

SIMULACIÓN NUMÉRICA DE LA PROPAGACIÓN DE ONDAS EN ARCOS MAGNÉTICOS

Carlos Fernández ^a, Sergio Elaskar ^{a,b}, Andrea Costa ^{a,b} y Walkiria Schulz ^a

^a Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Universidad Nacional de Córdoba

^b Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas - CONICET

Palabras Clave: Sismología Coronal, Magnetohidrodinámica (MHD), Volúmenes Finitos, *Total Variation Diminishing* (TVD).

Resumen. Realizamos un estudio numérico de la propagación de ondas de choque en medios magnéticamente estructurados de la baja corona solar, i.e., medios totalmente ionizados con valores de presión magnética mucho mayores que la presión del gas. Para tal fin resolvemos numéricamente las ecuaciones de la magnetohidrodinámica ideal por medio de un esquema de volúmenes finitos centrados en celdas. Hemos tratado los flujos hiperbólicos con la técnica de ocho ondas de Powell (*NASA Contract No NAS1-19480, 1995*) en forma conjunta con la normalización de vectores propios descrita por Zarachay et al. (*SIAM J. on Sci. Comput.*, 15, 1994) evitando así problemas de condicionamiento. Resolvemos el cálculo de los flujos numéricos por medio de la implementación del esquema TVD de Harten-Yee conjuntamente con un “Riemann solver” aproximado. Hemos podido reproducir curvas observacionales, lo que nos permite aportar una nueva interpretación a la dinámica del plasma dentro de arcos magnéticos en la corona solar en términos de ondas de choque magnetoacústicas lentas. Acotamos el espectro de magnitudes físicas en función del ajuste con los fenómenos observados.

1 INTRODUCCIÓN: ESTRUCTURAS MAGNÉTICAS EN LA CORONA SOLAR

La corona solar tiene características peculiares en cuanto a la riqueza topológica de sus campos magnéticos. A diferencia de lo que sucede en otras regiones del Sol, la intensidad relativa de sus campos magnéticos es tal que la presión termodinámica resulta mucho menor que la presión magnética, $\beta \ll 1$. Donde β representa la razón entre la presión del gas y la presión magnética. En consecuencia el plasma es gobernado por el campo magnético conformándose como un medio inhomogéneo compuesto por infinidad de estructuras filamentosas y tubos aislados entre sí, con plasma fluyendo a diferentes temperaturas y densidades. El transporte se realiza, fundamentalmente, a lo largo de las líneas de campo y, en cambio, es fuertemente inhibido en la dirección transversal a las mismas. El estudio de los modos que se propagan en estas estructuras (sismología coronal) permite acotar los planteos generales y provee herramientas para el diagnóstico remoto del plasma a partir de observaciones.

En esta sección se presenta un resumen de la fenomenología de la sismología coronal. Al lector interesado en ampliar los conceptos expuestos se recomienda los siguientes trabajos: Aschwanden (2004); Nakariakov y Verwichte (2005).

1.1 Sismología Coronal

A diferencia de la heliosismología (modos p), la sismología coronal es una rama de reciente desarrollo de la física solar impulsada por la puesta en funcionamiento de telescopios espaciales de nueva generación con alta resolución espacial y temporal como TRACE, *Transition Region and Coronal Explorer* (Handy et al., 1999) y SOHO, *The Solar and Heliospheric Observatory* (Domingo y Fleck, 1994).

Podemos representar la corona solar como un medio compresible y elástico en el que se propagan varios tipos de ondas cuya descripción se ajusta a la aproximación magnetohidrodinámica, MHD (Goedbloed y Poedts, 2004). En las condiciones coronales la longitud de onda y los períodos son suficientemente grandes comparados con el radio de Larmor (< 1 m) y la girofrecuencia ($< 10^{-4}$ seg) respectivamente. Estas ondas perturban parámetros globales del plasma como la densidad, la temperatura, la velocidad y el campo magnético afectando así las observaciones y dando lugar a métodos de diagnóstico específicos provistos por la sismología.

Las velocidades características de los fenómenos MHD lineales se relacionan por un lado, con la compresibilidad y la elasticidad del campo (presión y tensión magnética respectivamente) y por otro, con la presión del gas, p_0 , y la inercia de los iones descrita en términos de la densidad, ρ_0 . Ellas son: la velocidad de Alfvén, $c_a = B_0 / (\mu_0 \rho_0)^{1/2}$, en donde B_0 es el campo, μ_0 es la permeabilidad del vacío, y la velocidad del sonido en el medio: $c_s = (\gamma p_0 / \rho_0)^{1/2}$, en donde γ es el índice adiabático, generalmente, $\gamma = 5/3$.

En condiciones de plasma uniforme -en las que el campo magnético es infinito, homogéneo y unidireccional- los modos MHD son de tres tipos básicos (la relación de dispersión tiene tres ramas): I) ondas de Alfvén: modos transversales puros e incompresibles que se propagan a lo largo de las líneas de campo a la velocidad de Alfvén. La perturbación del campo produce un desplazamiento de las líneas que es restituido por la acción de la tensión magnética. Además existen modos compresibles de dos tipos: II) modos magnetoacústicos rápidos, con velocidades mayores o iguales a la velocidad de Alfvén. Tanto el campo magnético como la presión del plasma resultan perturbados. En condiciones coronales ($\beta \ll 1$), estos modos son casi transversales y describen una oscilación entre la

energía cinética -asociada a la componente transversal del plasma- y la energía magnética -asociada al efecto combinado de la presión y la tensión de las líneas-. La tercera rama de la relación de dispersión es la de III) los modos magnetoacústicos lentos. Estos modos tienen velocidades menores o iguales a la velocidad del sonido. Su polarización es similar a la de los modos magnetoacústicos rápidos, es decir, resultan tanto de la compresión del plasma como de la del campo magnético. En el límite de $\beta \ll 1$ son longitudinales (ondas de sonido $v = c_s$), alternan la perturbación de la energía cinética asociada a la componente paralela del plasma con la energía interna (perturbación en la temperatura) del mismo (ver Fig. 1A).

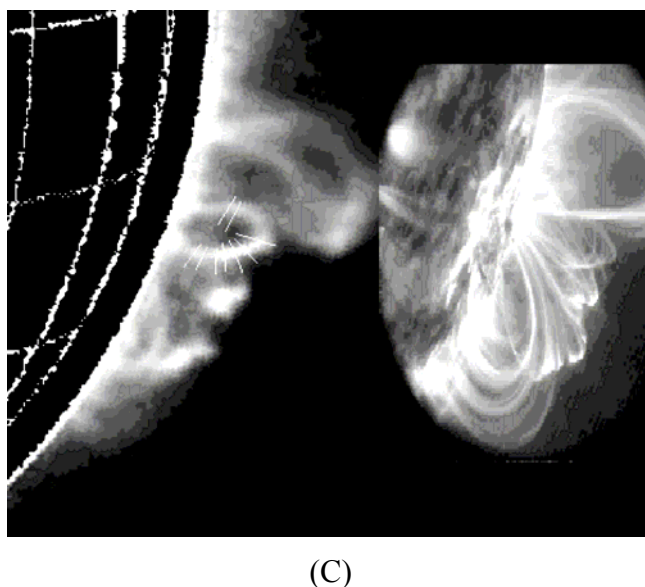
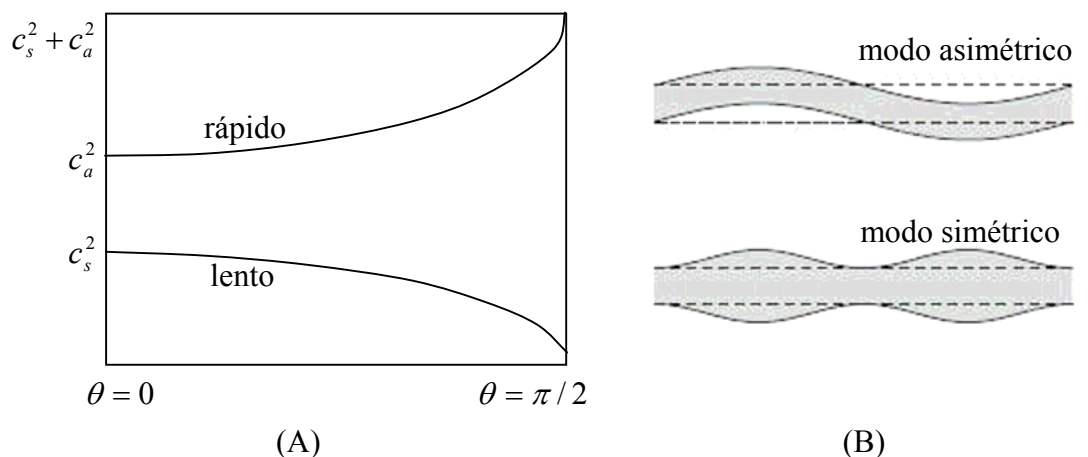


