25%		269.676 2.78%

Tabla 2: Flujo de calor neto en las paredes de la cavidad unidimensional (KW / m²)

Perfil de temperatura	L_x [m]	Liu, Gulder, Smallwood y Ju (1998)				Rebollo
		RTM CNBM	RTM NCNBM	DOM NBM GG	DOM NBM GL	WSGGM
Uniforme	0.1	14.2 0%	17.6 23,94%	14.1 0,70%	17.6 23,94%	14.187 0,09%
	1.0	30.3 0%	34.0 12,21%	29.9 1,32%	34.0 12,21%	24.922 17,75%
Capa Limite	0.2	271.5 0%	270.9 0,22%	272.8 0,48%	270.7 0,29%	269.676 0,67%

Tabla 3: Flujo de calor neto en las paredes de la cavidad unidimensional (KW / m²)

En la Tabla 2 se muestran los resultados publicados por Kim, Menart y Lee (1991), quienes incluyeron resultados publicados Soufani, Hartmann y Taine (1985), obtenidos con el método de las ordenadas discretas, con 20 direcciones angulares y 21 puntos espaciales, combinados con los modelos espectrales de banda estrecha NBM y banda ancha WBM, gris G y no gris NG, respectivamente. También se incluyen resultados publicados por Boutoub, Benticha y Sassi (2006) que, como los resultados de este trabajo, fueron obtenidos con el método de los volúmenes finitos combinado con el modelo de la suma ponderada de gases grises WSGGM utilizando los coeficientes dados por Smith, Shen y Friedman (1982). También se incluyen los errores relativos, calculados en este trabajo, considerando los resultados de banda estrecha no gris de Kim como la solución exacta. Para el perfil de temperatura uniforme se verifica que los resultados para $L_x = 0.1$ m son muy precisos, pero para $L_x = 1.0$ m se obtienen errores importantes. Para el perfil parabólico se obtienen buenos resultados y para el perfil de capa límite, los resultados obtenidos son aceptables.

