

## ANÁLISIS DINÁMICO DE CABLES EXTENSIBLES POCO TENSOS: MÉTODO DE DESCOMPOSICIÓN ORTOGONAL PROPIA

Mario R. Escalante<sup>a,b</sup>, Carlos P. Filipich<sup>a,c</sup>, Marta B. Rosales<sup>a,d</sup> y Rubens Sampaio<sup>e</sup>

<sup>a</sup>Dpto. de Ingeniería, Alem 1253, Universidad Nacional del Sur, 8000 Bahía Blanca, Argentina.

<sup>b</sup>Grupo de Métodos Numéricos en Ingeniería, F.R.C.U., Universidad Tecnológica Nacional, Ing. Pereyra 676, 3260 Concepción del Uruguay, Argentina, [escalam@frcu.utn.edu.ar](mailto:escalam@frcu.utn.edu.ar).

<sup>c</sup>CIMTA, F.R.B.B. Universidad Tecnológica Nacional, 11 de Abril 461, 8000 Bahía Blanca, Argentina, [cfilipich@yahoo.com.ar](mailto:cfilipich@yahoo.com.ar)

<sup>d</sup>CONICET, Argentina, [mrosales@criba.edu.ar](mailto:mrosales@criba.edu.ar)

<sup>e</sup>Dept. Engenharia Mecânica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, rua Marquês de São Vicente 225, 22453-900 Rio de Janeiro, Brasil. [rsampaio@mec.puc-rio.br](mailto:rsampaio@mec.puc-rio.br)

**Palabras clave:** cadenas, cables extensibles, POD, Karhunen-Loève.

**Resumen.** En este trabajo se resuelve el problema dinámico de cables extensibles bajo la acción de su propio peso y movimientos impuestos en sus extremos. Se aborda su estudio mediante una técnica ventajosa que parte de conocer el movimiento de un problema de características similares, como es el estudio dinámico de una cadena de eslabones rígidos. El problema dinámico de la cadena está gobernado por un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias con condiciones de borde y fue resuelto previamente por este grupo de investigación utilizando un algoritmo de series de potencias. La dinámica del cable extensible está, en cambio, gobernada por un sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales no lineales que es resuelto mediante el Método de Galerkin. El aporte del presente trabajo consiste en el uso de la base de funciones ortogonales de prueba que se obtiene mediante el Método de Descomposición Ortogonal Propia (Bases de Karhunen-Loève). Este método conocido por sus siglas en inglés POD (Proper Orthogonal Decomposition) ha ganado hoy en día popularidad y está siendo usado en numerosos campos. Aquí se plantea el modelo del cable extensible y sus ecuaciones gobernantes, se describe el POD y mediante ejemplos numéricos se ilustra su comportamiento dinámico. Los resultados son comparados con aquellos obtenidos en el estudio dinámico de cadenas para un gran número de eslabones; y también con los obtenidos para el cable extensible utilizando otras bases de funciones ortogonales (series trigonométricas). Se muestra que el aporte de los primeros POMs (Proper Orthogonal Modes) es suficiente para obtener excelentes resultados ya que la mayor parte de la dinámica original ( más de un 90%) se encuentra representada por ellos (a veces unos pocos modos).

## 1 INTRODUCCIÓN

En el presente trabajo se resuelve el problema dinámico de cables extensibles bajo la acción de su propio peso y movimientos impuestos en sus extremos. La dinámica de este problema está gobernada por un sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales que es resuelto mediante el Método de Galerkin. El aporte de este trabajo consiste en el uso del Método de Descomposición Ortogonal Propia para obtener el conjunto de funciones ortogonales (Bases de Karhunen-Loève) que requiere el Método de Galerkin y encontrar modelos reducidos de la dinámica del cable. Esto brinda una técnica ventajosa que parte de conocer el movimiento de un problema de características similares, como es el estudio dinámico de una cadena de eslabones rígidos, que fuera resuelto con anterioridad por los autores (Filipich and Rosales, 2007). Este método conocido por sus siglas en inglés POD (Proper Orthogonal Decomposition) ha ganado hoy en día popularidad y está siendo usado en numerosos campos.

La descomposición es representada por una combinación lineal de funciones (POMs) cuyos coeficientes temporales son obtenidos a través de la proyección de la dinámica sobre cada uno de sus modos, exactamente como en una serie de Fourier. El número de modos usados define la dimensión del modelo reducido usado para representar la dinámica. Es interesante notar que, para el caso de que la descomposición, también llamada expansión de Karhunen-Loève, sea aplicada a datos recolectados de un experimento físico, es posible una formulación de un modelo matemático para un sistema dinámico sin un conocimiento anterior sobre él.

Las primeras aplicaciones de Karhunen-Loève en el ámbito de la Ingeniería Mecánica surgieron en el estudio de escurrimientos turbulentos (Lumley, 1971; Holmes et al. 1996) en dónde fue conocida también como Descomposición Ortogonal Propia. Un tratamiento riguroso de la expansión de Karhunen-Loève fue presentado por Sirovich (Sirovich, 1987a,b,c). En el primer artículo desarrolla toda la teoría del método en forma general y son demostradas sus principales propiedades. En ese mismo artículo presenta un método de construcción práctica de la expansión conocido como método de los retratos (snapshots method). En el último de los tres artículos muestra justamente como la expansión puede ser usada conjuntamente con el método de Galerkin para producir un sistema de dimensión reducida, que aún así, reproduce las características del sistema original.

En una generalización, Breuer y Sirovich (Breuer and Sirovich, 1991) mostraron como la expansión de KL puede usarse para determinar las autofunciones de operadores lineales cualesquiera. Este resultado está íntimamente ligado con la determinación de los modos de vibraciones de problemas lineales.

Park and Cho (1996) discutieron el uso de los POMs como funciones de prueba en el método de Galerkin, para la obtención de un modelo reducido en el caso de sistemas de parámetros distribuidos (sistemas continuos). Como ejemplo fue estudiado un problema de conducción de calor no lineal, en un dominio irregular.