Figura 1: A) Descripción de modos magnetoacústicos rápidos y lentos. θ es el ángulo entre el número de onda, k , y el campo magnético; c_s es la velocidad del sonido en el medio y c_a es la velocidad de Alfvén. B) Esquema modos magnetoacústicos compresibles: asimétrico (*kink*) y simétrico (*sausage*). C) Izq: Imagen obtenida con el coronógrafo MICA (San Juan - 530,3 nm) y Der: TRACE (17,1 nm).

En el caso uniforme todos los modos son estables, pero el plasma confinado y afectado por la filamentación y estructuración de la corona modifica y acopla entre sí los diferentes modos dando lugar a configuraciones de estabilidad no garantizada. En las condiciones coronales usuales los arcos magnéticos se comportan como guías de ondas, es decir cuando la velocidad del Alfvén interna al tubo es menor que la externa, las ondas MHD son atrapadas. Además, en estas condiciones de números de Reynolds grandes, dada la estructuración del campo los

mecanismos de disipación son necesariamente anómalos como la absorción resonante, la mezcla de fases o inestabilidades en superficies de discontinuidad (ondas de superficie) que dependen de la geometría y de los parámetros del plasma.

En cilindros magnéticos se reconocen tres tipos de modos o periodicidades diferenciadas por su velocidad en analogía con el caso uniforme: los modos de Alfvén, los lentos o acústicos y los rápidos. La velocidad del sonido es, por lo general, dos o tres veces y hasta un orden de magnitud menor que la velocidad de Alfvén. Las ondas de Alfvén en tubos magnéticos corresponden a modos incompresibles con perturbación en la componente azimutal del tubo. Los modos rápidos comprometen la estructura global del tubo magnético y se diferencian entre sí por la forma del modo y por sus períodos: los simétricos (modos *sausage*) tienen períodos del orden de unos pocos segundos y los asimétricos (modos *kink*) períodos de unos pocos minutos (ver Fig. 1B). A diferencia de los modos rápidos -con velocidades de fase entre la de Alfvén interna y externa-, los modos lentos son poco dispersivos (la velocidad de fase no depende del número de onda k). En el caso de interés, en el que la velocidad de Alfvén externa es mayor que la interna (tubo de plasma denso), los modos son atrapados en el tubo magnético. En los otros casos los modos rápidos son necesariamente radiativos y la oscilación no puede ser confinada dentro de la estructura tubular. Los modos simétricos (*sausage*) poseen un corte en el número de onda: sólo son observables para longitudes de onda cortas $ka \geq 1$ (a , corresponde la sección del tubo). En cambio, en el límite de longitudes de onda largas, $ka \ll 1$, la velocidad de fase del modo asimétrico principal (el modo *kink* es el que primero se excita) resulta un valor intermedio entre la velocidad de Alfvén interna y externa al tubo de plasma (ver Fig. 1B).

1.2 Dinámica interna del plasma de arcos coronales

El movimiento de puntos brillantes desplazándose a lo largo de arcos coronales en imágenes satelitales fue inicialmente interpretado como flujo de plasma congelado al campo generado por anisotropía en el ingreso de energía desde las bases cromosféricas. Sin embargo, debido a dificultades para interpretar las observaciones en términos de modelos de flujo, la interpretación en términos de ondas magnetoacústicas en medios con velocidades de Alfvén altas comenzó recientemente a conformarse como rama de estudio, i.e., sismología coronal (Aschwanden, 2004; Nakariakov y Verwichte, 2005).

Desde esta perspectiva, las observaciones han sido descritas como perturbaciones que se propagan hacia arriba (con períodos del orden de los observados 5–20 min) con intensidades que decaen significativamente hacia el vértice del arco. Las amplitudes descendentes serían por tanto más débiles y la disipación más efectiva sobre todo para los modos de longitud de onda mayores (dado el alto número de Reynolds del medio coronal) lo que explicaría la excepcionalidad de la observación de procesos de descenso de los abrigamientos. Sin embargo, eventos en los que la propagación es descendente (y en los que la amplitud no decrece o incluso aumenta al ascender) han sido también observados en el EUV (Extremo Ultra Violeta - Borgazzi y Costa, 2005a). Se han desarrollado modelos analíticos de ondas magnetoacústicas que evolucionan no linealmente aumentando su intensidad relativa con la altura para explicar dichas observaciones.

Por otro lado, debido a los altos valores de energía que se ponen en juego en las fulguraciones, los modelos de ondas magnetoacústicas no pueden dar cuenta de la dinámica de abrigamientos en arcos post-fulguración. Se cree que el calentamiento eficiente del plasma cromosférico por parte de la fulguración desencadena la evaporación cromosférica y el consiguiente flujo de plasma que, eventualmente, puede volverse repetitivo. Se ha sugerido que una explicación que combina ambas descripciones (flujo y ondas) resultaría más

promisoria. Una serie de trabajos relativamente recientes mostraron que las oscilaciones en longitud de onda de radio, rayos X y luz blanca observadas en fulguraciones pueden ser descritas como modos magnetoacústicos lentos en el marco de un proceso dinámico asociado con el flujo de plasma (Borgazzi y Costa, 2005b).

Simulaciones numéricas (Nakariakov y Verwichte, 2005) han podido reproducir escenarios en los que luego de una deposición impulsiva de energía -en el vértice del arco o en sus bases cromosféricas- y de la consiguiente evaporación cromosférica del plasma con velocidades del orden de los cientos de km/s se producía, -debido a la acción combinada de calentamiento del plasma y las pérdidas radiativas y convectivas- un patrón oscilatorio con amplitudes típicas de décimas de km/s. Posteriormente, sobreviene una fase de drenado del plasma, nuevamente con velocidades del orden de los cientos de km/s. En conclusión, cuando no están involucrados movimientos de la estructura como un todo, las oscilaciones cuasi periódicas en los parámetros físicos han podido ser interpretadas como el resultado de ondas magnetoacústicas estacionarias lentas causadas por el calentamiento impulsivo y localizado que genera el flujo de plasma inicial.

