

ESTADO TENSIONAL EN TOLVAS. MODELO DEL LLENADO Y VACIADO

Adriana Pernich^a and Fernando G. Flores^b

^a*Departamento Construcciones, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional del Comahue, Buenos Aires 1400, 3800 Neuquén, Argentina, apernich@uncoma.edu.ar, <http://www.uncoma.edu.ar>*

^b*Departamento de Estructuras, Facultad de Ciencias Exactas Físicas y Naturales, Universidad Nacional de Córdoba, Velez Sarsfield 1601, 5000 Córdoba, Argentina, fflores@efn.uncor.edu, <http://www.uncor.edu.ar>*

Resumen. Se consideran modelos bidimensionales de deformación plana o axilsimetría para la predicción de los estados tensionales que se producen en materiales granulares y las solicitaciones que ejercen sobre la estructura de las tolvas que los contienen. Se utiliza una formulación de sólido con una ley constitutiva elástica no lineal plástica con endurecimiento isotrópico para el grano. La estructura se considera infinitamente rígida. Para el grano se utilizan elementos cuadrilaterales con una formulación Lagrangeana actualizada y una integración explícita en el tiempo. En la superficie de contacto entre el grano y la pared se aplican las condiciones de contacto mecánico con fricción. El llenado progresivo se simula por la adición de capas de material que ingresan en distintos tiempos, se dota al material de un adecuado amortiguamiento por considerar que es un proceso cuasi estático. Finalizado el llenado, para iniciar el vaciado se remueve la condición de contacto correspondiente a la tapa del descargador y se elimina el amortiguamiento del material. La ley constitutiva modela la pérdida de rigidez del grano al disminuir la presión cuando el material sufre una expansión volumétrica, incluyendo la posibilidad de perder su capacidad de transmitir fuerzas internas, aun cuando el grano permanece dentro de la tolva. Cuando todos los nodos de un elemento de grano están fuera de la tolva se considera que el material salió y se elimina la contribución del elemento a la masa y a las fuerzas del sistema. Se presentan ejemplos de tolvas con diferentes ángulos de inclinación de la pared respecto de la horizontal.

Palabras clave: elementos finitos, tolvas, material granular, elastoplasticidad, contacto mecánico

1. INTRODUCCIÓN

El estudio de materiales almacenados a granel es relevante debido a los costos de almacenamiento, manejo y transporte. Muchas industrias utilizan tolvas y silos para transportar y almacenar materias primas. Otras industrias, cuyos procesos están automatizados, utilizan silos o tolvas para alimentar con materias primas el proceso ya sean industrias químicas, farmacéuticas, mineras o de elaboración de materiales o alimentos. En todos los casos la industria requiere de altos niveles de sofisticación que hace imprescindible un mejor conocimiento del comportamiento de los materiales almacenados a granel al cual está asociado el diseño y el desempeño de las plantas industriales y/o de acopio.

El llenado de una tolva con material granular depende del procedimiento y de los dispositivos con los que se realice la tarea, se denomina de tipo concéntrico cuando el material cae dentro de la tolva proveniente de un tubo de alimentación o de tipo distribuido cuando el material ingresa a la tolva luego de pasar por una reja o plataforma con múltiples orificios uniformemente distribuidos. En el primer caso el material se acumula con una superficie libre de forma cónica cuyo ángulo de inclinación con la horizontal es cercano al valor del ángulo de reposo del material granular. En el segundo caso el material se acumula dando una superficie aproximadamente horizontal.

Cuando se abre la compuerta de salida, ubicada en la parte inferior o en un lateral, el material almacenado comienza a fluir. El flujo que se produce se denomina de tipo másico cuando todo el material dentro de la tolva se encuentra en movimiento luego de iniciada la descarga, o puede ser de tipo canalizado cuando solo parte del material se encuentra en movimiento y el restante está estancado en las llamadas “zonas muertas”. Algunos investigadores distinguen dos formas de flujo canalizado a los que denominan en chimenea y expandido [Roberts \(1991\)](#). En el primer caso el material fluye por un estrecho canal ubicado inmediatamente sobre la abertura y el segundo presenta una zona de material estancado en la cercanía de la salida pero la mayor parte del material se encuentra en movimiento durante la descarga. Las causas más comunes por las cuales se produce el denominado flujo canalizado son que las paredes de la tolva tienen muy poca pendiente o son muy rugosas, o el alimentador está mal ajustado o una saliente en el canal de flujo da lugar a la formación de una zona de material estancado. Cuando hay zonas de material estancado suele suceder que parte o todo el material que se encontraba detenido comience a fluir repentinamente. La razón por la cual sucede esto se debe a un cambio en las tensiones que actúan en el material estancado ya sea por un aumento de la tensión vertical o por una disminución de las tensiones horizontales en la zona de material estancado. El flujo canalizado causa múltiples problemas como someter a la estructura a acciones dinámicas, provocar muy importantes variaciones en el suministro de material, atascamientos y cambios de velocidad en las cintas alimentadoras del proceso y dando lugar vibraciones en todo el conjunto [Schulze \(1998\)](#).

La mayoría de las simulaciones numéricas utilizan el método de elementos finitos con una formulación euleriana de la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento, tratando al material granular como un fluido viscoplástico [Haussler and Eibl \(1984\)](#), [Rombach and Eibl \(1989\)](#), [Schmidt and Wu \(1989\)](#), [Runesson and Nilson \(1986\)](#), [Karlsson et al. \(1998\)](#). Otras simulaciones por elementos finitos utilizan una formulación lagrangiana de las ecuaciones de equilibrio o de la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento en las que tratan al material granular como un sólido elástico [Ooi and Rotter \(1991\)](#) o elastoplástico [Guaita Fernández](#)

et al. (1996), Martínez et al. (2002), Chen et al. (2001). Una clara muestra de las dispersiones que se obtienen con las diferentes metodologías numéricas y formulaciones se evidencia en la publicación de Rotter et al. (1998) donde muestran las comparaciones que se pudieron realizar a partir de un estudio colaborativo internacional.

En el presente trabajo se utiliza una formulación lagrangiana actualizada de la ecuación de conservación de cantidad de movimiento para simular al material granular como un sólido elastoplástico compresible. Se adopta una estructura infinitamente rígida y condición de contacto mecánico con fricción entre el material granular y la pared. En la sección 2 se introducen la ecuación de gobierno, la relación constitutiva adoptada para el grano y las condiciones de contorno que se utiliza en la discretización por elementos finitos. En la sección 3 se describen el proceso de llenado y sus condiciones y la simulación del vaciado. En la sección 4 se presentan los resultados obtenidos para tres tolvas y finalmente las conclusiones del presente trabajo.

2. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

Se ha adoptado una formulación lagrangiana actualizada, formulando las ecuaciones respecto de un sistema corrotacional, correspondiente a una formulación de sólidos con grandes deformaciones basada en la mecánica de los medios continuos y la teoría de plasticidad. La etapa de llenado puede ser considerada como cuasi estática y la etapa de vaciado presenta características dinámicas. Para permitir adecuar la simulación del llenado se ha incluido amortiguamiento de tipo viscoso. Las ecuaciones son integradas en forma explícita en el tiempo, que da un algoritmo condicionalmente estable que conduce a que los incrementos de tiempo sean pequeños y estén relacionados con la mínima dimensión de la malla. Por otra parte éste tipo de programa es muy versátil en lo referente a la implementación de relaciones constitutivas complejas y a la incorporación de condiciones de contorno como imponer contacto friccional entre el material granular y la estructura. La interacción friccional entre el material y la pared es relevante durante la etapa de vaciado pues condiciona el tipo de flujo y por ello las sollicitaciones que el material ejerce sobre la estructura. Dado que las geometrías de las tolvas en general son conos o bien en cuña se trabaja con elementos bidimensionales.