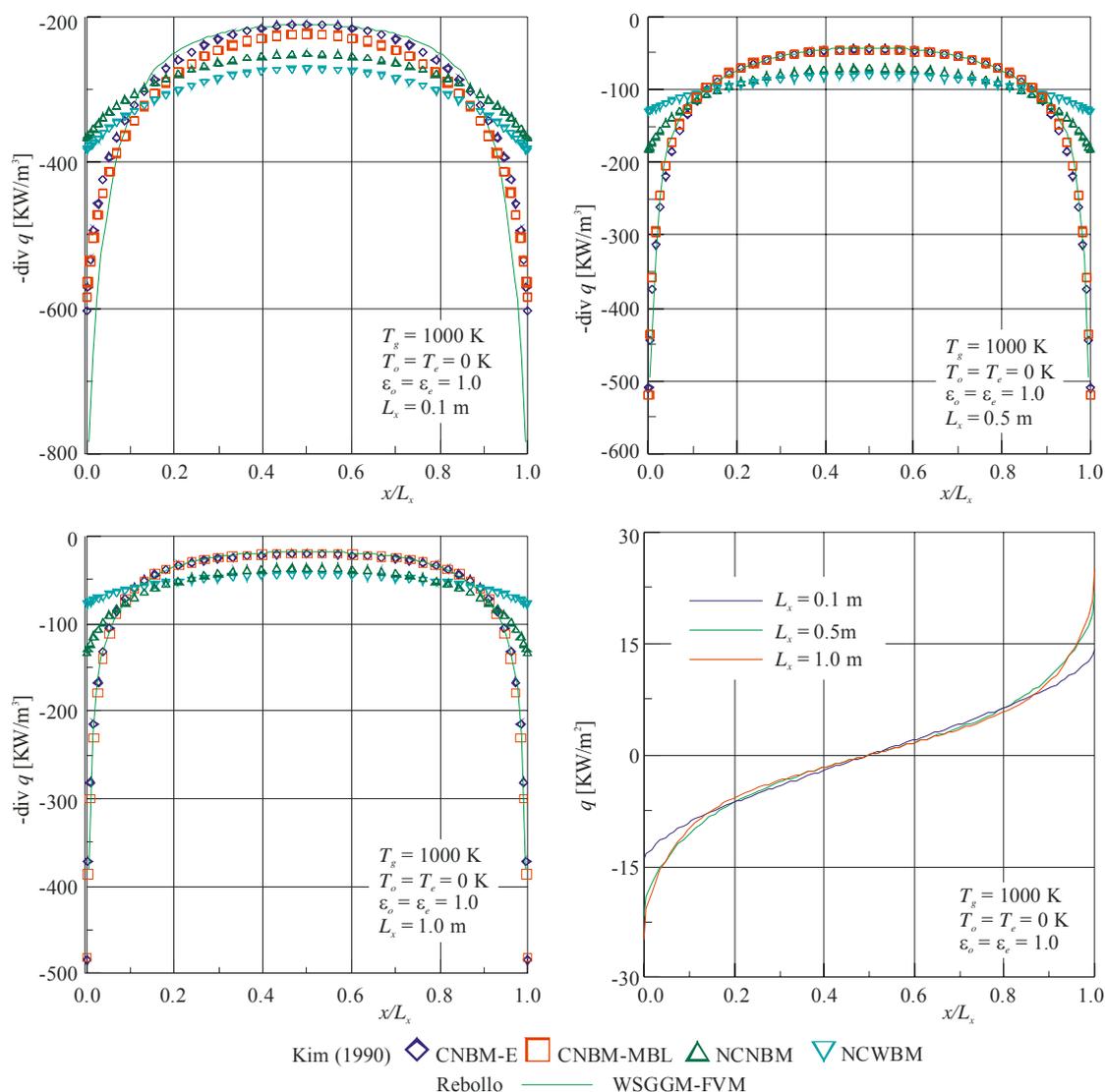


Figura 1: Fuente radiante y flujo de calor para el perfil de temperatura uniforme.

En la Tabla 3 se presentan los resultados publicados por Liu, Gulder, Smallwood y Ju (1998) obtenidos con dos métodos, trazo de los rayos RTM y ordenadas discretas DOM, combinados con el método espectral de banda estrecha NBM, también se muestran los resultados obtenidos en este trabajo. Se incluyen además, los errores calculados en este trabajo utilizando como valor exacto los resultados correspondientes al método de trazo de los rayos combinado con el método espectral de banda estrecha no correlacionado. Como en los casos anteriores, para el perfil de temperatura constante, se obtienen buenos resultados para $L_x = 0.1$ m, pero los errores crecen con L_x . Para el perfil de capa límite, los resultados son aceptables.

Del análisis de resultados mostrados en las tablas 1, 2 y 3 se puede concluir que, para el perfil de temperatura constante, se obtienen buenos resultados para pequeñas separaciones de placa, desmejorando con el aumento de la separación. Para los perfiles parabólicos y de capa límite los resultados son aceptables. Los resultados en general son buenos teniendo en cuenta que se están comparando con resultados obtenidos por modelos espectrales mucho más

precisos pero que requieren un gran esfuerzo de cálculo.