Otro punto en debate es el de la estructura térmica del plasma interno de los arcos. Observaciones realizadas con el telescopio espacial TRACE, *Transition Region and Coronal Explorer* (Handy et al., 1999) sugieren que los arcos calientes son isotérmicos y más densos que lo predicho por los modelos de plasma estático. Este escenario, sin embargo, no es conclusivo, e interpretaciones divergentes son también contempladas. Se ha sugerido que un grupo de hebras, cada una con plasma estático y con gradientes de temperatura de dos órdenes de magnitud de diferencia entre las bases y el vértice del arco (modelo estático) puede convolucionar con la respuesta térmica de TRACE presentando una apariencia isotérmica. Además, el hecho de que las imágenes formen un conjunto de datos integrados en el tiempo con una resolución espacial finita -en el entorno de otras estructuras usualmente intersecadas por la línea de la visual y afectadas por la emisión de fondo- permite, aun hoy, la convivencia de interpretaciones variadas y contrapuestas.

En trabajos recientes (Costa y Stenborg, 2004; Borgazzi y Costa, 2005a) hemos desarrollado un método que nos permite seguir la evolución de abrigamientos a lo largo de arcos magnéticos. Aplicamos el procedimiento a un evento post-fulguración observado simultáneamente con el telescopio terrestre MICA, *Mirror Coronagraph for Argentina* (Stenborg et al., 1999) y con el telescopio espacial TRACE de mayor resolución (Fig. 1C). Tal evento registrado como un único arco coronal por MICA, se corresponde con una serie de hebras diferenciadas y coherentes en las imágenes de TRACE. En el evento registrado, la emisión, detectada inicialmente en el vértice superior de la estructura, descendió por ambos laterales en aproximadamente 12 minutos y con velocidades del orden de la velocidad del sonido en el medio. TRACE registró una doble reiteración del fenómeno a los 13 min y a los 18 min.

Algunos de nuestros resultados nos sugirieron la interpretación ondulatoria: I) la cuasi-periodicidad de las perturbaciones; II) la medición de velocidades no mayores a la del sonido (valores entre unos cientos y unas décimas de km/s) y III) patrones de velocidad aproximadamente constantes en el descenso de la perturbación. Sin embargo, los resultados no fueron concluyentes. Otros indicadores sugieren la interpretación de modelos de flujo: I) la periodicidad no es exclusiva del modelo de ondas, los procesos tipo ciclo límite pueden también ser periódicos; II) en uno de los casos observados las velocidades medidas no sólo no fueron constantes en el descenso sino comparables con el patrón de caída libre.

En conclusión, los resultados obtenidos y el carácter post-fulguración de las observaciones sugiere que el efecto combinado, de flujo y oscilaciones, es una interpretación más adecuada. El hecho de que casi todos los eventos registrados mostraran descenso de abrigamientos -

con intensidad en el vértice superior del arco mayor que en las bases cromosféricas (al menos en un 10%)- es consistente con modelos que sugieren que dicho patrón es observable cuando la intensidad de ondas magnetoacústicas lentas se amplifica no linealmente con la altura.

La descripción lineal del problema parece muy simplificada a la hora de pretender describir numéricamente el fenómeno. Es por esta razón que en este trabajo nos hemos propuesto investigar la evolución numérica no lineal de perturbaciones utilizando ecuaciones de la magnetohidrodinámica ideal (MHD). Como primera instancia nos propusimos reobtener numéricamente la curva observacional del mismo fenómeno, observado con los telescopios MICA y TRACE (Fig. 1A). Obtuvimos esta curva con dos longitudes de onda diferentes que corresponden a dos temperaturas (MICA $T1.8 \cdot 10^6$ K y TRACE $T1 \cdot 10^6$ K) y a diferentes telescopios uno en tierra y otro espacial.

2 ECUACIONES DE LA MHD IDEAL

2.1 Forma conservativa de las ecuaciones de la MHD ideal de un fluido simple

Podemos expresar las ecuaciones de la magnetohidrodinámica ideal en lo que se denomina “forma conservativa”. Lo cual es particularmente muy importante a la hora de utilizar métodos numéricos TVD (*Total Variation Diminishing*) con la finalidad de capturar discontinuidades con altos niveles de exactitud.

La forma conservativa consiste en escribir el sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales (EDP) como:

$$\frac{\partial \underline{U}}{\partial t} + \nabla \cdot \underline{f}_h(\underline{U}) = \nabla \cdot \underline{f}_p(\underline{U}), \quad (1)$$

donde:

\underline{U} es el vector de las variables conservativas o vector de variables de estado,

$\underline{f}_h(\underline{U})$ es el tensor de flujo hiperbólico,

$\underline{f}_p(\underline{U})$ es el tensor de flujo parabólico.

Las ecuaciones de conservación de la masa, conservación de la cantidad de movimiento, inducción magnética y conservación de la energía expresadas en la forma conservativa son:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \rho \\ \rho \underline{u} \\ \underline{B} \\ e \end{bmatrix} + \nabla \cdot \begin{bmatrix} \rho \underline{u} \\ \rho \underline{u} \underline{u} - \frac{1}{\mu_o} \underline{B} \underline{B} + I \left(p + \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_o} \right) \\ \underline{u} \underline{B} - \underline{B} \underline{u} \\ \left(e + p + \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_o} \right) \underline{u} - (\underline{B} \cdot \underline{u}) \frac{\underline{B}}{\mu_o} \end{bmatrix} = 0, \quad (2)$$

donde, ρ representa la densidad, \underline{u} el campo de velocidades, \underline{B} el campo de inducción magnética, e la energía interna, p la presión del gas y μ_o la permeabilidad magnética.

Cerramos este sistema de EDP introduciendo la ecuación de estado para gases perfectos:

$$p = \rho R T, \quad (3)$$

donde R es la constante de los gases y T la temperatura.

El sistema de EDP dado en Ec. (2) es hiperbólico y escrito en forma adimensional se transforma en:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{t}} \begin{bmatrix} \bar{\rho} \\ \bar{\rho} \bar{u} \\ \bar{B} \\ \bar{e} \end{bmatrix} + \bar{\nabla} \cdot \begin{bmatrix} \bar{\rho} \bar{u} \\ \bar{\rho} \bar{u} \bar{u} - \bar{B} \bar{B} + I \left(\bar{p} + \frac{1}{2} \bar{B}^2 \right) \\ \bar{u} \bar{B} - \bar{B} \bar{u} \\ \left(\bar{e} + \bar{p} + \frac{1}{2} \bar{B}^2 \right) \bar{u} - (\bar{B} \cdot \bar{u}) \bar{B} \end{bmatrix} = 0. \quad (4)$$

Por simplicidad en la notación no se utilizará de aquí en más la barra sobre las variables y se entenderá que ellas son adimensionales excepto cuando se indiquen explícitamente las unidades.

2.2 Forma cuasi-lineal. Matrices jacobianas de los flujos. Ondas características

El sistema de ecuaciones dado por las Ecs. (4) es válido para cualquier sistema de coordenadas por estar escrito en forma tensorial (White, 1991).