2.1. Ecuación de gobierno

La ecuación de cantidad de movimiento para el sólido, utilizando la segunda ley de Newton y residuos ponderados y teniendo en cuenta el amortiguamiento de tipo viscoso puede escribirse como:

$$\int_{\Omega} \delta \mathbf{v} \cdot \rho \mathbf{a} \, d\Omega + \int_{\Omega} \delta \mathbf{v} \cdot v \mathbf{v} \, d\Omega + \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \delta \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \, d\Omega - \int_{\Omega} \delta \mathbf{v} \cdot \rho \mathbf{b} \, d\Omega - \int_{\Gamma} \delta \mathbf{v} \cdot \mathbf{f} \, d\Gamma = 0 \quad (1)$$

la cual es válida para una parte cualquiera Ω_e del dominio total del sólido Ω . En esta ecuación ρ es la densidad del material, v es el coeficiente de amortiguamiento del material granular, $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{x}, t)$ es el campo de aceleraciones del cuerpo, $\mathbf{b} = \mathbf{b}(\mathbf{x}, t)$ son las fuerzas actuantes por unidad de masa y $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ con $\mathbf{x} \in \Gamma_f$ son las fuerzas actuantes en la superficie del cuerpo Γ_f , $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)$ es el campo de tensiones de Cauchy y $\delta \mathbf{v}$ y $\delta \dot{\boldsymbol{\epsilon}}$ son la velocidad virtual y la parte simétrica de $\nabla \delta \mathbf{v}$ respectivamente.

2.2. Condiciones de contorno

Las condiciones de contorno que se utilizan son de desplazamientos prescritos, para utilizar condiciones de simetría, y condición de contacto mecánico con fricción, incluido en el código SIMPACT/DELTA desarrollado por Flores (1999).

La condición de contacto mecánico establece que dos cuerpos no pueden ocupar el mismo volumen y que la fuerza normal de contacto es de compresión y la fuerza tangencial de contacto obedece la ley de fricción de Coulomb, siendo μ el coeficiente de fricción entre las superficies en contacto. Matemáticamente puede expresarse que la separación entre los cuerpos y las fuerzas entre las superficies deben cumplir:

$$\begin{aligned} g(\mathbf{x}, t) &= g(\mathbf{x}) - u(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n} \geq 0 \\ q_n(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{q}_c \cdot \mathbf{n} \leq 0 \\ q_t(\mathbf{x}, t) &\leq \mu q_n(\mathbf{x}, t) \end{aligned} \quad \text{para } \mathbf{x} \in \Gamma_c, [0, T] \quad (2)$$

donde $g(\mathbf{x}, t)$ es la separación entre los cuerpos y $q_n(\mathbf{x}, t)$ y $q_t(\mathbf{x}, t)$ las fuerzas normal y tangente a la superficie de contacto respectivamente y \mathbf{n} es el versor perpendicular a la superficie de contacto. La condición a cumplir puede expresarse como:

$$g(x, t) q_n(x, t) = 0 \quad (3)$$

La velocidad tangencial v_t entre los cuerpos en los bordes en contacto deben satisfacer las condiciones:

$$\begin{aligned} v_t(x, t) &= 0 \quad \text{si } q_t(\mathbf{x}, t) < \mu q_n(\mathbf{x}, t) \\ v_t(x, t) &= \lambda q_t(\mathbf{x}, t) \quad \text{si } q_t(\mathbf{x}, t) = \mu q_n(\mathbf{x}, t) \end{aligned} \quad (4)$$

Condiciones de desplazamientos iniciales:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) \quad \text{para } \mathbf{x} \in \Omega, t = 0 \quad (5)$$

Condiciones de velocidades iniciales:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{v}_0(\mathbf{x}) \quad \text{para } \mathbf{x} \in \Omega, t = 0 \quad (6)$$

2.3. Relación constitutiva

La *ley elástica* es no lineal debido a que el módulo elástico tangente sigue una ley de potencia que es función de la presión (o tensión media) mientras la relación de Poisson es constante, como propone Lade (1977) quien adopta la propuesta de Duncan and Chang (1970) basada en el trabajo de Jambu (1963). La expresión del módulo tangente:

$$E_t(p) = k_u p_a \left(\frac{p}{p_a} \right)^n \quad (7)$$

donde p es la tensión media, p_a la presión atmosférica y k_u y n son los parámetros de caracterización del material que se obtienen de la curva descarga recarga de un ensayo de compresión isótropa. Conocido E_t se calculan el módulo de compresión volumétrica K y el módulo transversal G correspondientes a un sólido homogéneo.

La *superficie de fluencia* es discontinua y esta compuesta por dos superficies correspondiendo f_1 al modelo de Drucker - Prager y f_2 al modelo Cam Clay modificado. La primera permanece fija en el espacio de tensiones mientras la segunda puede expandirse o contraerse a fin de considerar un comportamiento con endurecimiento isotrópico. Ambas superficies se expresan en función de la presión p y de la tensión desviadora generalizada q cuyas expresiones

son:

$$\begin{aligned} p &= \frac{\sigma_{ii}}{3} \\ q &= \sqrt{\frac{3}{2}} \sqrt{\mathbf{S} : \mathbf{S}} \\ &= \sqrt{3} \sqrt{J_2} \end{aligned} \quad (8)$$

donde \mathbf{S} es el tensor desviador de tensiones y J_2 es el segundo invariante de \mathbf{S} . Entonces:

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{q}{\sqrt{3}} - 3\alpha p - K_p = 0 \\ f_2 &= q^2 - M^2 p(p_o - p) = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

Los coeficientes correspondientes a f_1 se calculan a partir de los coeficientes de fricción interna ϕ y de la cohesión c que definen la superficie de fluencia de Mohr Coulomb. Si la superficies de Drucker Prager (cono en el espacio de tensiones) está inscrita en la superficie de Mohr Coulomb (pirámide hexagonal en el espacio de tensiones) los coeficientes α y K_p se calculan utilizando las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{2 \sin \phi}{\sqrt{3} (3 - \text{sen} \phi)} \\ K_p &= \frac{6c \cos \phi}{\sqrt{3} (3 - \text{sen} \phi)} \end{aligned} \quad (10)$$

si el cono está circunscrito a la pirámide, entonces los coeficientes se calculan:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{2 \sin \phi}{\sqrt{3} (3 + \text{sen} \phi)} \\ K_p &= \frac{6c \cos \phi}{\sqrt{3} (3 + \text{sen} \phi)} \end{aligned} \quad (11)$$

Los coeficientes correspondientes a f_2 (elipsoide en el espacio de tensiones), son M y p_o donde M corresponde a la relación de tensiones crítica ($M = q_{cr}/p_{cr}$) y puede estimarse según Wood (1991) en función del ángulo de fricción interna efectivo ϕ como $M \simeq \phi/25$ para compresión triaxial y como $M \simeq \phi/35$ para tracción triaxial (el ángulo de fricción debe estar expresado en grados). El valor de p_o está dado por la ley de endurecimiento del material y es función de la deformación volumétrica plástica.