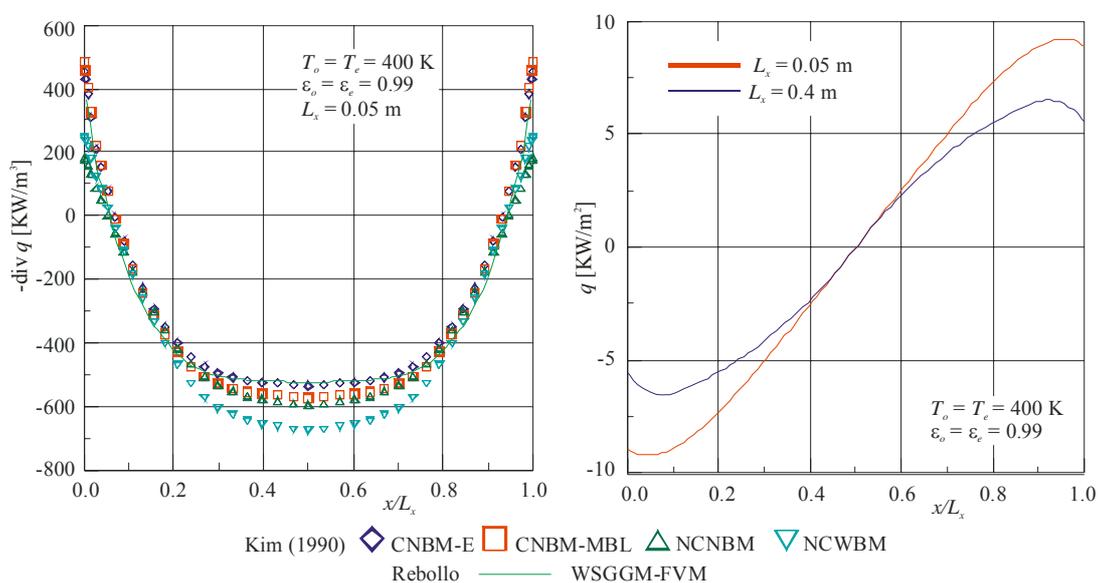


Figura 2: Fuente radiante y flujo de calor para el perfil de temperatura parabólico.

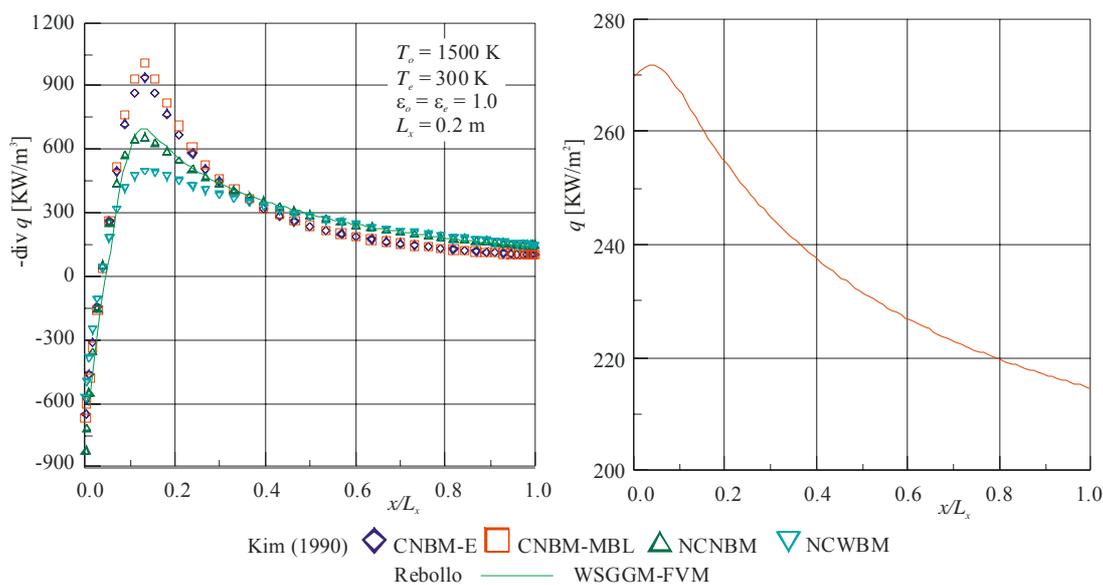


Figura 3: Fuente radiante y flujo de calor para el perfil de temperatura tipo capa límite.

En las figuras 1 a 3 se muestran la distribución de la fuente de calor o divergencia $\nabla \cdot q_{\text{tot}}$, calculada con la ecuación (38), y la distribución del flujo de calor $q_{x,\text{tot}}$, calculado con la ecuación (34). Como Kim (1990) publicó sus resultados en forma grafica y tabular, estos resultados, obtenidos con los modelos espectrales ya descritos en los comentarios pertinentes a la tabla 1, se incluyen también en las figuras 1 a 3.