En el área de la dinámica estructural, el uso de las KLE para análisis y simulación es relativamente reciente y limitado. Kreuzer (1978) lo introduce en el estudio de vibración torsional de columnas de perforación. Steindl y coautores (Steindl et al. 1997; Steindl y Troger, 2001) utilizaron los POMs para obtener modelos de dimensión reducida vía proyección de Galerkin para los casos de vibración de tubos con escurrimiento interno de fluidos y de un péndulo sujeto a una fuerza seguidora. Actualmente, la metodología ha despertado interés creciente en la dinámica estructural.

## 2 FORMULACIÓN MATEMÁTICA DEL MÉTODO DE DESCOMPOSICIÓN ORTOGONAL PROPIA.

Sea  $\theta(x,t)$  un campo aleatorio sobre un dominio  $\Omega$ . Este campo es descompuesto en la media  $\mu(x)$  y las partes variables en el tiempo  $\mathcal{G}(x,t)$ :

$$\theta(x,t) = \mu(x) + \mathcal{G}(x,t) \quad (1)$$

En el instante  $t_k$ , el campo presenta un estado instantáneo (retrato, en inglés: snapshots)  $\mathcal{G}^k(x) = \mathcal{G}(x, t_k)$ . El método de descomposición ortogonal propia permite obtener la mejor caracterización del comportamiento estructural  $\varphi(x)$  mediante un ensamble de retratos del campo  $\mathcal{G}(x,t)$ . Esto es equivalente a encontrar una base de funciones  $\varphi(x)$  que maximiza el ensamble medio de los productos internos entre  $\mathcal{G}^k(x)$  y  $\varphi(x)$ , esto es:

$$\text{Maximizar } \left\langle \left| (\mathcal{G}^k, \varphi) \right|^2 \right\rangle \text{ con } \|\varphi\|^2 = 1 \quad (2)$$

donde  $(f, g) = \int_{\Omega} f(x)g(x)d\Omega$  denota el producto interno en  $\Omega$ ;  $\langle \cdot \rangle$ : denota la operación de promediado;  $\|\cdot\| = (\cdot, \cdot)^{1/2}$ : denota la norma;  $|\cdot|$ : denota el módulo.

La expresión (2) significa que si el campo  $\mathcal{G}$  es proyectado sobre  $\varphi$ , la energía media es mayor que si el campo es proyectado sobre cualquier otra base de funciones.

La restricción  $\|\varphi\|^2 = 1$ , impuesta para hacer el cálculo único, puede ser tenida en cuenta mediante el uso de un multiplicador de Lagrange:

$$J[\varphi] = \left\langle \left| \mathcal{G}, \varphi \right|^2 \right\rangle - \lambda (\|\varphi\|^2 - 1) \quad (3)$$

El extremo es alcanzado cuando la derivada del funcional es igual a cero. Esta condición se reduce al siguiente problema integral de autovalores:

$$\int_{\Omega} \left\langle \mathcal{G}^k(x), \mathcal{G}^k(x') \right\rangle \varphi(x') dx' = \lambda \varphi(x) \quad (4)$$

donde  $\left\langle \mathcal{G}^k(x), \mathcal{G}^k(x') \right\rangle$  es la función de autocorrelación promediada.

La solución al problema de optimización (2) está, de este modo, dado por las autofunciones ortogonales  $\varphi_i(x)$  de la ecuación integral (4), llamadas *modos ortogonales propios* (Proper Orthogonal Modes: POMs). Los correspondientes autovalores  $\lambda_i$  ( $\lambda_i \geq 0$ ) son los *valores ortogonales propios* (Proper Orthogonal Values: POVs). Los POMs pueden ser usados como una base para la descomposición del campo  $\mathcal{G}(x,t)$ :

$$\mathcal{G}(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i(t) \varphi_i(x) \quad (5)$$

donde los coeficientes  $a_i(t)$  no están correlacionados, esto es,  $\langle a_i(t), a_j(t) \rangle = \delta_{ij} \lambda_i$  y están determinados por  $a_i(t) = (\mathcal{G}(x,t), \varphi_i(x))$ . Se puede demostrar que el POM asociado con el mayor POV es el vector óptimo que caracteriza el ensamble de los retratos.

El POM asociado con el segundo mayor POV es el vector óptimo para caracterizar el ensamble de retratos pero restringido al espacio ortogonal del primer POM, y así sucesivamente.

La energía  $\varepsilon$  contenida en los datos está definida como la suma de los POVs, esto es,

$\varepsilon = \sum_j \lambda_j$  y el porcentaje de energía capturado por el  $i$ -ésimo POM está dado por  $\varepsilon_{ri} = \lambda_i / \sum_j \lambda_j$ .

## 2.1 Aplicación práctica del método

Supongamos que se desea aproximar una función  $z(x,t)$  definida sobre algún dominio de interés como una suma finita en la forma de variables separadas

$$z(x,t) \approx \sum_{k=1}^M a_k(t) \Phi_k(x) \quad (6)$$

con la razonable expectativa de que la aproximación se vuelva exacta en el límite para  $M$  tendiendo a infinito, excepto posiblemente en un conjunto de medida cero.

Si bien, en la ecuación (6), no hay diferencia fundamental entre  $t$  y  $x$ , usualmente pensamos a  $x$  como la coordenada espacial (posiblemente una variable vectorial) y  $t$  la coordenada temporal.

La representación de la ecuación (6) no es única. Por ejemplo, si el dominio de  $x$  está acotado al intervalo  $I$  sobre el eje real, entonces las funciones  $\Phi_k(x)$ , por ejemplo, pueden corresponder a los de una Serie de Fourier, Polinomios de Legendre o de Chebyshev, entre otras. Para cada elección de secuencias  $\Phi_k(x)$  que forman una base para algunas clases de funciones adecuadas  $z(x,t)$ , la secuencia de funciones del tiempo  $a_k(t)$  es diferente. El POD permite encontrar una posible alternativa para las funciones  $\Phi_k(x)$ .

Si hemos elegido una base de funciones ortonormales, esto es

$$\int_I \Phi_j(x) \Phi_k(x) dx = \begin{cases} 1 & \text{si } j \neq k \\ 0 & \text{si } j = k \end{cases} \quad (7)$$

entonces

$$a_k(t) = \int_I z(x,t) \Phi_k(x) dx \quad (8)$$

de modo que para una base de funciones ortonormales, las funciones coeficientes  $a_k(t)$  dependen sólo de  $\Phi_k(x)$ .