La *regla de flujo* g_1 , correspondiente a la superficie de fluencia f_1 , establece que el flujo plástico es isocórico $\dot{\Delta}^p = 0$ y las deformaciones plásticas de distorsión se producen, sin cambio de la presión, es decir:

$$\begin{aligned} \dot{\Delta}^p &= 0 \\ \dot{\mathbf{e}}^p &= \dot{\gamma}_1 \frac{\partial g_1}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \dot{\gamma}_1 \frac{3}{2\sqrt{3}} \frac{\mathbf{S}}{q} \end{aligned} \quad (12)$$

La superficie de fluencia f_2 tiene una regla de flujo asociada, es decir $g_2 = f_2$, entonces la regla de flujo se expresa:

$$\begin{aligned} \dot{\Delta}^p &= \dot{\gamma}_2 \frac{\partial f_2}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \dot{\gamma}_2 M^2 (2p - p_o) \frac{1}{3} \delta_{ij} \\ \dot{\mathbf{e}}^p &= \dot{\gamma}_2 \frac{\partial f_2}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \dot{\gamma}_2 3\mathbf{S} \end{aligned} \quad (13)$$

La ley de endurecimiento isotrópico es de tipo empírica y se obtiene ajustando un polinomio cuadrático a la curva experimental de compresión hidrostática, por lo cual su expresión general es:

$$p_o(\Delta^p) = a_0 + a_1\Delta^p + a_2(\Delta^p)^2 \quad (14)$$

Dados los valores de prueba de p^* y q^* , se valúan ambas funciones de fluencia $f_1^* = f_1(p^*, q^*)$ y $f_2^* = f_2(p^*, q^*, p_o^*)$ donde $p_o^* = (p_o)_n$. Si alguna de ellas tiene un valor mayor a cero, entonces el paso es plástico y deben integrarse las ecuaciones constitutivas para obtener las variables de estado correspondientes al paso. Para determinar cual de las funciones debe utilizarse, primero se calcula el valor de la abscisa p_{cc} donde ambas funciones de fluencia se intersectan, si $f_1^* < 0$ y $f_2^* > 0$ se utiliza f_2^* ; si $f_1^* > 0$ y $f_2^* > 0$ y $p^* > p_{cc}$ se utiliza f_2^* y si $f_1^* > 0$ y $f_2^* > 0$ y $p^* < p_{cc}$ se utiliza f_1^* .

En ambos casos se asume que la corrección está dada por:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{n+1} &= \mathbf{S}_{n+1}^* - 2G\dot{\epsilon}^p \\ p_{n+1} &= p_{n+1}^* - K\dot{\Delta}^p \\ q_{n+1} &= \sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt{\mathbf{S}_{n+1} : \mathbf{S}_{n+1}} \end{aligned} \quad (15)$$

que al reemplazarse en la función de fluencia a utilizar permiten calcular el parámetro de consistencia $\dot{\gamma}_1$ o $\dot{\gamma}_2$ según corresponda. El parámetro de consistencia $\dot{\gamma}_1$ se encuentra de manera cerrada mientras que para determinar $\dot{\gamma}_2$ se utiliza un procedimiento de dos pasos.

Para calcular $\dot{\gamma}_2$ primero se encuentra el estado intersección y luego se integra el paso plástico utilizando una expresión linealizada de f_2 en un algoritmo de punto medio. Debido a que el valor que se obtiene para $\dot{\gamma}_2$ es aproximado, se verifica si los valores corregidos de las tensiones satisfacen la función de fluencia, de no ser así se mejora la solución agregando deformaciones plásticas considerando que las deformaciones totales permanecen fijas y las deformaciones plásticas adicionales tengan el efecto de relajar las tensiones siguiendo a [Ortiz and Simo \(1986\)](#).

Encontrado el parámetro de consistencia, se actualizan las variables de estado al final del paso $n + 1$.

2.4. Sistemas de referencia del elemento. Transformaciones.

En la figura 1 se muestran los sistemas de referencia utilizados en la formulación del elemento siendo X_1 y X_2 los ejes globales fijos de referencia del problema; \bar{x}_1 y \bar{x}_2 son los ejes corrotacionales definidos en cada punto de integración de Gauss y ξ y η son los ejes del elemento maestro estándar. En cada punto de integración de Gauss se define el sistema corrotacional mediante dos vectores unitarios \mathbf{t}^1 y \mathbf{t}^2 que corresponden a las direcciones de los ejes corrotacionales \bar{x}_1 y \bar{x}_2 respectivamente. El versor \mathbf{t}^1 se define paralelo al vector $\mathbf{x}_{,\xi}$ adoptando al versor \mathbf{t}^2 perpendicular al \mathbf{t}^1 .

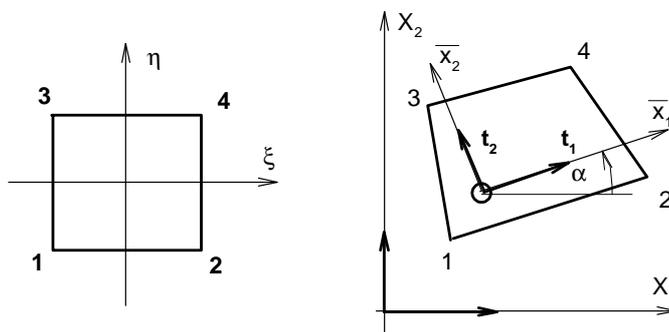


Figura 1: Sistemas de referencia del elemento

Como el sistema corrotacional tiene su eje \bar{x}_1 en la dirección ξ , entonces el versor \mathbf{t}^1 que define su dirección se obtiene normalizando la primera columna de la matriz Jacobiana. Con esta forma de definir los versores se obtiene la matriz de transformación \mathbf{T} .

Los incrementos de desplazamientos $\Delta \mathbf{u}$ referidos al sistema global pueden encontrarse en función de los incrementos de desplazamientos $\Delta \bar{\mathbf{u}}$ en el sistema corrotacional utilizando la matriz \mathbf{T} y viceversa :

$$\Delta \mathbf{u} = \mathbf{T} \Delta \bar{\mathbf{u}} \quad \text{y} \quad \Delta \bar{\mathbf{u}} = \mathbf{T}^T \Delta \mathbf{u} \tag{16}$$

Para calcular las derivadas de las funciones de forma respecto del sistema global, primero se calcula la matriz Jacobiana de la transformación utilizando las coordenadas nodales del elemento correspondientes a la configuración en t_{n+1} :

$$\mathbf{J} = [\mathbf{x}^e]_{n+1} \begin{bmatrix} \frac{\partial N^k}{\partial \xi} & \frac{\partial N^k}{\partial \eta} \end{bmatrix} \tag{17}$$

Se calculan el determinante $\det(\mathbf{J})$ y la inversa \mathbf{J}^{-1} y las derivadas de las funciones de forma respecto de los ejes globales, luego se obtiene \mathbf{T} y se pueden calcular las derivadas de las funciones de forma respecto del sistema corrotacional.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N^i}{\partial \bar{x}_1} & \frac{\partial N^i}{\partial \bar{x}_2} \end{bmatrix}_{n+1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N^i}{\partial \xi} & \frac{\partial N^i}{\partial \eta} \end{bmatrix} \mathbf{J}^{-1} \mathbf{T} \tag{18}$$