En este trabajo, consideramos que las magnitudes escalares y los campos sólo dependen de dos variables independientes: una coordenada espacial y el tiempo. Si introducimos un sistema de coordenadas cartesianas la Ec. (1) puede ser escrita en el caso 1D como:

$$\frac{\partial \underline{U}}{\partial t} + \frac{\partial \underline{F}}{\partial x} = \underline{0}, \quad (5)$$

donde \underline{U} es denominado vector de variables conservativas

$$\underline{U} = \left(\rho, \rho u_x, \rho u_y, \rho u_z, B_x, B_y, B_z, e \right)^T, \quad (6)$$

y \underline{F} es el vector que especifica los flujos hiperbólicos

$$\underline{F} = \begin{pmatrix} \rho u_x \\ \rho u_x^2 - B_x^2 + p + \frac{1}{2} B^2 \\ \rho u_x u_y - B_x B_y \\ \rho u_x u_z - B_x B_z \\ 0 \\ u_x B_y - u_y B_x \\ u_x B_z - u_z B_x \\ \left(e + p + \frac{1}{2} B^2 \right) u_x - (\underline{B} \cdot \underline{u}) B_x \end{pmatrix}. \quad (7)$$

La matriz Jacobiana del flujo (donde el subíndice c resalta que la derivación ha sido realizada respecto a las variables conservativas) está dada por:

$$[A_c] = \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \tilde{U}}. \quad (8)$$

El sistema de ecuaciones (5) puede ser escrito en una forma cuasi-lineal como:

$$\frac{\partial \tilde{U}}{\partial t} + [A_c] \frac{\partial \tilde{U}}{\partial x} = \tilde{0}. \quad (9)$$

Resulta de utilidad en la comprensión del fenómeno físico, en lo que a resultados respecta y en lo referente a mediciones de laboratorio, la utilización de las variables primitivas:

$$\tilde{W} = (\rho, u_x, u_y, u_z, B_x, B_y, B_z, p)^T. \quad (10)$$

Por consiguiente, el sistema dado en (9) queda expresado en términos de las variables primitivas de la siguiente manera:

$$\frac{\partial \tilde{W}}{\partial t} + [A_p] \frac{\partial \tilde{W}}{\partial x} = \tilde{0}, \quad (11)$$

donde las reglas de transformación utilizadas para expresar la matriz Jacobiana del flujo en función de las variables primitivas son:

$$[A_p] = \left(\frac{\partial \tilde{W}}{\partial \tilde{U}} \right) [A_c] \left(\frac{\partial \tilde{U}}{\partial \tilde{W}} \right), \quad (12)$$

siendo:

$$[A_p] = \begin{bmatrix} u_x & \rho & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u_x & 0 & 0 & -\frac{B_x}{\rho} & \frac{B_y}{\rho} & \frac{B_x}{\rho} & \frac{1}{\rho} \\ 0 & 0 & u_x & 0 & -\frac{B_y}{\rho} & -\frac{B_x}{\rho} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u_x & -\frac{B_z}{\rho} & 0 & -\frac{B_x}{\rho} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_y & -B_x & 0 & -u_y & u_x & 0 & 0 \\ 0 & B_z & 0 & -B_x & -u_z & 0 & u_x & 0 \\ 0 & \gamma p & 0 & 0 & (\gamma - 1) \underline{u} \cdot \underline{B} & 0 & 0 & u_x \end{bmatrix}. \quad (13)$$

La resolución de las ecuaciones de Maxwell acopladas a las ecuaciones de Euler para fluidos compresibles se basa en la utilización de ondas asociadas al problema físico. Una importante característica de la MHD es la cantidad de ondas que se producen, estas juegan un papel importante en el fenómeno físico y en la obtención de la solución de dichos flujos.

Asociados a los autovalores de la matriz Jacobiana encontramos las velocidades de las ondas. Tanto las ondas como sus velocidades están indicadas en la Figura 2:

- Onda Entrópica $\lambda_e = u_x$, (14)

- Ondas Alfvén $\lambda_a = u_x \pm c_a$, (15)

- Ondas Magneto-acústicas rápidas $\lambda_f = u_x \pm c_f$, (16)

- Ondas Magneto-acústicas lentas $\lambda_s = u_x \pm c_s$, (17)

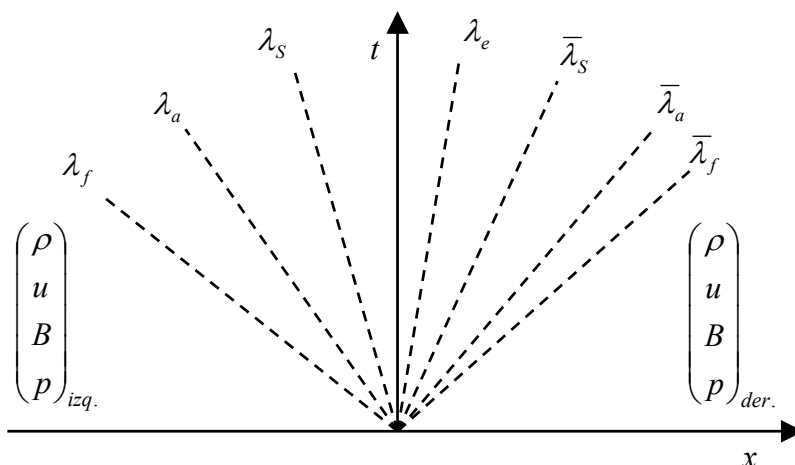


Figura 2: Sistema de ocho ondas del problema unidimensional en la MHD.

donde c_a , la velocidad de Alfvén adimensionalizada, es:

$$c_a = \frac{B_x}{\sqrt{\rho}}. \quad (18)$$

y c_f , c_s son respectivamente las velocidades magnetoacústica rápida y lenta. Definidas como (la velocidad magnetoacústica rápida corresponde al signo más delante de la raíz cuadrada):

$$c_{f,s}^2 = \frac{1}{2} \left[\frac{\gamma p + B^2}{\rho} \pm \sqrt{\left(\frac{\gamma p + B^2}{\rho} \right)^2 - 4 \frac{\gamma p B_x^2}{\rho^2}} \right]. \quad (19)$$

El octavo autovalor es idénticamente cero y debido a que la formulación en variables primitivas es equivalente a la en variables conservativas éste aparece en ambas. Un “solver” de Riemann no podría trabajar con este valor nulo por lo que utilizamos las matrices Jacobianas de los flujos modificadas por Powell (1995) y Powell et al. (1999) que son no singulares. El criterio utilizado por Powell para modificar las matrices se basa en:

- los vectores y valores propios correspondientes a las siete ondas asociadas al problema unidimensional permanecen sin cambios;
- el valor propio asociado a la nueva octava onda es igual a u ;
- los vectores propios derechos e izquierdos asociados a la nueva octava onda tienen sentido físico;

- en el caso unidimensional el problema de Riemann de ocho ondas se reduce al problema de Riemann de siete ondas.

Esto transforma el sistema de EDP dado por la Ec. (4) en el siguiente:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \rho \\ \rho \underline{u} \\ \underline{B} \\ e \end{bmatrix} + \nabla \cdot \begin{bmatrix} \rho \underline{u} \\ \rho \underline{u} \underline{u} - \underline{B} \underline{B} + I \left(p + \frac{1}{2} B^2 \right) \\ \underline{u} \underline{B} - \underline{B} \underline{u} \\ \left(e + p + \frac{1}{2} B^2 \right) \underline{u} - (\underline{B} \cdot \underline{u}) \underline{B} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 \\ \underline{B} \\ \underline{u} \\ \underline{B} \cdot \underline{u} \end{bmatrix} (\nabla \cdot \underline{B}). \quad (20)$$

Estas modificaciones introducen un término de fuente proporcional a $\nabla \cdot \underline{B}$, es decir solo términos que son iguales a cero. La matriz Jacobiana de los flujos modificada, asociada al eje x resulta:

$$[A_p] = \begin{bmatrix} u_x & \rho & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u_x & 0 & 0 & 0 & \frac{B_y}{\rho} & \frac{B_z}{\rho} & \frac{1}{\rho} \\ 0 & 0 & u_x & 0 & 0 & -\frac{B_x}{\rho} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u_x & 0 & 0 & -\frac{B_x}{\rho} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & u_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_y & -B_x & 0 & 0 & u_x & 0 & 0 \\ 0 & B_z & 0 & -B_x & 0 & 0 & u_x & 0 \\ 0 & \gamma p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u_x \end{bmatrix}. \quad (21)$$