¿Qué criterio se debería usar para seleccionar las funciones  $\Phi_k(x)$ ? Ortonormalidad sería de utilidad. Más aún, la aproximación con cualquier precisión arbitraria deseada en la ecuación (6) puede ser siempre obtenida si  $M$  es suficientemente grande, si elegimos las funciones  $\Phi_k(x)$  de modo que la aproximación para cada  $M$  sea la mejor en el sentido de los mínimos cuadrados. Esto es, podríamos intentar encontrar, una secuencia de funciones ortonormales  $\Phi_k(x)$  de manera que las dos primeras de estas funciones den la mejor aproximación posible de dos términos, las siete primeras den la mejor aproximación posible de siete términos, etc.

Estas funciones especiales, ordenadas, son los Modos Ortogonales Propios de la función  $z(x,t)$ . Con estas funciones, la expresión (6) es llamada Descomposición Ortogonal Propia de  $z(x,t)$ .

## 2.2 Caso de dimension finita

En la práctica, los datos están discretizados en el espacio y el tiempo. Supongamos que en  $n$  instantes de tiempos diferentes  $t_1 \dots t_n$ , tomamos  $n$  valores instantáneos de las  $m$  variables

(vector  $m$ -dimensional). Ordenamos estos valores en una matriz  $\hat{X}$  de  $m \times n$  de tal forma que cada elemento  $x_{ij}$  es la medida de la  $i$ -ésima variable tomada en el  $j$ -ésimo instante, esto es,

$$\hat{X} = [\mathbf{x}_1 \quad \cdots \quad \mathbf{x}_n] = \begin{bmatrix} x_1(t_1) & \cdots & x_1(t_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_m(t_1) & \cdots & x_m(t_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{m1} & \cdots & x_{mn} \end{bmatrix}$$

En un sistema físico real estas medidas podrían representar una dimensión espacial, o más de una dimensión espacial. Por ejemplo, en el estudio de las vibraciones transversales de una viga, el vector  $\mathbf{x}$  puede representar los desplazamientos transversales en  $m$  puntos equidistantes de la viga.

Ahora bien, los datos discretizados no necesariamente tienen media cero, entonces la función de autocorrelación promediada es reemplazada por la matriz de covarianza  $\Sigma = E[(\mathbf{x} - \mu)(\mathbf{x} - \mu)^T]$  donde  $E[\cdot]$  es la esperanza y  $\mu = E[\mathbf{x}]$  es la media del vector  $\mathbf{x}$ . Bajo la hipótesis de que el proceso es estacionario y ergódico, y que el número de instantes de tiempo es grande, una estimación confiable de la matriz de covarianza está dada por la matriz:

$$\Sigma_s = \frac{1}{n} \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^n \left( x_{ij} - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_{ik} \right)^2 & \cdots & \sum_{j=1}^n \left( x_{ij} - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_{ik} \right) \left( x_{mj} - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_{mk} \right) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum_{j=1}^n \left( x_{mj} - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_{mk} \right) \left( x_{ij} - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_{ik} \right) & \cdots & \sum_{j=1}^n \left( x_{mj} - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_{mk} \right)^2 \end{bmatrix} \quad (9)$$

Los POMs y POVs quedan de esta manera caracterizados por las eigensoluciones de la matriz de covarianza  $\Sigma_s$ . Si los datos tienen media cero, la matriz de covarianza dada por (9) queda simplemente dada por la expresión

$$\Sigma_s = \frac{1}{n} \hat{X}^T \hat{X} \quad (10)$$

### 3 DINÁMICA DE CABLES POCO TENSOS: PLANTEO DEL MODELO

La Figura 1 ilustra el diagrama de cuerpo libre de una porción de cable, en el que se detallan las fuerzas actuantes. Suponiendo que el cable es extensible, las ecuaciones de equilibrio son:

$$\begin{aligned} \Delta H - \Delta m \dot{x}^* &= 0 & (a) \\ \Delta V - \Delta m \dot{y}^* - \Delta m g &= 0 & (b) \end{aligned} \quad (11)$$

en donde  $\Delta m = \rho_0 \Omega \Delta X = \rho \Omega \Delta s$ ,  $x^*$  e  $y^*$  son puntos intermedios y si  $\lambda = \Delta s / \Delta X$  (relación de longitudes, stretching) entonces  $\rho_0 = \rho \lambda$ .  $\rho$  es la densidad del material del cable,  $\Omega$  es la sección transversal y  $g$  es la aceleración de la gravedad.