2.5. Aproximación por elementos finitos

Se ha optado por utilizar la relación constitutiva para un material isótropo utilizando los módulos volumétrico y transversal, por esta razón los tensores de tensiones y de deformaciones se descomponen en sus partes esférica y desviadora. El tensor de tensiones de Cauchy incremental respecto del sistema corrotacional $\Delta \bar{\sigma}_{ij}$ y el incremento del tensor de deformaciones $\Delta \bar{\epsilon}_{ij}$ respecto del mismo sistema se separan en el incremento de presión $\Delta \bar{p}$ y el incremento del tensor desviador $\Delta \bar{s}_{ij}$ y en el incrementos de la deformación volumétrica $\Delta \bar{\Delta}$ y el incremento del tensor de deformaciones desviadoras $\Delta \bar{e}_{ij}$ (δ_{ij} es el delta de Kroenecker) entonces:

$$\begin{aligned} \Delta \bar{\sigma}_{ij} &= K \Delta \bar{\Delta} \delta_{ij} + 2 G \Delta \bar{e}_{ij} \\ &= \Delta \bar{p} \delta_{ij} + \Delta \bar{s}_{ij} \end{aligned} \tag{19}$$

Los valores de $\Delta\bar{p}$ y de $\Delta\bar{\Delta}$, por ser invariantes, no dependen del sistema. El incremento de la deformación volumétrica $\Delta\bar{\Delta}$ para un estado de deformación plana a nivel del elemento permite definir la matriz deformación - desplazamiento \mathbf{B}_v :

$$\Delta\Delta = \sum_{i=1}^{NNE} \begin{bmatrix} \frac{\partial N^i}{\partial x_1} & \frac{\partial N^i}{\partial x_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u_1^i \\ \Delta u_2^i \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{NNE} \mathbf{B}_v^i \Delta \mathbf{u}^i \quad (20)$$

El incremento de deformaciones respecto del sistema corrotacional, para un estado de deformación plana a nivel del elemento permite definir la matriz deformación - desplazamiento $\bar{\mathbf{B}}_*$:

$$\Delta\bar{\epsilon} = \Delta \begin{bmatrix} \bar{\epsilon}_{11} \\ \bar{\epsilon}_{22} \\ 2\bar{\epsilon}_{12} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{NNE} \begin{bmatrix} \frac{\partial N^i}{\partial \bar{x}_1} T_{11} & \frac{\partial N^i}{\partial \bar{x}_1} T_{21} \\ \frac{\partial N^i}{\partial \bar{x}_2} T_{12} & \frac{\partial N^i}{\partial \bar{x}_2} T_{22} \\ \frac{\partial N^i}{\partial \bar{x}_2} T_{11} + \frac{\partial N^i}{\partial \bar{x}_1} T_{12} & \frac{\partial N^i}{\partial \bar{x}_2} T_{21} + \frac{\partial N^i}{\partial \bar{x}_1} T_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u_1^i \\ \Delta u_2^i \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{NNE} \bar{\mathbf{B}}_*^i \Delta \mathbf{u}^i \quad (21)$$

Luego, el incremento del tensor de deformaciones desviadoras respecto del sistema corrotacional:

$$\Delta\bar{\mathbf{e}} = \begin{bmatrix} \Delta\bar{\epsilon}_{11} - \frac{\Delta\bar{\Delta}}{3} \\ \Delta\bar{\epsilon}_{22} - \frac{\Delta\bar{\Delta}}{3} \\ 2\Delta\bar{\epsilon}_{12} \end{bmatrix} \quad (22)$$

Teniendo la configuración de referencia \mathbf{x}_n , correspondiente al paso n , y la configuración \mathbf{x}_{n+1} en el paso $n + 1$, los pasos para obtener los incrementos Δp y $\Delta \mathbf{s}$ son los siguientes. Primero se calcula el incremento de desplazamientos nodales del elemento $\Delta \mathbf{u}$, luego se calcula en cada punto de integración g de la cuadratura de Gauss Legendre la matriz Jacobiana \mathbf{J} y su inversa, los versores de los ejes corrotacionales y la matriz \mathbf{T} . Se calculan las derivadas de las funciones de forma respecto del sistema corrotacional con las cuales se calcula la matriz deformación - desplazamiento $\bar{\mathbf{B}}_*$. Con $\bar{\mathbf{B}}_*$ y $\Delta \mathbf{u}$ se calculan los incrementos de deformación $\Delta\bar{\epsilon}_{ij}$ y sus componentes esférica $\Delta\bar{\Delta}(\xi_g, \eta_g)$ y desviadora $\Delta\bar{\epsilon}_{ij}(\xi_g, \eta_g)$. Se calcula el incremento $\Delta\bar{p}_{(g)}$ y la presión de prueba $p_{n+1}^*(g) = p_n(g) + \Delta\bar{p}_{(g)}$, el incremento de las componentes desviadoras del tensor de tensiones $\Delta\bar{S}_{ij(g)}$ y sus componentes de prueba $\bar{\mathbf{S}}_{n+1}^*(g) = \bar{\mathbf{S}}_{n(g)} + \Delta\bar{\mathbf{S}}_{(g)}$. Obtenido $\bar{\mathbf{S}}_{n+1}^*(g)$ se calcula el invariante de prueba $q_{n+1}^*(g)$. Con $p_{n+1}^*(g)$ y $q_{n+1}^*(g)$ se verifican las funciones de fluencia y en caso de corresponder se corregirán sus valores para obtener las tensiones correspondientes al final del paso $n + 1$ y las demás variables de estado actualizadas. Si el paso es elástico entonces las tensiones al final del paso $n + 1$ serán las tensiones de prueba ya calculadas. El comportamiento de los materiales granulares presentan lo que se conoce como condición de flujo isocórico, en la cual se producen deformaciones de distorsión sin cambio volumétrico. En esta condición, desde el punto de vista numérico, puede producirse lo que se conoce como bloqueo por volumen. Una de las técnicas utilizadas para evitar el bloqueo es subintegrar las componentes volumétricas. Este es otro motivo por el cual se utiliza la descomposición de los tensores de tensiones y de deformaciones en sus partes esférica y desviadora. Las fuerzas internas del elemento se calculan:

$$\mathbf{f}_{int}^e(p^e) = \int \bar{\mathbf{B}}_v^T p dV \simeq \bar{\mathbf{B}}_{v(n+1)}^T p_m dV_m W_o W_o \quad (23)$$

$$\mathbf{f}_{int}^e(\mathbf{S}^e) = \int \bar{\mathbf{B}}_*^T \bar{\mathbf{S}} dV \simeq \sum_{k=1}^{npg} \sum_{l=1}^{npg} \bar{\mathbf{B}}_{*(\xi_k, \eta_l)}^T \bar{\mathbf{S}}_{(\xi_k, \eta_l)} dV_{(\xi_k, \eta_l)} W_k W_l \quad (24)$$