2.3 Formulación en volúmenes finitos

Discretizamos el dominio en celdas e introducimos una forma integral de la Ec. (5) para obtener la formulación en volúmenes finitos en la celda c ,

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{v_c} \underline{U} d\tau + \int_{v_c} \frac{\partial F(\underline{U})}{\partial x} d\tau = 0. \quad (22)$$

Asumimos como hipótesis que las variables conservativas son constantes en cada celda. Existen otros métodos que introducen variaciones parabólicas o lineales en las variables conservativas dentro de las celdas, pero en el código utilizado consideramos constantes. Si, en la Ec. (22), aplicamos el teorema de la divergencia, discretizamos la derivada de las variables conservativas con respecto al tiempo por medio de una aproximación en diferencias finitas de

primer orden y aproximamos la integral de superficie por una sumatoria sobre todas las caras de la celda, obtenemos:

$$\tilde{U}^{n+1} = \tilde{U}^n - \frac{\Delta t}{V_c} \sum_{i=1}^{caras} \tilde{F}(\tilde{U}^n) \cdot \underline{n}_i A_i. \quad (23)$$

Donde n indica el paso de tiempo e i la cara en análisis. La Ec. (23) de actualización de las variables conservativas en el tiempo representa un esquema explícito. LeVeque (1992) considera que los métodos explícitos aplicados en sistemas hiperbólicos son más eficientes que los implícitos, usados con un adecuado paso de tiempo, y además afirma que los métodos implícitos son raramente usados en este tipo de sistemas de EDP. En problemas hiperbólicos-parabólicos, aparecen normalmente zonas del dominio donde los efectos difusivos son importantes, por ende el tamaño de las celdas debe ser considerablemente menor que en el resto del dominio. En estos casos condiciones de estabilidad de la solución fuerzan a los sistemas explícitos a utilizar pasos de tiempo de menor orden, incrementándose los tiempos de computación totales. Para solucionar este inconveniente, esquemas implícitos deben ser implementados.

Para flujos dependientes de una variable espacial la Ec.(23) puede ser escrita como:

$$\tilde{U}_{ij}^{n+1} = \tilde{U}_{ij}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\overline{F_{i+\frac{1}{2};j}^n} - \overline{F_{i-\frac{1}{2};j}^n} \right), \quad (24)$$

donde $\overline{F_{i+\frac{1}{2};j}^n}$ es el vector de flujo numérico de las variables conservativas obtenido en la interfase de la celda (i, j) para un tiempo n .

2.4 Esquema TVD

Se entiende por Métodos de Alta Resolución aquellos que tienen por lo menos una exactitud de segundo orden en soluciones suaves y, además, pueden captar discontinuidades sin oscilaciones. La idea principal detrás de cualquier método de alta resolución es intentar usar un método de orden elevado, pero modificarlo con el objeto de incrementar la disipación numérica en la vecindad de una discontinuidad. Un análisis de algunos métodos de alta resolución se encuentra en Colella (1984) y en Zarachay et al. (1994). Un camino es considerar al flujo numérico como una combinación de un flujo de orden elevado F^H y uno de bajo orden F^L .

El flujo numérico existente en la Ec. (24) puede ser escrito de la siguiente forma para satisfacer el esquema TVD de Harten-Yee (Harten et al., 1976; Yee et al., 1985):

$$\overline{F_{i+\frac{1}{2};j}^n} = \frac{1}{2} \left\{ F_{i+1} + F_i + \sum_m \tilde{r}_{i+\frac{1}{2}}^m \Phi_{i+\frac{1}{2}}^m \right\}_{;j}^{(n)}, \quad (25)$$

siendo $\tilde{r}_{i+\frac{1}{2}}^m$ el m -ésimo vector propio derecho de la matriz $[A_c]$ modificada y la función limitadora está dada por:

$$\Phi_{i+\frac{1}{2}}^m = \left(g_{i+1}^m + g_i^m \right) - \sigma \left(\lambda_{i+\frac{1}{2}}^m + \gamma_{i+\frac{1}{2}}^m \right) \alpha_{i+\frac{1}{2}}^m, \quad (26)$$

con

$$g_i^m = S \max \left\{ 0, \min \left[\frac{1}{2} \sigma_{i+\frac{1}{2}}^m \left| \alpha_{i+\frac{1}{2}}^m \right|, \frac{S}{2} \sigma_{i-\frac{1}{2}}^m \alpha_{i-\frac{1}{2}}^m \right] \right\}, \quad (27)$$

$$S = \text{sgn} \left(\lambda_{i+\frac{1}{2}}^m \right), \quad (28)$$

$$\gamma_{i+\frac{1}{2}}^m = \begin{cases} \frac{1}{\alpha_{i+\frac{1}{2}}^m} (g_{i+1}^m - g_i^m) & \alpha_{i+\frac{1}{2}}^m \neq 0 \\ 0 & \alpha_{i+\frac{1}{2}}^m = 0 \end{cases}. \quad (29)$$

La función limitadora dada en las Ecs. (26-27) se denomina Minmod (LeVeque et al., 1992). El flujo numérico dado por la Ec. (25) es introducido en la Ec. (24) para obtener la evolución temporal de las variables conservativas.

Normalizamos los vectores propios derechos e izquierdos expresados siguiendo a Zarachay et al. (1994) con la finalidad de evitar degeneraciones en la solución del sistema hiperbólico de la MHD.

3 RESULTADOS

Simulamos el arco magnético como un tubo extendido de longitud unitaria dividido en tres secciones. La primera sección comprende desde el comienzo del tubo hasta un 40% de su longitud ($x = 0,40$), la segunda sección va desde $x = 0,40$ hasta $x = 0,60$, mientras que la tercera está comprendida entre $x = 0,60$ y $x = 1$. La elección de coordenadas se corresponde con la descripción utilizada para las observaciones del fenómeno físico (ver Fig. 3).

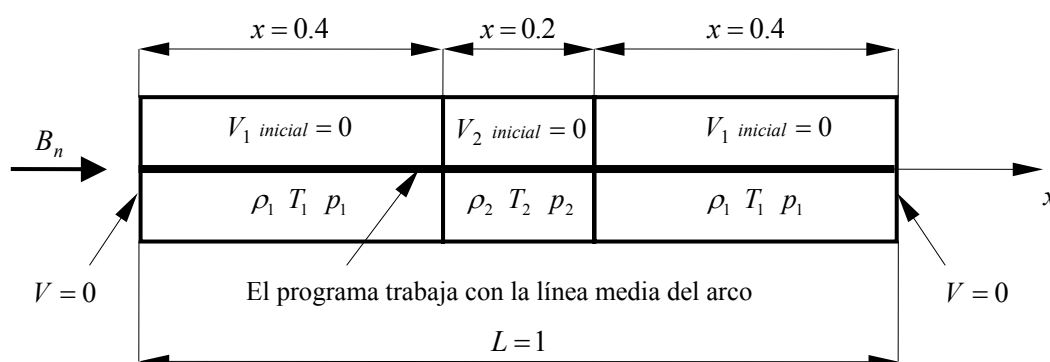


Figura 3: Esquema de las condiciones iniciales utilizadas.

El programa trabaja con campo magnético, presión y densidad adimensionalizados, por lo que partiendo de los posibles valores de presión y temperatura que podemos observar en la corona, estos luego fueron adimensionalizados respecto a los que se ingresen en la segunda sección.