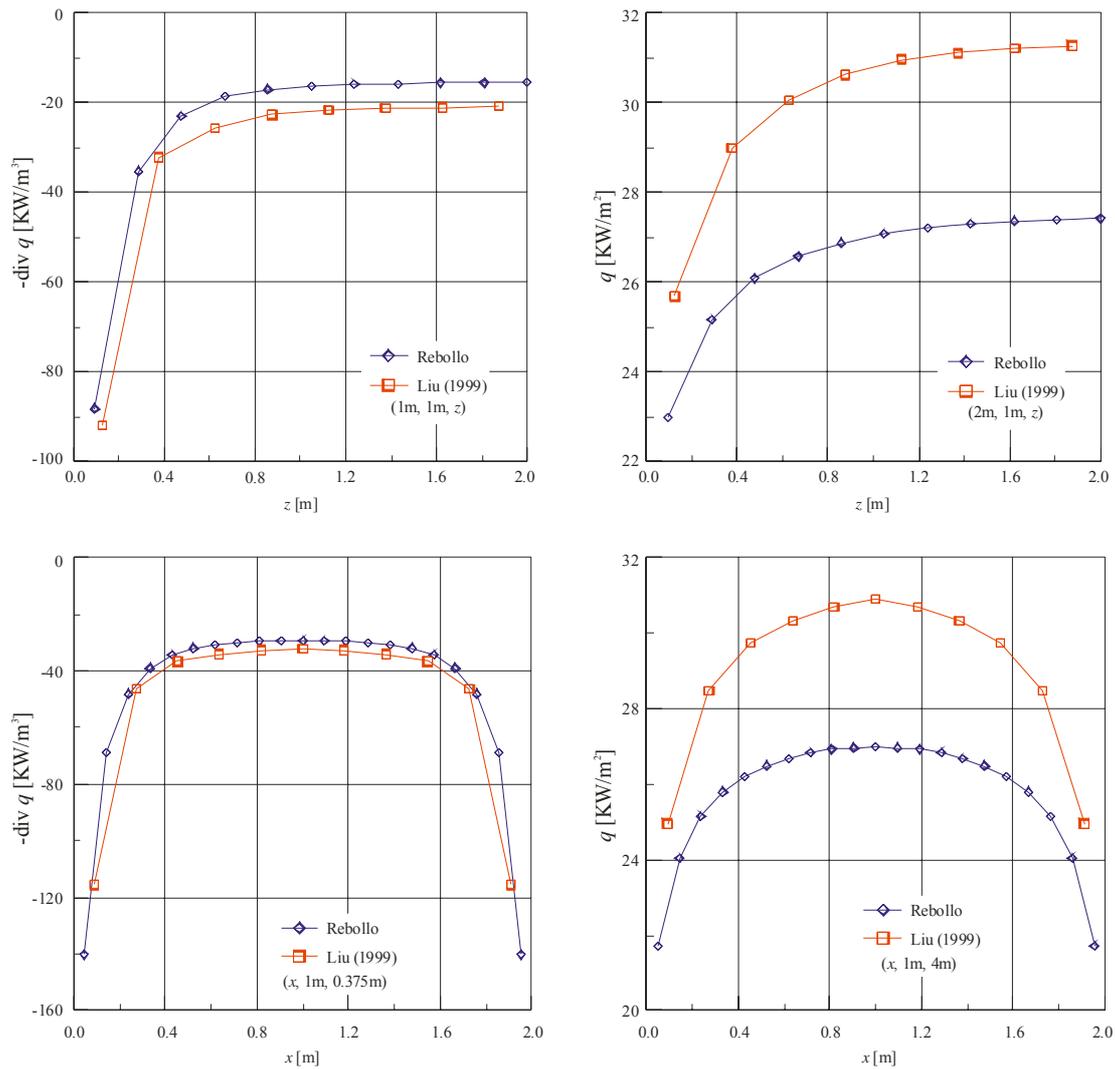


Figura 4: Fuente radiante a lo largo de la línea central de la cavidad (1 m, 1 m, z), flujo de calor incidente a lo largo de la línea central de la pared oeste (2 m, 1 m, z), fuente radiante a lo largo de la línea (x, 1 m, 0.375 m) y flujo de calor a lo largo de la línea central de la pared superior (x, 1 m, 4 m).