2.6. Síntesis del proceso de solución numérica

1. **La discretización espacial.** El dominio de interés Ω es subdividido en subdominios o elementos Ω_e para obtener la contraparte discreta de la ecuación de gobierno.
 - a) El problema se enfoca a un elemento típico Ω_e . Para un dado campo de tensiones $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}(\mathbf{x})$ se evalúa la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento
 - b) Se ensamblan las contribuciones de todos los elementos y se determina si el sistema se encuentra en equilibrio en el estado $\{\mathbf{u}_{n+1}(\mathbf{x}), \boldsymbol{\sigma}_{n+1}(\mathbf{x})\}$
 - c) Se determina la corrección al campo de desplazamientos y se evalúa el estado asociado $\{\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}(\mathbf{x}), \boldsymbol{\sigma}_{n+1}(\mathbf{x}), \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p(\mathbf{x}), \alpha_{n+1}(\mathbf{x})\}$ de manera consistente con el modelo constitutivo independiente de las velocidades de deformación.
2. **El algoritmo de integración para plasticidad independiente de las tasas de deformación,** puede establecerse como:
 - a) Sea $\mathbf{x} \in \Omega$ un dado punto de interés en el cuerpo que obedece el modelo constitutivo independiente de la velocidad (en el cual se quiere calcular una aproximación a las tensiones que aparecen en la ecuación de gobierno)
 - b) Se asume que el estado local del cuerpo en el punto $\mathbf{x} \in \Omega$ en el tiempo t_n está completamente definido. Por esto se entiende que los valores de $\{\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}(\mathbf{x})\}$ son conocidos y se adoptan valores de prueba para las variables de estado $\{\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p(\mathbf{x}), \alpha_{n+1}(\mathbf{x})\}$ (idénticos a $\{\boldsymbol{\varepsilon}_n^p(\mathbf{x}), \alpha_n(\mathbf{x})\}$ por considerar que el estado en t_{n+1} es inicialmente elástico, lo que equivale a considerar que el estado plástico está “congelado” en el estado t_n) y que el estado de tensiones $\boldsymbol{\sigma}_n(\mathbf{x}) = \mathbf{D}[\boldsymbol{\varepsilon}_n(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\varepsilon}_n^p(\mathbf{x})]$ también es conocido.
 - c) Suponiendo que se da un incremento en la deformación total en el punto \mathbf{x} , a la que se denomina $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x})$, el cual induce el estado en el tiempo $t_{n+1} = t_n + \Delta t$. Se actualizan las variables básicas al tiempo t_{n+1} de manera consistente con el modelo constitutivo.
3. **Integración en el tiempo.** Las derivadas de los desplazamientos respecto del tiempo son reemplazadas por aproximaciones algorítmicas compatibles.

3. SIMULACIÓN DEL LLENADO Y VACIADO

El llenado continuo se simula dividiendo la altura máxima de material en capas de material que se van incorporando en distintos tiempos durante la simulación. Cada capa está compuesta por una o más capas de elementos cuyos nodos tienen asociado un tiempo de activación. El tiempo de activación es el valor del pseudo tiempo a partir del cual el nodo comienza a ser tenido en cuenta en los cálculos, cuando todos los nodos asociados a un elemento están activos se realizan los cálculos a nivel de cada elemento que luego se ensamblan en el sistema global. No se realiza ningún cálculo a nivel de elemento si el tiempo de activación de alguno de los

nodos de un elemento es mayor al pseudo tiempo del paso. Las condiciones de contorno se verifican a partir del tiempo en que se encuentran activos.

Cuando ingresa una nueva capa de material se calcula la masa asociada a cada elemento utilizando la densidad correspondiente a la máxima relación de vacíos y el volumen inicial del elemento, las fuerzas internas y las fuerzas externas debidas al peso del material. Al agregar una capa de material se produce una fuerza de impacto que no concuerda con lo que se observa durante la etapa de llenado que no tiene características dinámicas. Para evitar esto se dota a los elementos de un valor de amortiguamiento que permite simular el proceso de llenado como cuasi estático evitando las oscilaciones de la solución en desplazamientos y las consecuentes fuerzas dinámicas, pero permite que el material se compacte bajo la acción del peso del material de las capas superiores. Los parámetros que definen la magnitud del amortiguamiento viscoso están relacionados con la velocidad de propagación de una onda de compresión en el material granular (que puede ser estimada como la raíz cuadrada del cociente entre el módulo elástico tangente y la densidad iniciales).

Los tiempos de activación de las capas están relacionados con el período de vibraciones libres no amortiguadas del sistema T siendo el intervalo de activación entre capas $\Delta t_c = T$. Esto garantiza que los valores de desplazamientos hayan alcanzado un valor estable antes de que se incorpore una nueva capa de material.

Una vez que se ha incorporado el material de la última capa, se alcanza el final de la etapa de llenado para un valor t_f de pseudo tiempo que corresponde a la finalización del llenado y que es igual al tiempo de activación de la última capa más un Δt_c . El estado de tensiones en el material granular que se obtiene en t_f es el estado inicial para iniciar el vaciado. Las fuerzas de contacto que se obtienen en t_f permiten obtener la magnitud y distribución de las presiones que actúan sobre la pared de la tolva al finalizar el llenado. Las presiones correspondientes al final de la etapa de llenado son utilizadas como referencia para compararlas con las distribuciones que se obtienen a distintos tiempos durante el vaciado.

Una vez obtenido el estado de tensiones de final de llenado, se remueve la condición de contacto mecánico, que corresponde a la apertura de la compuerta del descargador, y se anula el amortiguamiento viscoso del material granular. La relación constitutiva controla cuando el material se ha expandido al punto de haber perdido la capacidad de transmitir fuerzas internas, que corresponde a la pérdida de contacto entre las partículas.

La condición de contacto mecánico friccional con la pared de la tolva no se modifica respecto a la establecida en la etapa de llenado, esto permite obtener distribuciones de tensiones en el material y de presiones sobre la pared. Observando los desplazamientos y/o las velocidades nodales durante la etapa de vaciado se determina el tipo de flujo que el modelo predice se producirá durante el vaciado.

4. CASOS DE APLICACIÓN

Se estudian con el modelo descrito tres tolvas simétricas en cuña que se modelan como estados de deformación plana. Las tres tolvas difieren en el ángulo de inclinación de las paredes respecto de la horizontal, siendo las inclinaciones de 75° , 50° y 25° . La tolva cuyo ángulo es 75° cumple con las características para obtener un vaciado con flujo másico, mientras la tolva cuyo ángulo es 25° presente flujo canalizado y la restante un comportamiento intermedio. En los dos últimos casos se espera detectar las zonas que presentan diferentes movimientos del material durante el vaciado.

Solo se modela la mitad de la tolva imponiendo condición de simetría, utilizando para simular el llenado progresivo 12 capas de material de $0,20m$ de espesor en todos los casos. Las

mallas de elementos finitos de las tres tolvas de la figura 2 tienen 117 nodos y 96 elementos.