Como primera aproximación consideramos campo magnético constante en la dirección del eje del arco, siendo $B_n = B_x = 1$.

Las densidad y temperatura en la corona solar pueden tener los siguientes órdenes de magnitud:

$$\rho = 10^9; 10^{10}; 10^{11} \text{ [partículas/cm}^3\text{]},$$

$$T = 10^4; 10^5; 10^6; 2 \cdot 10^6; 10^7 \text{ [K]}.$$

Obtuvimos la presión mediante la ecuación de estado de gases perfectos $p = \rho RT$, donde el gas es hidrógeno atómico con $R = 8248,5 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$, y la densidad debe ser dada en kg/m^3 . Despreciando la masa de los electrones respecto a la de los protones m_p , y siendo esta $m_p = 1,673 \cdot 10^{-27} \text{ kg/m}^3$, tenemos que los posibles valores de densidad son:

$$\rho = 10^9 \text{ [partículas/cm}^3\text{]} = 1,673 \cdot 10^{-12} \text{ [kg/cm}^3\text{]},$$

$$\rho = 10^{10} \text{ [partículas/cm}^3\text{]} = 1,673 \cdot 10^{-11} \text{ [kg/cm}^3\text{]},$$

$$\rho = 10^{11} \text{ [partículas/cm}^3\text{]} = 1,673 \cdot 10^{-10} \text{ [kg/cm}^3\text{]}.$$

Consideramos que los valores temperatura y densidad en la primera y tercera sección son iguales, dando lugar a una configuración simétrica. En la Tabla 1 son presentados los diferentes casos de combinaciones de presiones y densidades.

Como el programa tiene las variables adimensionalizadas, para el mismo serán casos iguales aquellos en los que la relación de presiones p_1 / p_2 coincidan, y lo mismo suceda con la relación de densidades ρ_1 / ρ_2 .

De las últimas dos columnas de la Tabla 1 vemos que existen 15 casos adimensionales diferentes, ya que:

$$\begin{aligned} \text{caso 1} &= \text{caso 3} = \text{caso 11} = \text{caso 13}, \\ \text{caso 2} &= \text{caso 5} = \text{caso 12} = \text{caso 15} = \text{caso 28}, \\ \text{caso 4} &= \text{caso 14}, \\ \text{caso 6} &= \text{caso 8} = \text{caso 34}, \\ \text{caso 7} &= \text{caso 10} = \text{caso 31} = \text{caso 33}, \\ \text{caso 9} &= \text{caso 32}, \\ \text{caso 16} &= \text{caso 18} = \text{caso 21} = \text{caso 23}, \\ \text{caso 17} &= \text{caso 20} = \text{caso 22} = \text{caso 25} = \text{caso 37} = \text{caso 40}, \\ \text{caso 19} &= \text{caso 24}, \\ \text{caso 35} &= \text{caso 38}, \\ \text{caso 36} &= \text{caso 39}. \end{aligned}$$

Por lo tanto seleccionamos los 15 casos descritos en la Tabla 2 que corresponden a las distintas combinaciones de valores de densidad y temperatura iniciales que resultan únicas.

Además, entre los casos seleccionados, buscamos aquellos que cumplan las siguientes condiciones encontradas en las observaciones (Aschwanden, 2004):

- 1) La relación de velocidades c_a/c_s en la zona sin perturbar del tubo no debe ser mayor a 4 aproximadamente, ya que en la corona se da esto;
- 2) La velocidad del frente de onda de la densidad obtenida por el programa debe ser del orden de las observadas en la corona (o sea entre las décimas y unas pocas centésimas de km/s).

En la Tabla 3, presentamos los casos adimensionales para los cuales se cumplieron la condición 1, mostrando también los respectivos casos físicos y la velocidad de onda adimensional dada por el programa. Vemos que para los casos 16, 18, 21, 23 se cumple mejor la relación buscada c_a / c_s .

Caso	$\rho_1 \times 10^9$ [part/cm ³]	$T_1 \times 10^4$ [K]	$p_1 \times 10^{-4}$ [Pa]	$\rho_2 \times 10^9$ [part/cm ³]	$T_2 \times 10^4$ [K]	$p_2 \times 10^{-4}$ [Pa]
1	1	1	1.38	10	10	138
2	1	1	1.38	10	100	1380
3	1	10	13.8	10	100	1380
4	1	10	13.8	10	200	2760
5	1	10	13.8	10	1000	13800
6	1	1	1.38	100	10	1380
7	1	1	1.38	100	100	13800
8	1	10	13.8	100	100	13800
9	1	10	13.8	100	200	27600
10	1	10	13.8	100	1000	138000
11	10	1	13.8	100	10	1380
12	10	1	13.8	100	100	13800
13	10	10	138	100	100	13800
14	10	10	138	100	200	27600
15	10	10	138	100	1000	138000
16	10	1	13.8	10	10	138
17	10	1	13.8	10	100	1380
18	10	10	138	10	100	1380
19	10	10	138	10	200	2760
20	10	10	138	10	1000	13800
21	100	1	138	100	10	1380
22	100	1	138	100	100	13800
23	100	10	1380	100	100	13800
24	100	10	1380	100	200	27600
25	100	10	1380	100	1000	138000
26	1	1	1.38	10	200	2760
27	1	1	1.38	10	1000	13800
28	1	10	13.8	10	1000	13800
29	1	1	1.38	100	200	27600
30	1	1	1.38	100	1000	138000
31	1	10	13.8	100	1000	138000
32	10	1	13.8	100	200	27600
33	10	1	13.8	100	1000	138000
34	10	10	138	100	1000	138000
35	10	1	13.8	10	200	2760
36	10	1	13.8	10	1000	13800
37	10	10	138	10	1000	13800
38	100	1	138	100	200	27600
39	100	1	138	100	1000	138000
40	100	10	1380	100	1000	138000

Tabla 1: Diferentes valores de densidad y presión posibles en la corona solar.

Ahora, de estos cuatro casos adimensionales, debemos determinar cuáles, al pasar a la forma dimensional, tienen una velocidad de onda más próxima a las observadas. La velocidad en el programa se adimensionaliza respecto a la velocidad de Alfvén, por lo que:

$$V_{onda\ fisica} = V_{onda\ adimensional} \cdot V_{alfvén\ referencia} \quad (30)$$

donde $V_{\text{alfvénreferencia}} = \frac{B_{\text{ref}}}{\sqrt{\mu_0 \rho_{\text{ref}}}}$.

Caso	$\frac{\rho_1}{\rho_2}$	$\frac{p_1}{p_2}$	Caso	$\frac{\rho_1}{\rho_2}$	$\frac{p_1}{p_2}$
1	0.1	0.01	19	1	0.05
2	0.1	0.001	26	0.1	0.0005
4	0.1	0.005	27	0.1	0.0001
6	0.01	0.001	29	0.01	0.00005
7	0.01	0.0001	30	0.01	0.00001
9	0.01	0.0005	35	1	0.005
16	1	0.1	36	1	0.001
17	1	0.01			

Tabla 2: Casos seleccionados.