En la figura 1, correspondiente al perfil de temperatura uniforme, se observa que el modelo de la suma ponderada de gases grises sigue perfectamente los resultados de Kim (1990) obtenidos con el modelo espectral de banda estrecha correlacionado, el cual se considera como la solución exacta y fue utilizado para calcular el error en la tabla 1. En los extremos, se observa una desviación apreciable, en exceso para $L_x = 0.1$ m y por defecto para $L_x = 1.0$ m de los valores exactos de Kim, reduciéndose para $L_x = 0.5$ m. Con respecto al flujo de calor, los resultados mostrados muestran la distribución clásica y los valores en los extremos son coincidentes con los mostrados en la tabla 1.

Para el perfil parabólico, la figura 2 muestra que los resultados correspondientes a la fuente de calor obtenidos en este trabajo, siguen con bastante precisión los resultados exactos de Kim, siendo levemente inferiores en los extremos de la cavidad. En la figura 2 también se muestra la distribución clásica del flujo de calor para los dos perfiles parabólicos, $L_x = 0.05$ m y $L_x = 0.4$ m, correspondientes a las tablas 1 y 2 respectivamente.

La figura 3, correspondiente al perfil tipo capa límite, muestra una diferencia apreciable, en la zona de temperatura máxima, entre los valores de la fuente de calor, obtenidos en este

trabajo, y los resultados exactos de Kim. También se muestra la distribución del flujo de calor.

Representaciones graficas, similares a las mostrados en las figuras 1 a 3, se pueden encontrar en los trabajos de Kim, Menart y Lee (1991), Boutoub Benticha y Sassi (2006) y Liu, Gulder, Smallwood y Ju (1998).

5.2 Cavidad tridimensional

Esta configuración geométrica fue estudiada por Liu (1999), Coelho (2002) y Trivic (2004) cuyos resultados son comparados con los obtenidos en este trabajo. Liu presento sus resultados en forma tabular por lo que han sido incorporados a las figuras presentadas en este trabajo. Lo mismo hicieron Coelho y Trivic, pero sus resultados, presentados en forma grafica, no han podido ser incluidos en este trabajo por razones de espacio.

La figura 4 presenta la comparación de resultados correspondientes a la fuente de calor o divergencia $\nabla \cdot q_{tot}$, calculada con la ecuación (38), y el flujo de calor $q_{x,tot}$ y $q_{z,tot}$, calculado con la ecuación (34 y 36). Para la fuente de calor se aprecia que los resultados obtenidos subestiman (en valor absoluto) los resultados de Liu, pero para el flujo de calor ocurre lo contrario, sobrestiman los resultados de Liu. Esto mismo se puede apreciar en los resultados de Coelho y Trivic.

Es importante aclarar que los resultados de Kim (1990), Kim, Menart y Lee (1991) y Liu, Gulder, Smallwood y Ju (1998) fueron obtenidos con modelos espectrales mucho más precisos que el método de la suma ponderada de gases grises, los cuales que requiere un gran esfuerzo de cálculo. También es importante destacar que los coeficientes utilizados en este trabajo, igual que los utilizados por Coelho (2002), Trivic (2004) y Boutoub Benticha y Sassi (2006), corresponden a los de Smith, Shen y Friedman (1982), que fueron calculados para un rango de temperatura entre 600 K y 2400 K. Teniendo en cuenta que las configuraciones térmicas propuestas comprende un medio rodeado de paredes mas frías a 0 K, 300 K y 400 K, es evidente que en algunos porciones del interior de la cavidad la temperatura esta por debajo de los 600 K por lo que los coeficientes utilizados no serian los mas aptos. Lo anterior puede ser usado para justificar la diferencia de resultados mostrados en las figuras y tablas precedentes.