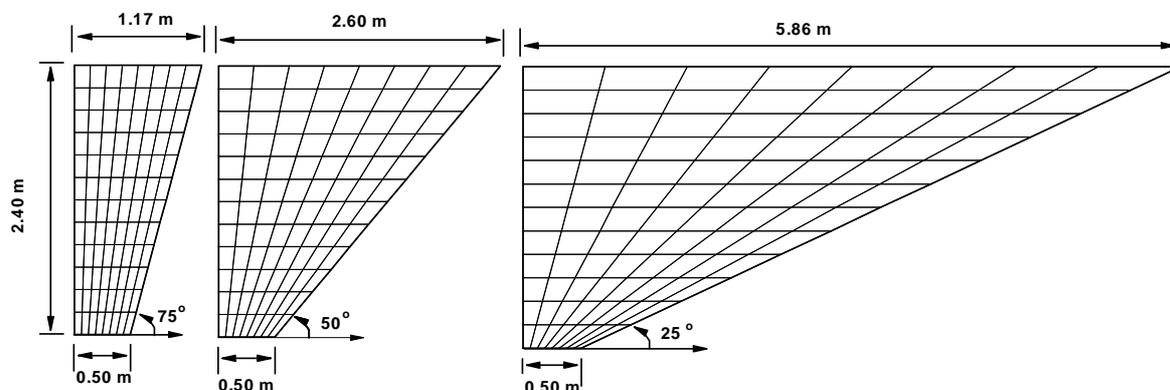


Figura 2: Geometría y mallas de las tolvas

Se adopta en todos los casos el mismo material granular y los mismos coeficientes de fricción entre el material granular y la pared. Los datos corresponden a la arena lavada seca de granulometría uniforme utilizada por Lee and Seed (1967). La parte elástica no lineal del modelo constitutivo está caracterizada por el número módulo $k_{ur} = 9,6 \cdot 10^7$, la presión atmosférica $p_a = 1 \cdot 10^5 Pa$ y un exponente $n = 0,57$ y relación de Poisson $\nu = 0,3$. La parte plástica del modelo constitutivo queda definida por el ángulo de fricción interna $\phi = 34^\circ$ el valor de cohesión $c = 0$, la relación de tensiones crítica $M = 1,36$ y los coeficientes de la ley de endurecimiento $a_0 = 7,7719 \cdot 10^4 Pa$, $a_1 = 6,39 \cdot 10^7 Pa$ y $a_2 = 1,53 \cdot 10^8 Pa$. Para la relación de vacíos inicial $e_o = 0,87$ corresponde una densidad del material $\rho = 1460 Kg/m^3$. Para definir el contacto con fricción se utiliza el coeficiente de fricción estática entre la arena y una chapa de acero a $\mu_s = 0,3$ y se adopta para el coeficiente de fricción cinética $\mu_c = 0,15$. Se adoptaron coeficientes de penalización normal y tangente iguales y de valor 0,09.

Para la tolva cuya pared forma un ángulo de 75° respecto de la horizontal, las tensiones verticales que se desarrollan durante el proceso de llenado distribuido son similares al que corresponde a una distribución hidrostática en la mitad superior de la tolva y se aleja de una distribución hidrostática en la mitad inferior. Además en la mitad inferior la tensión vertical respecto de un plano horizontal no es constante como se observa en la figura 3a). En la figura 3b) se observan la malla inicial en gris a la cual se superpusieron las mallas en las configuraciones correspondientes a los tiempos $t = 0,52$ y $t = 0,92$ respecto del inicio del vaciado. Estas mallas permiten observar que se produce un flujo de tipo másico, con todo el material dentro de la tolva en movimiento y el cambio de forma de la superficie libre superior del material granular a medida que avanza el vaciado. Las presiones de contacto sobre la pared de la tolva presentan un marcado comportamiento dinámico. En la figura 3c) se presentan las distribuciones de presión sobre la pared que se obtienen a diferentes tiempos de iniciado el vaciado, incluyendo la distribución de presión al finalizar el llenado ($t = 0$) que representa la distribución inicial para el vaciado. La distribución para $t = 0,02$ muestra una disminución de las presiones en toda la pared respecto de la distribución para $t = 0$, para $t = 0,07$ la distribución de presión en la mitad superior de la tolva es mucho más elevada que la correspondiente a $t = 0$ que en $t = 0,12$

disminuye y vuelve a ser menor a la inicial en toda la pared que vuelve a aumentar en casi toda la altura para $t = 0,17$ disminuye nuevamente para $t = 0,22$ aumenta nuevamente, alcanzando el valor máximo, en $t = 0,27$ y luego sigue disminuyendo y aumentando hasta finalizar el vaciado. El cociente entre el máximo valor de presión normal de contacto $p_{nc} = 12414 Pa$ a $X_2 = 0,60m$ en $t = 0$ y el máximo $p_{nc} = 34626 Pa$ a $X_2 = 1,39m$ en $t = 0,27$ es $fmd = 2,79$. Esto concuerda con observaciones experimentales que dicen que el máximo valor durante la descarga es dos a cinco veces mayor a la máxima presión de llenado y que el máximo valor de presión de contacto durante el vaciado es cercano al borde superior de la tolva.

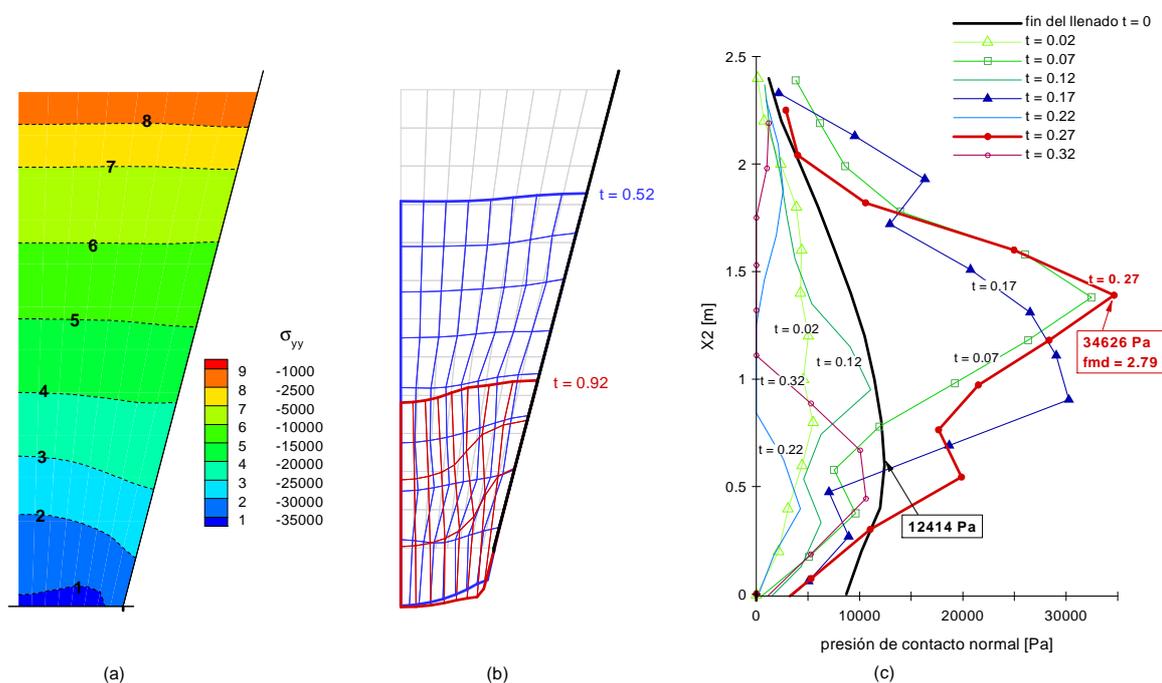


Figura 3: Tolva de $\alpha = 75^\circ$. a) Tensiones verticales al finalizar el llenado. b) Configuraciones durante el vaciado. c) Presiones sobre la pared para distintos tiempos de iniciado el vaciado

