

## UN MODELO EXPLICITO DE VISCOSIDAD EN REDES DE BOLTZMANN

Diego D. Dalponte<sup>a</sup> y Alejandro Clause<sup>a</sup>

*<sup>a</sup>CNEA - CONICET y Universidad Nacional del Centro  
pladema@exa.unicen.edu.ar*

**Palabras Clave:** Automatas de Redes de Boltzmann, Difusión Viscosa, Simulación de Fluidos.

**Resumen.** Una red de Boltzmann (RB) es una clase de autómata celular definida en un sustrato grillado regular de celdas cuyo estado está representado por una población de “partículas” mesoscópicas. En este trabajo se describe una implementación orientada a objetos de una subclase de RB en 2D. La RB implementada introduce un planteo original basado en la partición de la ecuación discreta de Boltzmann clásica en reglas independientes de actualización que dan lugar a subclases que naturalmente adoptan propiedades de herencia y encapsulamiento. El cambio más importante que se introduce es la eliminación del término de relajación en la ecuación de advección, el cual acopla en los RB clásicos los mecanismos de transporte y viscosidad. El control de la viscosidad se recupera con la introducción de una regla de difusión con invariancia local de densidad, que de este modo se independiza de la advección, agregando flexibilidad para la implementación de modelos anisotrópicos de turbulencia y de flujos en medios porosos.

Las ventajas del RB propuesto es que simplifica la reusabilidad del modelo base y el tratamiento de las condiciones de borde. La independencia de las reglas permite además el control de las secuencias de ejecución, lo cual puede ser explorado como nuevas técnicas de simulación. Se presentan visualizaciones de casos de escurrimientos viscosos en dos dimensiones generados con el control de la nueva regla de difusión. También se presenta la calibración numérica de los parámetros difusivos para la aproximación a las ecuaciones de Navier-Stokes.

## 1 INTRODUCCIÓN

Las redes de Boltzmann (RB) son una evolución de los Lattice-Gases, y se plantearon inicialmente para superar sus problemas de ruido numérico de estos últimos (Succi, 2001). El concepto básico de las RB es construir un modelo cinético mesoscópico con variable interna discreta —i.e. velocidad— cuyas propiedades macroscópicas promediadas cumplan con las ecuaciones macroscópicas deseadas (Chen y Doolen 1998). Las RB se presentan como una alternativa de gran flexibilidad para la construcción de visualizaciones de fluidos en base a principios físicos. Desde este punto de vista se pueden remarcar la paralelizabilidad y el control de propiedades a nivel microscópico (o mesoscópico), dando lugar a una herramienta poderosa para el diseño de efectos especiales.

Entre las aplicaciones de los autómatas de Boltzmann se destacan las simulaciones de fluidos incompresibles y compresibles (Higuera y Succi 1989, Foti y Succi 1989), medios permeables (Cancelliere y otros 1990), turbulencia (Chen y otros 1991), flujos superficiales (Zhou 2004), magnetohidrodinámica (Dellar 2002), entre otras.

Considérese un substrato grillado regular de celdas cuyo estado está representado por una población de “partículas” mesoscópicas. El estado de las partículas se expresa con una función distribución  $f_\alpha(x, t)$  (no observable directamente) que representa la cantidad de partículas en la celda  $x$  en el tiempo  $t$  moviéndose con velocidad  $\vec{v}_\alpha$  (tratada como una variable interna). La función distribución cambia de estado según reglas que se ejecutan secuencialmente (en lo posible explícitas), emulando mecanismos de transporte y colisión de las partículas. Los observables físicos son variables macroscópicas que se generan a partir de los momentos de  $f_\alpha(x, t)$  respecto de la variable  $\vec{v}_\alpha$ . Suponiendo que cada partícula tiene una masa  $m$ , se tiene:

$$\rho(\vec{x}, t) = m \sum_{\alpha} f_{\alpha}(\vec{x}, t) \quad \text{Densidad} \quad (1)$$

$$\rho(\vec{x}, t) \vec{u}(\vec{x}, t) = m \sum_{\alpha} \vec{v}_{\alpha} f_{\alpha}(\vec{x}, t) \quad \text{Flujo de partículas} \quad (2)$$

$$\vec{\pi}(\vec{x}, t) = m \sum_{\alpha} \vec{v}_{\alpha} \vec{v}_{\alpha}^T f_{\alpha}(\vec{x}, t) \quad \text{Tensor de momento} \quad (3)$$

$$\rho(x, t) \sigma(x, t) = \sum_{\alpha} s_{\alpha} f_{\alpha}(x, t) \quad \text{Propiedad } \sigma \text{ por partícula} \quad (4)$$

donde  $\vec{u}(\vec{x}, t)$  es la velocidad media local,  $s_{\alpha}$  puede ser cualquier escalar asociado a una partícula genérica con velocidad  $\vec{v}_{\alpha}$ , cuyo promedio local es  $\sigma(x, t)$  (e.g.  $s_{\alpha} = m v_{\alpha}^2 / 2$  es la energía cinética por partícula).