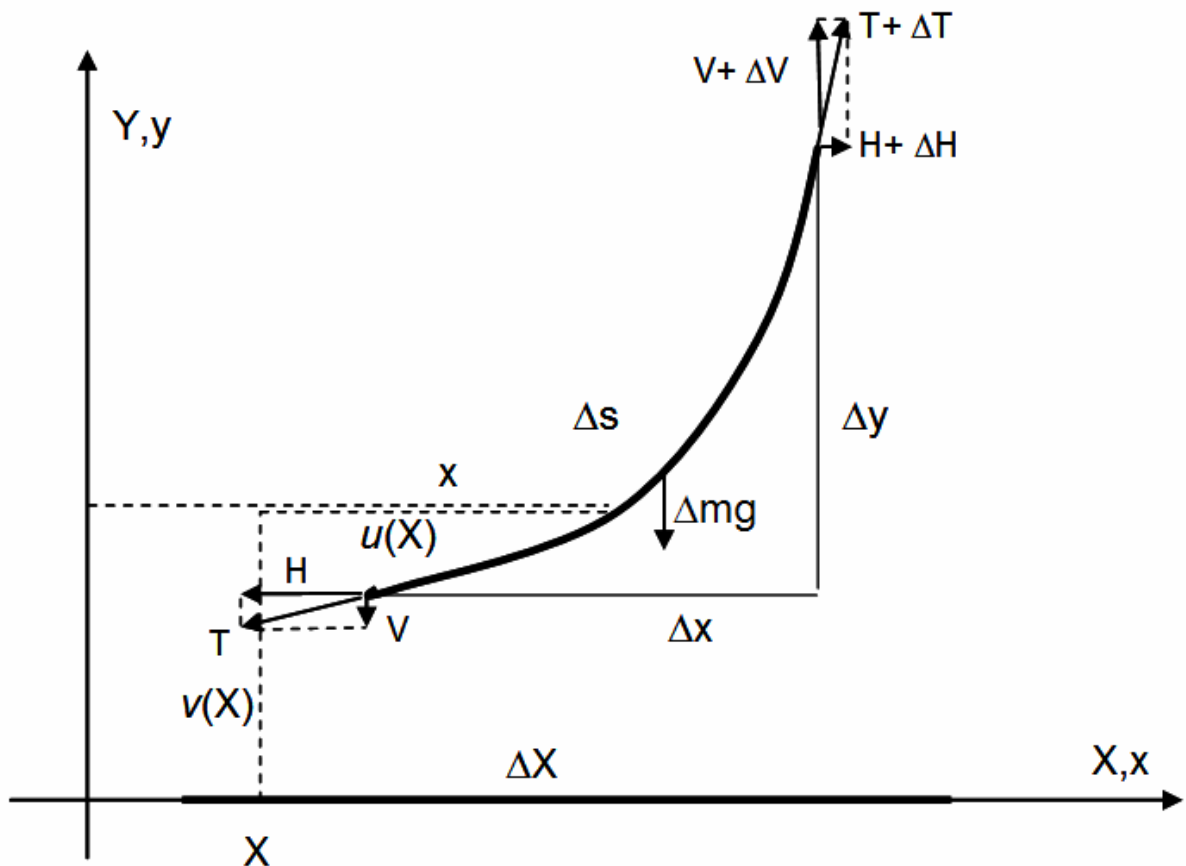


Figura 1: Diagrama de cuerpo libre de una porción de cable

Dividiendo m.a.m. por  $\Delta X$

$$\frac{\Delta H}{\Delta X} - \ddot{x}^* \rho \Omega \lambda = 0 \tag{a}$$

$$\frac{\Delta V}{\Delta X} - \ddot{y}^* \rho \Omega \lambda - \rho \Omega \lambda g = 0 \tag{b}$$

y pasando al límite para  $\Delta X \rightarrow 0$  se obtienen las ecuaciones locales de movimiento de cables extensibles bajo peso propio (la prima indica derivada respecto a  $X$  y el punto respecto al tiempo):

$$H' = \rho \Omega \lambda \ddot{x} \tag{a}$$

$$V' = \rho \Omega \lambda (\ddot{y} + g) \tag{b}$$

Teniendo en cuenta que

$$H = T \cos \theta = T \frac{dx}{ds} = \frac{T}{\lambda} \frac{dx}{dX} \tag{14}$$

$$V = T \sin \theta = T \frac{dy}{ds} = \frac{T}{\lambda} \frac{dy}{dX}$$

donde  $H$  y  $V$  son la componente horizontal y vertical respectivamente de la tensión en el cable; y considerando un modelo de ecuación constitutiva posible dado por:

$$\frac{T}{\lambda} = K \frac{(\lambda^2 - 1)}{2} \tag{15}$$

que fuera propuesto en [Filipich and Rosales \(2000\)](#) cumpliendo con los requisitos de la mecánica del continuo, las ecuaciones (13) pueden escribirse como

$$\begin{aligned} \left(\frac{Tx'}{\lambda}\right)' &= \rho_0 \Omega \ddot{x} \\ \left(\frac{Ty'}{\lambda}\right)' &= \rho_0 \Omega (\ddot{y} + g) \end{aligned} \quad (16)$$

$K$  es una constante con unidades de rigidez axil. Reacomodando:

$$\begin{aligned} [x'(\lambda^2 - 1)]' &= \frac{2\rho_0 \Omega}{K} \ddot{x} \\ [y'(\lambda^2 - 1)]' &= \frac{2\rho_0 \Omega}{K} (\ddot{y} + g) \end{aligned} \quad (17)$$

Las Ecs. (17) representan un sistema diferencial en derivadas parciales, fuertemente no lineal, cuya resolución se aborda a través del Método de Galerkin, con la ayuda del Método de Descomposición Ortogonal Propia para la obtención de un conjunto de funciones ortogonales, y se compararán los resultados con los hallados con otras bases de funciones y con elementos finitos.

#### 4 EJEMPLOS NUMÉRICOS

Se considera un cable de longitud  $L = 47m$ , el extremo izquierdo fijo y el extremo superior sujeto a un movimiento prescrito, dado por las funciones  $x(L,t) = A + q_0 \cos(\omega_q t)$  e  $y(L,t) = B + h_0 \cos(\omega_h t)$ . Se adoptan los siguientes valores  $A = 37m$ ,  $B = 18m$ ,  $q_0 = 3m$ ,  $h_0 = 2m$ ,  $\omega_q = \omega_h = 0.25$ , y  $2\rho_0 \Omega / K = 1.8 \times 10^{-7} / m$ . Inicialmente el cable se encuentra en su posición de equilibrio estático. Se pretende hallar su respuesta dinámica utilizando el método de Galerkin con las bases K-L.

Para hallar entonces las Bases de Karhunen-Loève, se analiza un problema similar como es el de una cadena rígida de  $N$  eslabones, cuyo comportamiento dinámico ya fue resuelto por los autores mediante las Series de Potencias ([Filipich y Rosales, 2007](#)). Se considera una cadena de 20 eslabones como se muestra en la Figura 2.

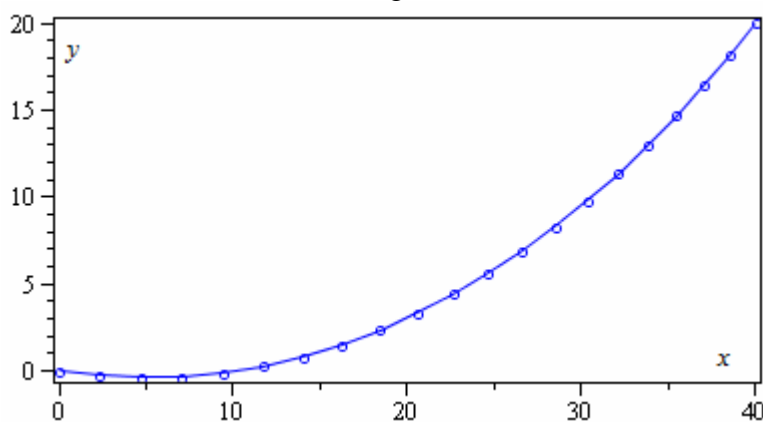


Figura 2: Cadena de 20 eslabones en su configuración estática

Se resuelve la dinámica de la cadena mediante series de potencias y se forman  $\hat{X}$  e  $\hat{Y}$ , matrices de datos correspondientes a la configuración de la cadena (coordenadas instantáneas