Caso Adimensional	Caso Físico	Velocidad de Onda	Velocidad de Alfvén	Velocidad del Sonido
16	$\rho_1 = \rho_2 = 10^{10} [\text{part/cm}^3]$ $T_1 = 10^4 \text{ K}$ $T_2 = 10^5 \text{ K}$	0.81	1	0.374
18	$\rho_1 = \rho_2 = 10^{10} [\text{part/cm}^3]$ $T_1 = 10^5 \text{ K}$ $T_2 = 10^6 \text{ K}$	0.81	1	0.374
21	$\rho_1 = \rho_2 = 10^{11} [\text{part/cm}^3]$ $T_1 = 10^4 \text{ K}$ $T_2 = 10^5 \text{ K}$	0.81	1	0.374
23	$\rho_1 = \rho_2 = 10^{11} [\text{part/cm}^3]$ $T_1 = 10^5 \text{ K}$ $T_2 = 10^6 \text{ K}$	0.81	1	0.374
19	$\rho_1 = \rho_2 = 10^{10} [\text{part/cm}^3]$ $T_1 = 10^5 \text{ K}$ $T_2 = 2 \cdot 10^6 \text{ K}$	0.771	1	0.265
24	$\rho_1 = \rho_2 = 10^{11} [\text{part/cm}^3]$ $T_1 = 10^5 \text{ K}$ $T_2 = 2 \cdot 10^6 \text{ K}$	0.771	1	0.265

Tabla 3: Casos adimensionales que cumplen la condición 1.

En la Figura 4 mostramos la evolución espacial y temporal de la densidad y en la Figura 5 el perfil de densidad para 1000 pasos de tiempo. El frente de onda de la primera discontinuidad corresponde a una onda de choque.

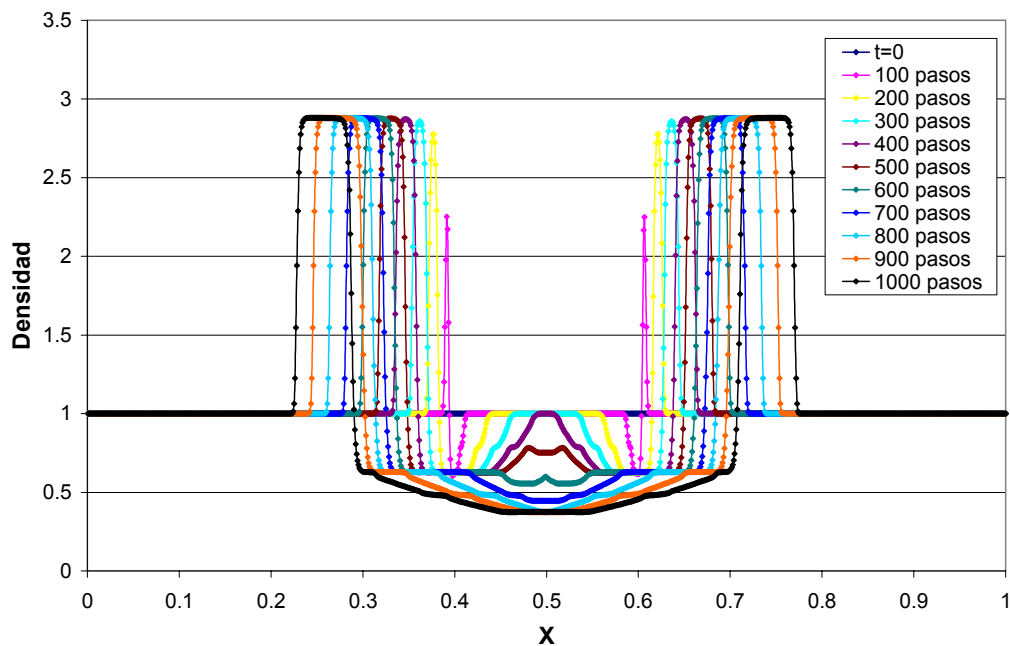


Figura 4: Evolución de la densidad representativa de los casos seleccionados.

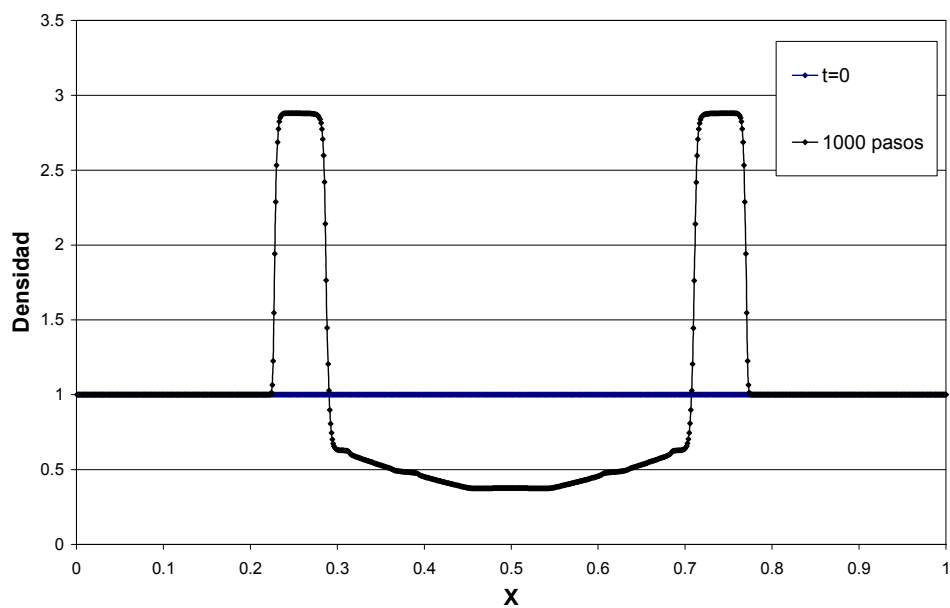


Figura 5: Perfil de densidad para el último tiempo calculado.

Cada una de las curvas que observamos en las figuras anteriores corresponde a un paso temporal. Para medir la velocidad con que el abrigantamiento se desplaza a lo largo del arco magnético, destacamos la posición de los máximos simétricos a lo largo del tiempo, dando como resultado una gráfica como la representada en la Figura 6. La velocidad de onda adimensional es la del frente de onda de choque con que evoluciona la densidad de la Figura 4 y se muestra en la Figura 6.

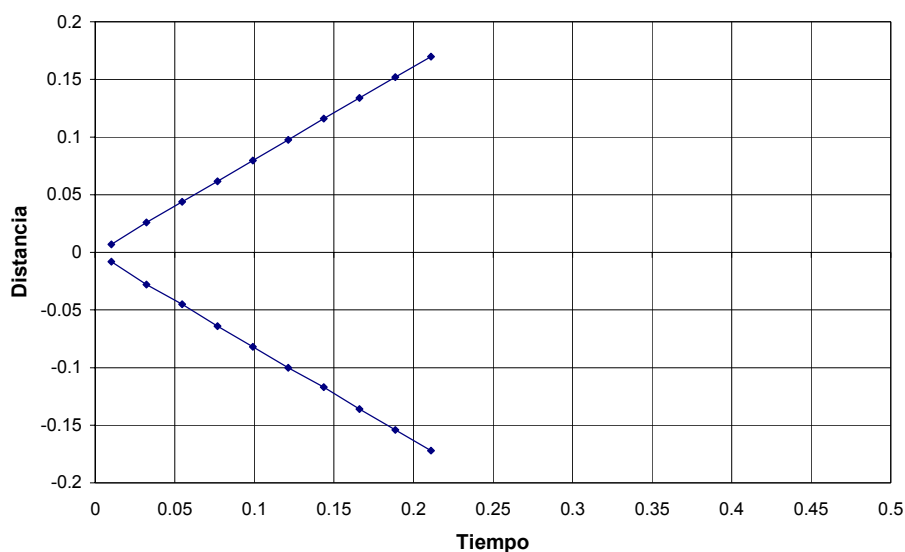


Figura 6: Velocidad de onda adimensional obtenida para el caso representativo.