Para la tolva cuya pared forma un ángulo de 50° respecto de la horizontal, las tensiones verticales al finalizar el llenado presentan un patrón similar a las tensiones que se obtuvieron para la tolva anterior. En la parte superior corresponden a una distribución casi hidrostática y en la zona cercana a la pared se evidencia la influencia de la fricción entre el material y la pared como se observa en la figura 4a). Para esta tolva no es posible simular todo el proceso de vaciado debido a que la distorsión de la malla causa problemas numéricos. Sin embargo la parte del proceso de vaciado que puede simularse permite observar tres zonas dentro del material granular: una con movimiento rápido, otra con movimiento muy lento y la tercera con un movimiento intermedio. En la figura 4b) se han superpuesto la malla original y la malla correspondiente a $t = 0,75$ y se han señalado los límites de las tres zonas. En la figura 4c) se presentan las distribuciones de presión normal de contacto en la pared. Como en el caso de la primer tolva, se observa un comportamiento marcadamente dinámico que disminuye y aumenta

respecto de la distribución correspondiente al final del proceso de llenado. La distribución que corresponde a $t = 0,005$ presenta la particularidad de ser menor que la correspondiente a $t = 0$ solo en la mitad inferior de la pared e igual en la parte superior. La distribución para $t = 0,01$ es menor que la distribución de presión inicial en toda la pared, para $t = 0,015$ aumentan los valores de presión respecto de la distribución para $t = 0,01$ pero siguen siendo menores que la inicial que es superada en $t = 0,02$ para disminuir nuevamente los valores para $t = 0,07$. Luego aumentan los valores de presión para $t = 0,12$ alcanzando el máximo en la configuración correspondiente a $t = 0,17$. El máximo valor de la presión normal de contacto al finalizar el vaciado es de $p_{nc} = 20017 Pa$ a $X_2 = 0,60m$ y el máximo en $t = 0,17$ es de $p_{nc} = 57634 Pa$ a $X_2 = 1,17m$ siendo el cociente entre ambos máximos $fmd = 2,91$.

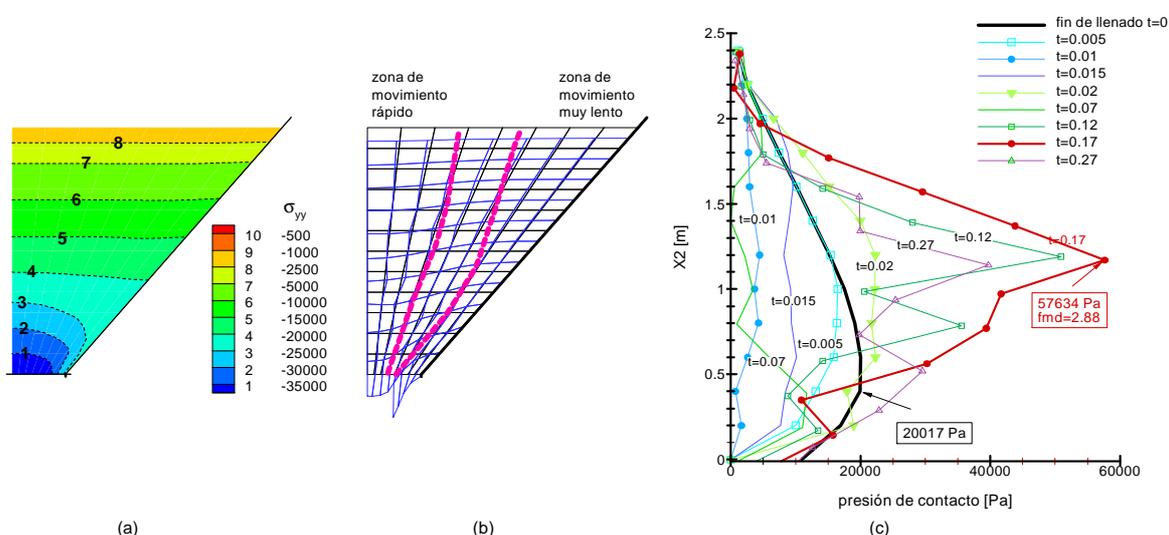


Figura 4: Tolva de $\alpha = 50^\circ$. a) Tensiones verticales al finalizar el llenado. b) Zonas de material con diferente movimiento durante el vaciado. c) Presiones sobre la pared para distintos tiempos de iniciado el vaciado

Por último la tolva cuya pared forma un ángulo de 25° respecto de la horizontal. Las tensiones verticales al finalizar el llenado presentan dos zonas de tensión vertical elevada, una sobre la compuerta y otra sobre la pared para $0,40m < X_2 < 0,80m$. En el tercio superior la distribución de la tensión vertical son casi constantes en planos horizontales y similares a una distribución hidrostática en vertical (figura 5a). Para esta tolva tampoco es posible simular todo el proceso de vaciado debido nuevamente a que la distorsión de la malla causa problemas numéricos. Al igual que para la tolva de $\alpha = 50^\circ$ la parte del proceso de vaciado que puede simularse permite distinguir las tres zonas de material granular que presentan diferente movimiento. En este caso las tres zonas corresponden a una zona con movimiento acelerado, otra con movimiento lento y la tercera donde el material se encuentra detenido. En la figura 5b) se han superpuesto la malla original y la malla correspondiente a $t = 0,79$ señalado los límites de las tres zonas, donde puede apreciarse que casi la mitad del material dentro de la tolva se encuentra estancado. En la figura 5c) se presentan las distribuciones de presión normal de contacto en la pared. Como en los casos anteriores se observa un comportamiento marcadamente

dinámico. En este caso las distribuciones de presión de contacto normal correspondientes a las configuraciones en $t = 0,005$, $t = 0,01$ y $t = 0,015$ muestran como disminuye la presión solo en el tercio inferior de la pared manteniéndose igual a la distribución correspondiente al final de llenado en los dos tercios restantes. Para $t = 0,02$ los valores de las presiones de contacto comienzan a aumentar hasta llegar a los valores máximos para $t = 0,42$, principalmente en la mitad inferior de la pared. El máximo valor de la presión normal de contacto al finalizar el vaciado es de $p_{nc} = 29914 Pa$ a $X_2 = 0,40m$ y el máximo en $t = 0,42$ es de $p_{nc} = 70218 Pa$ a $X_2 = 0,56m$ siendo el cociente entre ambos máximos $fmd = 2,35$. El corrimiento del máximo hacia el fondo de la tolva también ha sido detectado en mediciones experimentales cuando disminuye el ángulo de la tolva respecto de la horizontal.