6 CONCLUSIONES

En este trabajo se ha desarrollado un código computacional para cálculo de radiación no gris en cavidades tridimensionales acoplado el método de los volúmenes finitos y el método de la suma ponderada de gases grises. Se ha desarrollado en forma detallada el método de los volúmenes finitos y el modelo de la suma ponderada de gases grises.

Se ha mostrado una gran cantidad de resultados y se han efectuado las comparaciones correspondientes. Los resultados fueron obtenidos para vapor de agua a la presión atmosférica. El modelo puede ser aplicado a cualquier gas a diferentes presiones para lo cual se necesita conocer los coeficientes polinomiales.

Las diferencia entre las predicciones obtenidas en este trabajo y los resultados publicados aparecen debido a que las temperaturas de las superficies están fuera del rango de temperaturas óptimas. Estas temperaturas tienen una fuerte influencia en el cálculo de absorptividad, ecuación (22), como en el cálculo de los factores de peso para la absorptividad, ecuación (24).

La precisión de las predicciones dependen fuertemente de la precisión con la cual se han obtenidos las propiedades del gas considerado. Se puede mejorar la precisión de las

predicciones incorporando más componentes de gases grises, lo que resulta en un mayor esfuerzo de cálculo.

La combinación del método de volúmenes finitos y el modelo de suma ponderada de gases grises se presenta como una opción óptima a la hora de resolver problemas de ingeniería que impliquen el transporte radiante. La simplicidad del modelo y su menor esfuerzo computacional lo hacen preferibles a modelos más precisos pero que requieren enormes cantidades de tiempo de cálculo.

REFERENCIAS

- Borjini M. N., Guedri K., Saïd R., Modeling of radiative heat transfer in 3D complex boiler with non-gray sooting media, *Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer*, 105:167-179, 2007.
- Boutboub A., Benticha H., Sassi M., Non – gray radiation analysis in participating media with the finite volume method, *Turkish J. Eng. Env. Sci.*, 30:183-192, 2006.
- Bressloff N. W., The influence of soot loading on weighted sum of grey gases solutions to the radiative transfer equation across mixtures of gases and soot, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 42:3469-3480, 1999.
- Brewster M. Q., *Thermal radiative transfer and properties*, John Wiley & Sons, 1992.
- Byun D., Baek S. W., Numerical investigation of combustion with non-gray thermal radiation and soot formation effect in a liquid rocket engine, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 50:412-422, 2007.
- Chai J. C., Lee H. S., Patankar S. V., *Finite Volume Method for Radiation Heat Transfer*, Journal of Thermophysics and Heat Transfer, vol. 8, no. 3, pp. 419-425, 1994.
- Chai J. C., Parthasarathy G., Lee H. S., Patankar S. V., *Finite Volume Radiative Heat Transfer Procedure for Irregular Geometries*, Journal of Thermophysics and Heat Mass Transfer, vol. 9, no. 3, pp. 410-415, 1995.
- Chui E. H., Raithby G. D., *Computation of radiant heat transfer on a non-orthogonal mesh using the finite-volume method*, Numerical Heat Transfer, Part B, vol. 23, no. 3, pp. 269-288, 1993.
- Coelho P. J., Numerical simulation of radiative heat transfer from non – gray gases in three – dimensional enclosures, *Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Heat Transfer*, 74:307-328, 2002.
- Coelho P. J., Numerical simulation of radiative heat transfer from non-gray gases in three-dimensional enclosures, *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer*, 74:307–328, 2002.
- Cumber P. S., Fairweather M., Ledin H. S., Application of wide band radiation models to no homogeneous combustion systems, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 41:1573–1584, 1998.
- Denison M. K., Webb B. W., The spectral line weighted-sum-of-gray-gases model: a review, *Proceedings of the First International Symposium on Radiative Transfer*, Turkey, 1995, Begell House Inc., pp.193–208, 1996.
- Denison M. K., Webb B. W., The spectral line-based weighted-sum-of-gray-gases model in no-isothermal no-homogeneous media, *J. Heat Transfer*, 117:359–365, 1995.
- Edwards D. K., *Molecular gas band radiation*, Advances in Heat Transfer, Academic Press, New York, 115–193, 1976.
- Gonçalves J., Coelho P., Parallelization of the finite volume method, *Second international symposium on radiation transfer*, Turkey, 1997.
- Goutiere V., Liu F., Charette A., An assessment of real-gas modeling in 2D enclosures, *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer*, 64:299–326, 2000.
- Kim M. Y., Beak S. W., Analysis of radiative transfer in cylindrical enclosures using the