horizontal y vertical de cada nodo) en 51 instantes de tiempos espaciados de a 0.5 seg.:

$$\hat{X} = \begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ x_{N1} & \cdots & x_{Nn} \end{bmatrix} ; \quad \hat{Y} = \begin{bmatrix} y_{11} & \cdots & y_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ y_{N1} & \cdots & y_{Nn} \end{bmatrix} \quad (18)$$

siendo  $N$  el número de eslabones y  $n$  el número de observaciones. En este caso  $N=40$  y  $n=51$ . La media de estos datos, está dada por

$$\mu_x = \begin{bmatrix} \mu_{x1} \\ \vdots \\ \mu_{xN} \end{bmatrix} = \frac{1}{n} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n x_{1i} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n x_{Ni} \end{bmatrix} ; \quad \mu_y = \begin{bmatrix} \mu_{y1} \\ \vdots \\ \mu_{yN} \end{bmatrix} = \frac{1}{n} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n y_{1i} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n y_{Ni} \end{bmatrix} \quad (19)$$

A fin de poder utilizar la ecuación (10) en lugar de la (9), a partir de las matrices  $\hat{X}$  e  $\hat{Y}$ , mediante una traslación de coordenadas formamos las matrices,

$$\hat{X}_m = \begin{bmatrix} x_{11} - \mu_{x1} & \cdots & x_{1,n} - \mu_{x1} \\ \dots & \dots & \dots \\ x_{N1} - \mu_{xN} & \cdots & x_{Nn} - \mu_{xN} \end{bmatrix} ; \quad \hat{Y}_m = \begin{bmatrix} y_{11} - \mu_{y1} & \cdots & y_{1,n} - \mu_{y1} \\ \dots & \dots & \dots \\ y_{N1} - \mu_{yN} & \cdots & y_{Nn} - \mu_{yN} \end{bmatrix} \quad (20)$$

De este modo, los datos tienen ahora media cero.

En la Figura 3 muestra la trayectoria recorrida por la cadena debido al movimiento impuesto al extremo derecho, durante un tiempo total de 25 segundos.

Recordemos que las ecuaciones diferenciales gobernantes del problema del cable extensible están dadas por el sistema

$$\begin{aligned} [x'(\lambda^2 - 1)]' &= \frac{2\rho_0\Omega}{K} \ddot{x} \\ [y'(\lambda^2 - 1)]' &= \frac{2\rho_0\Omega}{K} (\ddot{y} + g) \end{aligned} \quad (21)$$

con  $x(0,t) = y(0,t) = 0$ ,  $x(L,t) = F_1(t)$  e  $y(L,t) = F_2(t)$ .

Se introduce el siguiente cambio de variables

$$\hat{x}(X,t) = x(X,t) - \frac{X}{L} F_1(t) ; \quad \hat{y}(X,t) = y(X,t) - \frac{X}{L} F_2(t) \quad (22)$$

de manera tal que el sistema dado por la ecuación (21) se transforma para las nuevas variables en otro en el cual las condiciones de borde son  $\hat{x}(0,t) = \hat{y}(0,t) = 0$  y  $\hat{x}(L,t) = \hat{y}(L,t) = 0$  (con este cambio de variables se logra que las funciones base cumplan las condiciones de borde en cada instante).



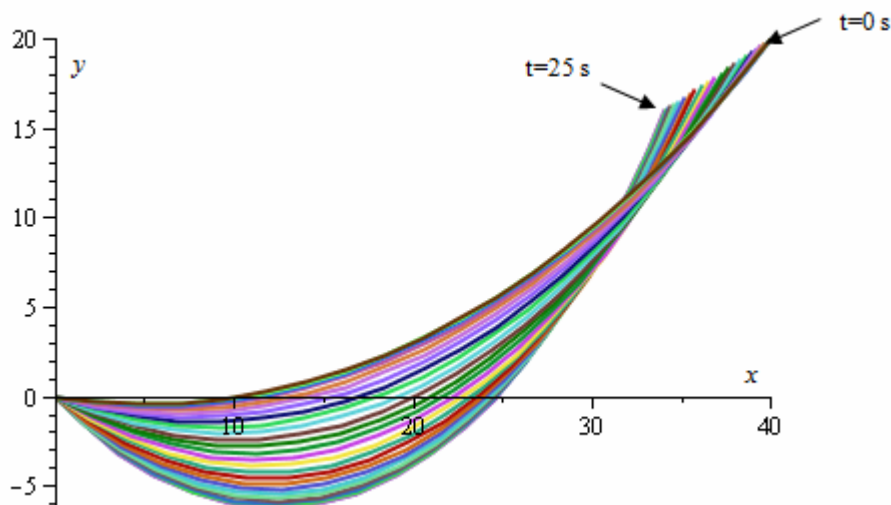


Figura 3: Trayectoria de la cadena de 20 eslabones. Tiempo del experimento 25 seg.

A partir de las matrices  $\tilde{X}_m$  y  $\tilde{Y}_m$  se forman las bases de Karhunen-Loève  $\{\hat{\phi}_{1x}(X), \dots, \hat{\phi}_{mx}(X)\}$  y  $\{\hat{\phi}_{1y}(X), \dots, \hat{\phi}_{my}(X)\}$  ya expresadas también en las nuevas variables. El sistema es resuelto luego por el Método de Galerkin, en donde las funciones incógnitas son aproximadas mediante las expresiones

$$\begin{aligned}\hat{x}(X, t) &\approx \hat{x}_M(X) + \sum_{i=1}^r a_i(t) \hat{\phi}_{ix}(X) \\ \hat{y}(X, t) &\approx \hat{y}_M(X) + \sum_{i=1}^r b_i(t) \hat{\phi}_{iy}(X)\end{aligned}\quad (23)$$

siendo  $\hat{x}(X)$  el valor promedio de  $\hat{x}(X, t)$ .