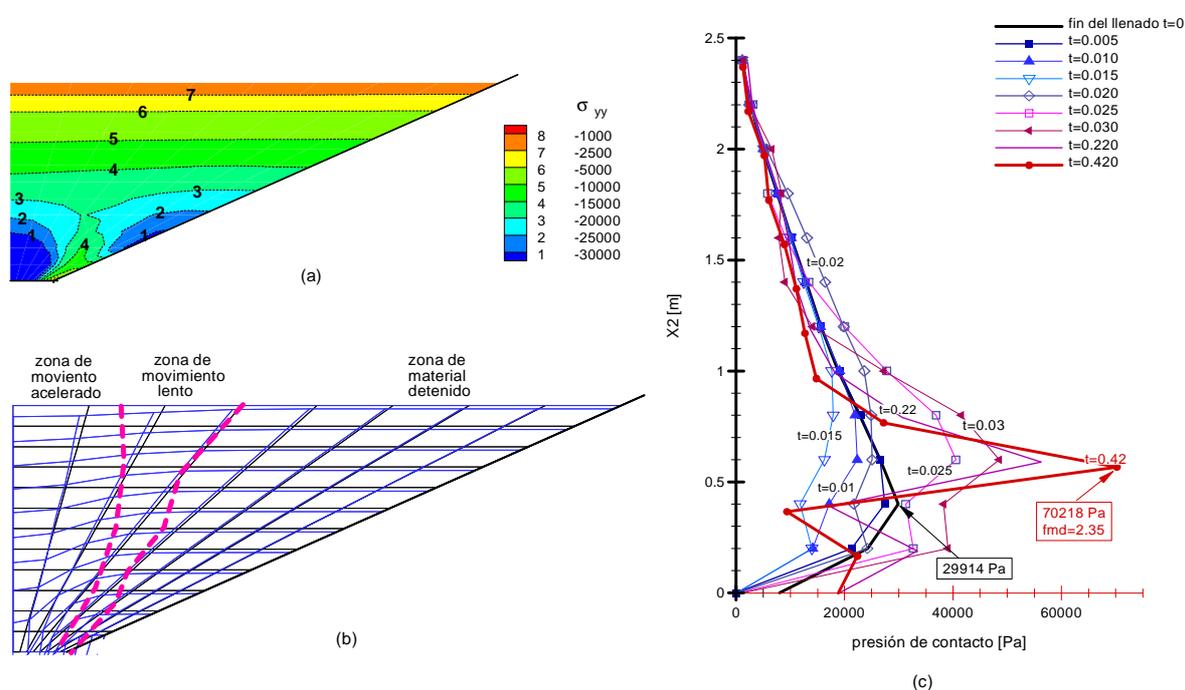


Figura 5: Tolva de $\alpha = 25^\circ$. a) Tensiones verticales al finalizar el llenado. b) Zonas de material con diferente movimiento durante el vaciado. c) Presiones sobre la pared para distintos tiempos de iniciado el vaciado

En la figura 6 se compara el cociente entre la presión de contacto tangente y la presión de contacto normal a la pared al finalizar el llenado con el valor del coeficiente de fricción estático utilizado en las simulaciones. Puede observarse que en las tres tolvas no se desarrolla completamente la fricción en toda la pared pero hay zonas donde el cociente es bastante cercano al valor del coeficiente de fricción estático.

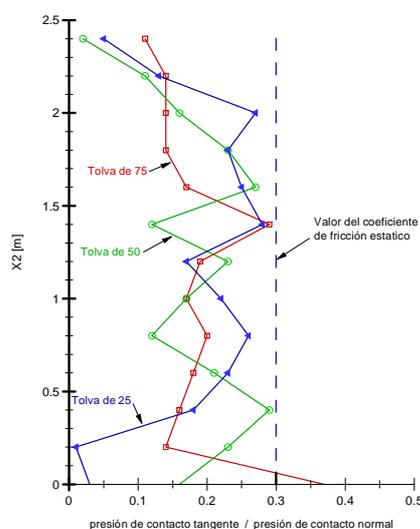


Figura 6: Desarrollo de la fricción en la pared en las tres tolvas

5. CONCLUSIONES

Se ha presentado un elemento simple, que considera una relación constitutiva elástica no lineal plástica que requiere de relativamente pocos parámetros que son posibles de obtener a partir de ensayos rutinarios de laboratorio en materiales granulares friccionales. Este elemento y la metodología empleada permiten simular los procesos de llenado progresivo y el vaciado completo para tolvas de flujo másico. Para las tolvas que presentan flujo canalizado permiten cualitativamente determinar las zonas con distinto movimiento del material granular durante la descarga pero no el vaciado completo. Los resultados que se obtienen son cualitativamente concordantes con observaciones experimentales realizadas por diversos grupos de investigación, en lo referente a la relación entre el máximo valor de presión normal de contacto al finalizar el llenado y durante el vaciado y de su ubicación.

Las fórmulas teóricas en las cuales se basan los actuales diseños de tolvas fueron deducidas, en su mayoría, partiendo de la suposición que en un plano horizontal a un dado nivel la tensión vertical es constante, y que la fricción en la pared se ha desarrollado completamente. Los resultados numéricos muestran que la primer suposición es cierta solo en la parte superior de las tolvas pero no en parte inferior y que la suposición sobre el desarrollo de la fricción durante el llenado no es cierta.

REFERENCIAS

- Chen J., Yu S., Ooi J., and Rotter J. Finite element modelling of filling pressures in a full scale silo. *Journal of Engineering Mechanics*, 127:1058–1066, 2001.
- Duncan M. and Chang C. Nonlinear analysis of stress and strain in soils. *Journal of the Soil Mechanics Foundation Division ASCE*, 96:1629–1653, 1970.
- Flores F. Simpack/delta. an explicit finite element program. *Departamento de Estructuras, Universidad Nacional de Córdoba.*, 1:–, 1999.
- Guaita Fernández M., Ayuga Tellez F., and Aguado Rodriguez P. Silos. fundamentals of theory, behaviour and design. *III Congreso Internacional de Ingeniería de Proyectos*, 1:1658–1665, 1996.

- Hausler U. and Eibl J. Numerical investigations on discharging silos. *Journal of Engineering Mechanics*, 110:957–971, 1984.
- Jambu N. Soil compressibility as determined by oedometer and triaxial tests. *European Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering Proceedings*, 1:19–25, 1963.
- Karlsson T., Klisinski M., and Runesson K. Finite element simulation of granular material flow in plane silos with complicated geometry. *Powder Technology*, 99:29–39, 1998.
- Lade P. Elasto-plastic stress-strain theory for cohesionless soil with curved yield surfaces. *International Journal Solids and Structures*, 13:1019–1035, 1977.
- Lee K. and Seed H. Drained strength characteristics of sands. *Journal of the Soil Mechanics Foundation Division ASCE*, 93:117–141, 1967.
- Martínez M., Alfaro I., and Doblaré M. Simulation of axisymmetric discharging in metallic silos. analysis of de induced pressure distribution and comparison with diferent standards. *Engineering Structures*, 24:1561–1574, 2002.
- Ooi J. and Rotter J. Elastic predictions of pressures in conical silo hoppers. *Engineering Structures*, 13:2–12, 1991.
- Ortiz M. and Simo J. An analysis of a new class of integration algorithms for elastoplastic constitutive relations. *International Journal of Numerical Methods Engineering*, 23:353–366, 1986.
- Roberts A. Recent developments and future directions. *Bulk Solids Handling*, 11:17–35, 1991.
- Rombach G. and Eibl J. Numerical simulation of filling and discharging processes in silos. *Third International Conference on Bulk Materials Storage Handling and Transportation - Newcastle*, 1:48–52, 1989.
- Rotter J., Holst J., Ooi J., and Sanad A. Silo pressure predictions using discrete element an finite element analysis. *Philosopic Transactions Royal Society London*, 356:2685–2712, 1998.
- Runesson K. and Nilson L. Finite element of the gravitational flow of granular material. *Bulk Solids Handling*, 6:241–248, 1986.
- Schmidt L. and Wu Y. Prediction of dynamic wall pressures on silos. *Bulk Solids Handling*, 19:99–104, 1989.
- Schulze D. Silo quaking. *Silos Fundamentals of theory behaviour and design E FN SPON Eds C.J. Brown and J. Nielsen*, 1:99–104, 1998.
- Wood D. *Soil behaviour and critical state soil mechanics*, volume-. Cambridge University Press, 1991.