- finite volume method, *Journal of Thermophysics and Heat Transfer*, 11:246-252, 1997.
- Kim O. J., Song T. H., Data base of WSGGM-based spectral model for radiation properties of combustion products, *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 64:379-394, 2000.
- Kim T. K., Menart J. A., Lee H. S., Nongray radiative gas analyses using the S-N discrete ordinates method, *Journal of Heat Transfer*, 113:946-952, 1991.
- Kim T. K., *Radiation and combined mode heat transfer analysis in absorbing, emitting, and Mie-anisotropic scattering media using the s-n discrete ordinates method*, Ph. D. Thesis, University of Minnesota, 1990.
- Liu F., Gülder Ö. L., Smallwood G. J., Ju Y., Non-grey gas radiative transfer analyses using the statistical narrow-band model, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 41:2227-2236, 1998.
- Liu F., Numerical Solutions of three - dimensional non - grey gas radiative transfer using the statistical Narrow - band model, *Journal of Heat Transfer*, 121:200-2003, 1999.
- Liu F., Becker H. A., Bindar Y., A comparative study of radiative heat transfer modelling in gas-fired furnaces using the simple grey gas and the weighted-sum-of-grey-gases models, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 41:3357-3371, 1998.
- Modest M. F., *Radiative heat transfer*, Mc Graw-Hill, 1993.
- Modest M. F., The weighted-sum-of-gray-gases model for arbitrary solution methods in radiative transfer, *J. Heat Transfer*, 113:650-656, 1991.
- Murayana S., Guo Z., Radiative heat transfer in arbitrary configurations with non-gray absorbing, emitting and anisotropic scattering media, *J. Heat Transfer*, 121:722-726, 1999.
- Pierrot L., Soufiani A., Taine J., Accuracy of narrow-band and global models for radiative transfer in H₂O, CO₂ and H₂O-CO₂ mixtures at high temperature, *Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer*, 62:523-548, 1999.
- Raithby G. D., Chui E. H., A Finite-Volume Method for Predicting Radiant Heat Transfer in Enclosures with Participating Media, *Journal of Heat Transfer*, 112:415-423, 1990.
- Siegel R., Howell J. R., *Thermal Radiation Heat Transfer*, Taylor & Francis, 1992.
- Smith T. F., Shen Z. F., Friedman J. N., Evaluation of coefficients for the weighted sum of gray gases model, *Journal of Heat Transfer*, 104:602-608, 1982.
- Soufiani A., E. Djavdan, A comparison between weighted sum of gray gases and statistical narrow-band radiation models for combustion applications, *Combust. Flame*, 97:240-250, 1994.
- Soufiani A., Taine J., High temperature gas radiative property parameters of statistical narrow-band model for H₂O, CO₂ and CO, and correlated-K model for H₂O and CO₂, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 40:987-991, 1997.
- Trivic, D. N. Modeling of 3-D non-gray Gases Radiation by coupling the Finite Volume Method with Weighted Sum of Gray Gases Model, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 47:1367-1382, 2004.
- Yu M. J., Baek S. W., Park J. H., An extension of the weighted sum of gray gases non-gray gas radiation model to a two phase mixture of non-gray gas with particles, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 43:1699-1713, 2000.