Los primeros 5 valores singulares de las matrices  $\tilde{X}_m$ ,  $\tilde{Y}_m$  que caracterizan la dinámica de la cadena rígida de 20 eslabones están dados en la Tabla 1 siguiente.

$J$	$\sigma_{xj}$	$\sigma_{yj}$
1	10.349	46.158
2	2.231	0.656
3	0.073	0.139
4	0.043	0.037
5	0.014	0.018

Tabla 1: Primeros cinco valores ortogonales propios (POVs):  $\sigma_{xj}$  y  $\sigma_{yj}$ , de  $\tilde{X}_m$  e  $\tilde{Y}_m$ . Cadena rígida de 20 eslabones.  $\omega_q = \omega_n = 0.25$ .

Siendo la suma de los valores propios ortogonales:  $\sum_j \sigma_{jx} = 12.723$  y  $\sum_j \sigma_{jy} = 47.029$  ( $j=1..20$ ), se puede ver que con sólo los 3 primeros POVs ya se captura el 99.45% y 99.83% de la energía contenida en los datos  $\tilde{X}_m$  e  $\tilde{Y}_m$  respectivamente. En la Figura 4 se muestran las autofunciones correspondientes a los POMs asociados a los tres primeros POVs de  $\tilde{X}_m$ .

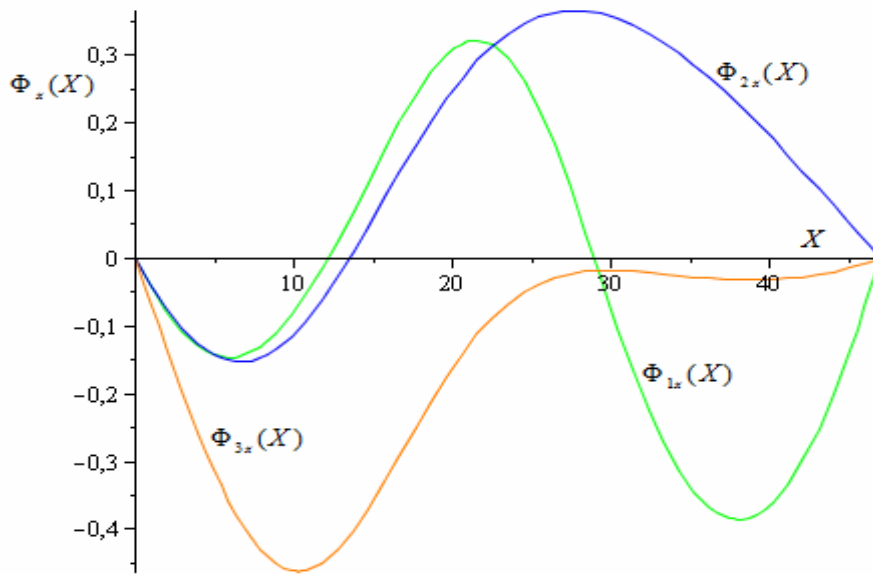


Figura 4: Tres primeros POMs de  $\tilde{X}_m$ . Cadena 20 eslabones rígidos.

Se aplica ahora este conjunto de bases al problema de la dinámica de cables extensibles (Ecs. (21)). Se muestra también en la Figura 5 la trayectoria que recorre el cable extensible en los primeros 5 segundos de tiempo hallada con una sola función aproximante, esto es, se adoptó para las funciones incógnitas:

$$\begin{aligned}\hat{x}(X, t) &\approx \hat{x}_M(X) + a_1(t)\hat{\phi}_{1x}(X) \\ \hat{y}(X, t) &\approx \hat{y}_M(X) + b_1(t)\hat{\phi}_{1y}(X)\end{aligned}\quad (24)$$

Se puede observar que para el movimiento prescrito en el extremo superior, esto es, movimientos lentos de baja frecuencia, el cable mantiene su forma catenaria.

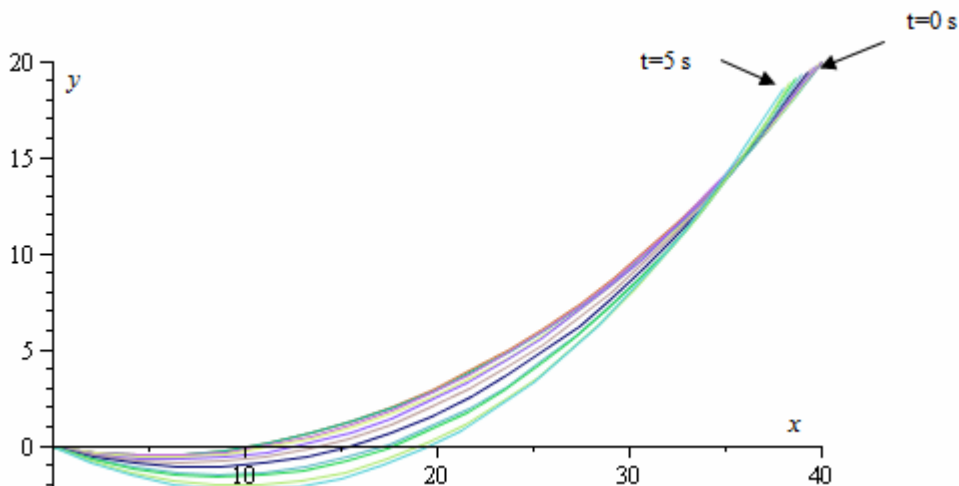


Figura 5: Trayectoria del cable extensible recorrida en los primeros 5 segundos. Solución obtenida por Método de Galerkin usando un sola función aproximante de las de Bases de Karhunen-Loève

Este hecho se ve más claramente en la Figura 6, donde se representa la solución para el cable extensible utilizando 4 funciones aproximantes de las bases de Karhunen-Loève y en

forma superpuesta, la configuración geométrica estática de la cadena en el instante  $t = 2$  segundos. Ambas son iguales y coincidentes a una curva catenaria con iguales extremos.