El caso adimensional representativo corresponde a cuatro casos dimensionales diferentes. Para los posibles valores de campo magnético B observados en la corona, que van de 10 a 100 Gauss, descartamos los casos físicos 16 y 18 porque, con la densidad dada en los mismos, obtenemos velocidades de Alfvén de referencia muy elevadas, dando como resultado una velocidad de onda física muy por encima de las observadas.

Para los casos 21 y 23, las velocidades de Alfvén de referencia están comprendidas entre 69 km/s para $B_n = 10\text{G}$ y 690 km/s para $B_n = 100\text{G}$. Cabe aclarar que esta variabilidad de la intensidad del campo magnético es la aceptada para arcos coronales. Por ello nos queda buscar el valor del campo magnético que se ajusta mejor a los datos observados.

Las velocidades de onda física obtenidas en este trabajo para los casos 21 y 23 son del orden de las observadas, siendo estos dos casos los que mejor se ajustan al problema real. La velocidad de onda dimensional para estos casos es 112 km/s para un campo magnético de 20G. La velocidad con que viaja el abrillantamiento, según las observaciones es 112 km/s en una rama del arco y 50 km/s en la otra (Fig. 7). Notar que, dado que supusimos una geometría simétrica, no ha sido posible simular la asimetría del caso real. Para ello habría que considerar otros efectos que serán contemplados en una próxima etapa.

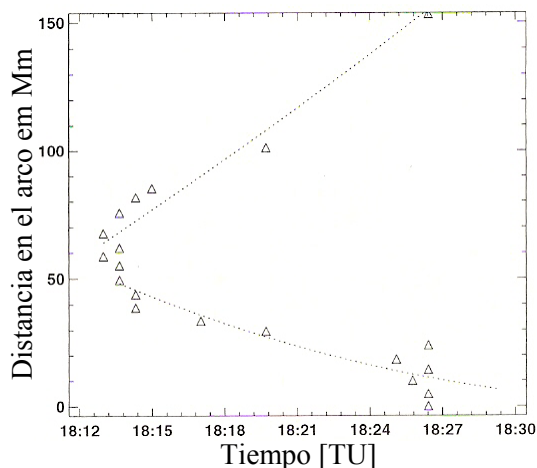


Figura 7: Ubicación de los abrillantamientos a lo largo de la corona en función del tiempo.

Para iniciar el proceso se eligió una perturbación con parámetro $\beta = 1$ aplicada en el reducido sector superior del arco. Se constató que en la evolución posterior dicho parámetro se mantuvo entre 0,1 y 0,5 dependiendo de la posición a lo largo del arco.

4 CONCLUSIONES

Hemos resuelto numéricamente las ecuaciones de la MHD ideal por medio de un esquema de volúmenes finitos centrados en celdas para dar cuenta de la dinámica del plasma en arcos magnéticos de la baja corona solar. Tratamos los flujos hiperbólicos con la técnica de ocho ondas de Powell (1995) en forma conjunta con la normalización de vectores propios descripta por Zarachay et al. (1994) para evitar problemas de condicionamiento. El cálculo de los flujos numéricos fue resuelto por medio de la implementación del esquema TVD de Harten-Yee conjuntamente con un "Riemann solver" aproximado.

Mediante la implementación numérica realizada hemos podido reproducir curvas obtenidas observacionalmente procesando imágenes de telescopios satelitales y terrestres. Ello nos permite interpretar la física del plasma coronal a partir de las ecuaciones, parámetros y condiciones físicas simuladas numéricamente. Es decir, la dinámica de abrigamientos observada responde a la descripción en términos de ondas de choque propagándose en el interior de tubos magnéticos. Este tipo de resultados es novedoso dado que, si bien se ha sugerido la interpretación en términos de ondas de choque, en la literatura sólo se han reportado simulaciones de la dinámica del plasma de arcos coronales interpretada en términos de ondas de plasma. Dado que los modelos basados en ondas magnetoacústicas no logran dar cuenta completa de la dinámica de abrigamientos de arcos post-fulguración (Borgazzi y Costa, 2005a; Nakariakov, 2007) esta nueva descripción es un aporte más que debe ser tenido en cuenta a la hora de considerar los fenómenos que pueden ser responsables de dicha dinámica. Otros autores sugieren que una combinación de fenómenos pueden estar operando de modo de proveer una mejor interpretación (Alexander et al., 1998).

La variabilidad observada de la dinámica de abrigamientos en la baja corona solar es grande, lo que proporciona un amplio margen de interpretaciones posibles. Sin embargo, el ajuste al nivel del orden de magnitud y la reproducción de la dinámica de un caso particular, como el estudio unidimensional de ondas de choque en el interior de tubos magnéticos, son resultados promisorios que además muestran la factibilidad de este tipo de interpretación.

REFERENCIAS

- Alexander, D., Harra-Murnion, L.K., Khan, J.I., Matthews, S.A., *Ap.J.*, 494, L235, 1998.
 Aschwanden, M.J., *Physics of the Solar Corona*, NY: Springer-Verlag, 2004.
 Borgazzi, A., Costa, A., *A&A*, 441, 1, 327, 2005a.
 Borgazzi, A., Costa, A., *JASP*, 67, 17, 1714, 2005b.
 Colella, P., Multidimensional Upwind Methods for Hyperbolic Conservation Laws, *Lawrence Berkeley Lab Report*, LBL-17023, 1984.
 Costa, A., Stenborg, G., *Solar Phys.*, 222, 2, 2004.
 Domingo, V., Fleck, B., *SOHO Science Reports*, Space Science Department of ESA, 1994.
 Goedbloed, H., Poedts, S., *Principles of Magnetohydrodynamics*, Cambridge University, 2004.
 Handy, B.N., Acton, L.W., Kankelborg, C.C., *Solar Phys.*, 184, 229, 1999.
 Harten, A., Hymán, J.M., Lax, P.D., On Finite-Difference Approximations and Entropy Conditions for Shocks, *Comm. Pure Appl. Math.*, 29, 1976.
 LeVeque, R.J., *Numerical Methods for Conservation Laws*, Birkhäuser, Germany, 1992.

- Nakariakov, V.M., MHD oscillations in Solar and Stellar Corona: current results and perspectives, *Adv. Sp. Res.*, 39, 1804, 2007.
- Nakariakov, V.M., Verwichte, E., Coronal Waves and Oscillations, *Living Rev. Solar Phys.*, 2, 2005.
- Powell, K., An Approximate Riemann Solver for Magnetohydrodynamics (that works in more than one dimension), *NASA Contract No NAS1-19480, ICASE, NASA Langley Research Center, Hampton, 1995.*
- Powell, K., Roe, P.L., Linde, T.J., Gombosi, T.I., Zeeuw, D.L., A solution-adaptive upwind scheme for ideal magnetohydrodynamics, *J. Compu. Phys.*, 154, 1999.
- Stenborg, G., Schwenn, R., Srivastava, N., Inhester, B., Podlipnik, B., Rovira, M., Francile, C., *Space Sci. Rev.*, 87, 307, 1999.
- White, F.M., *Viscous Fluid Flow*, McGraw-Hill, ISBN 0-07-100995-7, 1991.
- Yee, H., Warming, R., Harten, A., Implicit Total Variations Diminishing (TVD) Schemes for Steady-State Calculations, *J. Comput. Phys.*, 57, 1985.
- Zarachay, A., Malagoli, A., Collela, P., A Higher Order Godunov Method for Multidimensional Ideal Magnetohydrodynamics, *SIAM J. on Sci. Comput.*, 15, 1994.