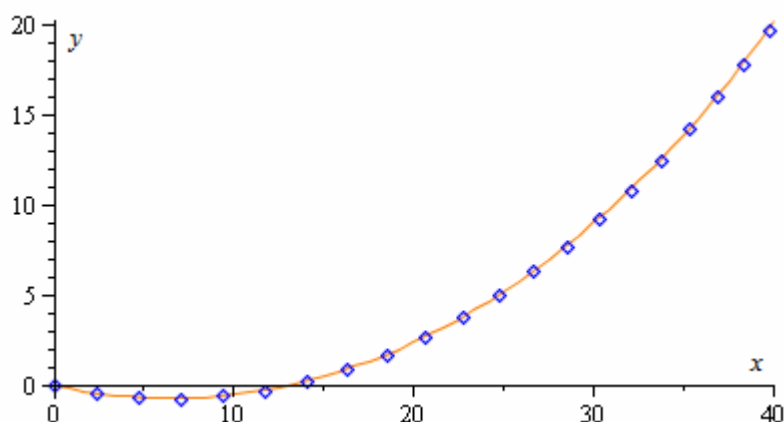


Figura 6: Configuración geométrica del cable y la cadena superpuestas en  $t=2s$ . Los puntos corresponden a la configuración de la cadena de 20 eslabones rígidos y en trazo continuo la configuración del cable hallada con 4 funciones aproximantes de las Bases de Karhunen-Loève.

Seguidamente se muestra otro caso en el cual se le impuso al extremo superior un movimiento de mayor velocidad, se adoptaron los mismos datos del ejemplo anterior pero tomando en este caso  $\omega_q = 1.5$  y  $\omega_h = 0.75$  y la solución se obtuvo utilizando 4 funciones aproximantes. En la Figura 7 se muestra una secuencia de las posiciones instantáneas que ocupa el cable en 7 instantes de tiempos espaciados entre sí en 0.5 segundos partiendo de la configuración de reposo inicial. Se graficó también la curva que describe el extremo superior del cable durante su movimiento.

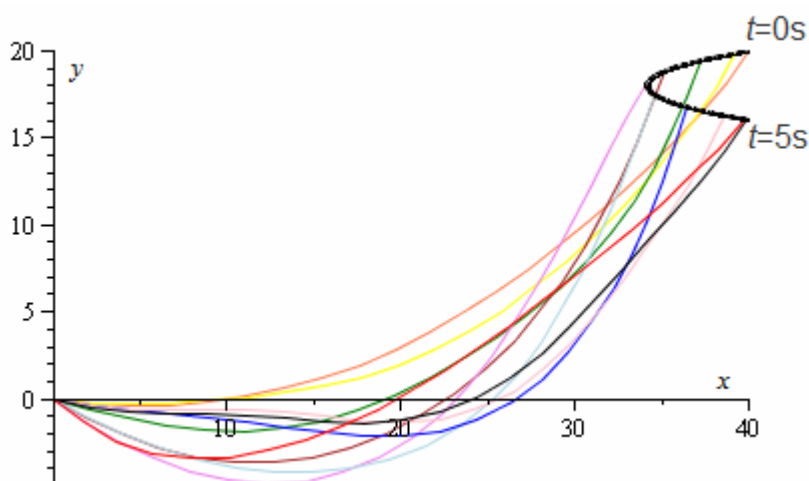


Figura 7: Configuraciones instantáneas del cable en el instante  $t_k = 0, 0.5, 1, 1.5, \dots, 5$  segundos. Solución obtenida con 4 funciones aproximantes.  
 $\omega_q = 1.5, \omega_h = 0.75$

Finalmente, se muestra en la Figura 8 la configuración geométrica del cable a los 2 segundos, según se tomen una, dos, tres o cuatro funciones aproximantes representada conjuntamente con la configuración geométrica que adopta en ese mismo instante una cadena de 40 eslabones rígidos.

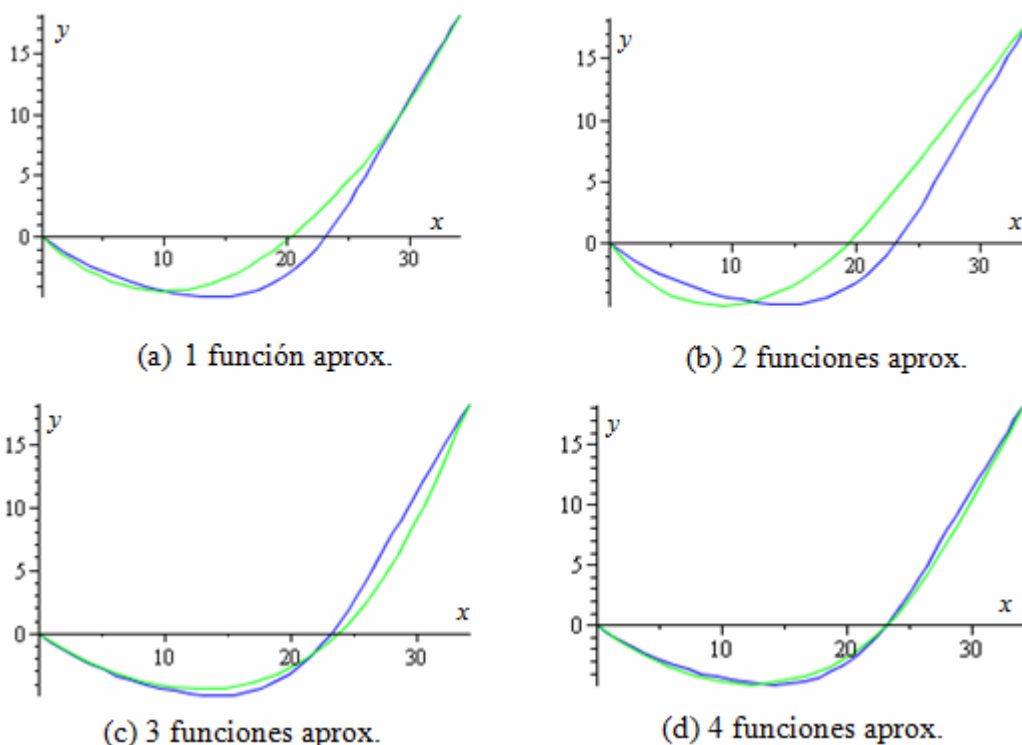


Figura 8: Configuración geométrica de una cadena de 40 eslabones rígidos (en azul) y configuración geométrica de un cable extensible (en verde), ésta última con una (a), dos (b), tres (c) y cuatro (d) funciones aproximantes para la solución.  $\omega_q = 1.5$ ,  $\omega_h = 0.75$

En todos los ejemplos, se adoptó siempre la misma configuración inicial que corresponde al de equilibrio estático de una cadena de eslabones rígidos.

Con el fin de comparar los resultados obtenidos, se resolvió el sistema diferencial dado por la Ec. (21) también por el método de Galerkin, pero utilizando ahora funciones base sinusoidales de la forma  $\phi_{kx}(X) = \sin k\pi X / L$  y  $\phi_{ky}(X) = \sin k\pi X / L$ . En la Figura 9 se representó en forma superpuesta las soluciones obtenidas en ambos casos por el método de Galerkin utilizando 4 funciones base aproximantes, con las bases de Karhunen-Loève y 5 funciones aproximantes con bases senoidales. También se grafica la configuración de la cadena de 20 eslabones rígidas.

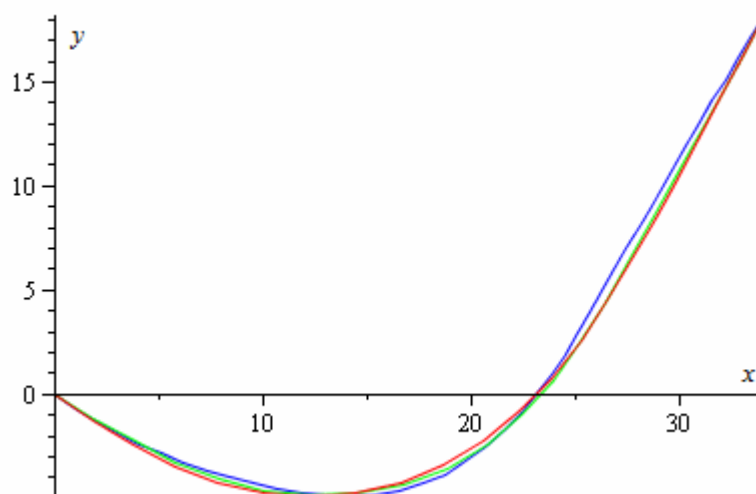


Figura 9: Configuración instantánea en  $t=2$  seg. Azul: cadena rígida de 20 eslabones, Método Series de Potencias; Rojo: Cable extensible, Método de Galerkin, 5 funciones aproximantes, bases senoidales. Verde: Cable extensible, Método de Galerkin, 4 funciones aproximantes, Bases Karhunen-Loève.

## 5 CONCLUSIONES

En el presente trabajo se mostró una técnica interesante y ventajosa para resolver la dinámica de cables. A partir de conocer el movimiento de un problema de características similares, como es el estudio dinámico de una cadena de eslabones rígidos, se pudo analizar luego el comportamiento de un cable extensible. Para un cable de rigidez estándar, y una cadena de un gran número de eslabones, como era de esperar, se pudo comprobar que el comportamiento dinámico de ambos es similar.

Se utilizó el Método de Descomposición Ortogonal Propia para encontrar el conjunto de funciones ortogonales a utilizar luego como funciones aproximantes en el Método de Galerkin. Las bases así obtenidas (Bases de Karhunen-Loève) son, como se sabe, óptimas en el sentido de que son las que mejor se aproximan a la solución real en el sentido de los cuadrados mínimos. Se pudo ver también que los primeros valores propios ortogonales (POVs) acumulan un porcentaje grande de la energía contenida en la dinámica y por ello son suficientes unas pocas funciones bases para lograr una buena aproximación de la solución para representar fielmente la respuesta.

Es importante destacar el hecho de que resolviendo un problema ordinario (cadenas) se pudo analizar luego un problema dinámico más complejo gobernado por ecuaciones diferenciales a derivadas parciales.

La validez de la metodología quedó demostrada a partir de comparar los resultados obtenidos con aquellos que surgieron de resolver directamente el sistema diferencial a derivadas parciales gobernante, utilizando una base de funciones senoidales en la implementación del Método de Galerkin.

## REFERENCIAS

- Breuer, K.S. and Sirovich, L., The use of the Karhunen-Loève procedure for the calculation of linear eigenfunctions. *Journal of Computational Physics*, 96, 277-296. 1991.
- Filipich C.P. y Rosales M.B., A further study on the postbuckling of extensible elastic rods. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 35, 997-1002. 2000.

- Filipich C. and Rosales M., *Dynamic Analysis of plane mooring chains of inextensible links*. ENIEF2007. XVI Congreso sobre Métodos Numéricos y sus Aplicaciones. Cordoba, Argentina. Octubre 2007.
- Holmes, P Lumley J, and Berkooz G. *Turbulence, Coherent Structures, Dynamical Systems and Symmetry*. Cambridge. New York. 1996.
- Kreuzer, E. *Introductory functional analysis with applications*. John Wiley & Sons, 1978.
- Lumley, J.L., *Stochastic tools in turbulence*, Academic Press. 1971
- Park, H.M. and Cho, D.H., The use of Karhunen-Loève decomposition for the modeling of distributed parameter systems. *Chemical Engineering Science*, 51(1), 81-98. 1996.
- Sirovich L., Turbulence and the dynamics of coherent structures part I: coherent structures. *Quarterly of Applied Mathematics*, 45(3):561-571, 1987a.
- Sirovich L., Turbulence and the dynamics of coherent structures part II: symmetries and transformations. *Quarterly of Applied Mathematics*, 45(3):573-582, 1987b.
- Sirovich L., Turbulence and the dynamics of coherent structures part III: dynamic and scaling. *Quarterly of Applied Mathematics*, 45(3):583-590, 1987c.
- Steindl, A., Troger, H. and Zemann, J.V. *Nonlinear Galerkin method in the dimension reduction of nonlinear dynamical systems*. In Moon, F.C., ed., IUTAM Symposium on New Applications of Nonlinear and Chaotic Dynamics in Mechanics, Kluwer Academic Publishers, Ithaca, EUA, 1-10, 1997.
- Steindl, A., Troger, H. Methods for dimension reduction and their application in nonlinear dynamics. *International Journal of Solids and Structures*, 38, 2131-2147, 2001.