El conjunto de velocidades  $\vec{v}_{\alpha}$  está definido por el tipo de grilla. La vecindad de Moore en 2D es la más popular, la cual lleva a la RB conocida como D2Q9 (i.e. 2 dimensiones y nueve velocidades):

$$\begin{aligned}
\vec{v}_0 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\vec{v}_1 &= \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} -v \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{v}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -v \end{pmatrix} \\
\vec{v}_5 &= \begin{pmatrix} v \\ v \end{pmatrix} \quad \vec{v}_6 = \begin{pmatrix} v \\ -v \end{pmatrix} \quad \vec{v}_7 = \begin{pmatrix} -v \\ v \end{pmatrix} \quad \vec{v}_8 = \begin{pmatrix} -v \\ -v \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{5}$$

donde  $v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$  es una velocidad característica dada por el cociente entre el tamaño de la red y el paso de tiempo asociado a cada cambio del estado del autómata.

De acuerdo a la esencia de cualquier autómata celular (CA), el estado de cada celda cambia siguiendo un esquema de reglas explícitas, es decir reglas que sólo dependen del estado actual de la celda y sus vecinos. Sin embargo, aunque esta es la definición básica de cualquier CA, generalmente las RB se implementan introduciendo pasos recursivos que juntan dos o más reglas independientes en un procedimiento combinado. Este es el método convencional de introducir efectos viscosos en RB. La regla clásica de actualización de  $f_\alpha(x, t)$  es la ecuación discreta de Boltzmann (Chen y Doolen 1998):

$$f_\alpha(\vec{x} + \vec{v}_\alpha \Delta t, t + \Delta t) = f_\alpha(\vec{x}, t) - \frac{1}{\tau} (f_\alpha - f_\alpha^{eq}) + S_\alpha \tag{6}$$

donde  $\tau$  es un tiempo característico de relajación,  $S_\alpha$  es un término fuente, y la función de distribución en equilibrio  $f^{eq}$  representa la colisión entre partículas que se define de manera que a nivel macroscópico se conserve la masa, la cantidad de movimiento y la energía total en cada celda. El parámetro  $\tau$  es usado para controlar la viscosidad del escurrimiento.

## 2 MODELO DE RB SECUENCIAL EXPLICITO

En esta sección se presenta una formulación alternativa de RB, basada en una secuencia de reglas totalmente independientes. Esto juega un papel central para conservar el paralelismo del cálculo y por lo tanto la flexibilidad y reusabilidad del diseño, permitiendo una formulación natural para implementaciones orientadas a objetos. El principio fundamental es que la viscosidad de un fluido es esencialmente difusión de velocidad. Por lo tanto, los efectos viscosos se pueden representar con una regla de difusión independiente que mantenga invariante la densidad de partículas. De esta manera se evita el paso de relajación clásico de las RD que combina la advección con la colisión.

El esquema propuesto es una secuencia de las siguientes reglas:

1. Advección
2. Colisión
3. Viscosidad
4. Fuentes

## 2.1 Regla de Advección

La regla de advección transforma la función  $f_\alpha(\vec{x}, t)$  de acuerdo a:

$$f_\alpha(\vec{x} + \vec{v}_\alpha \Delta t, t + \Delta t) = f_\alpha(\vec{x}, t) \quad (7)$$

Es decir cada partícula de una dada celda es transportada a las celdas vecinas en correspondencia con su velocidad en un paso de tiempo  $\Delta t$ .

Desarrollando el miembro de la izquierda a primer orden en  $\Delta t$ :

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{v}_\alpha f_\alpha = 0 \quad (8)$$

Tomando los momentos 0 y 1 de la Ec.(7) respecto de  $\vec{v}_\alpha$ , y usando la Ec.(8) obtenemos:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0 \quad (9)$$

$$\frac{\partial (\rho \vec{u})}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{\pi} = 0 \quad (10)$$

## 2.2 Regla de Colisión

La regla de colisión hace que las partículas de una misma celda cambien de velocidad  $\vec{v}_\alpha$  de manera tal que se satisfagan las ecuaciones de conservación en el nivel macroscópico. En el caso de flujo superficial la regla de colisión cambia la distribución  $f$  a otra distribución de manera de satisfacer las ecuaciones de conservación de masa y momento, lo cual implica que los momentos 0, 1 y 2 de  $f$  deben cumplir en cada celda:

$$m \sum_\alpha f_\alpha(\vec{x}, t + \Delta t) = \rho(\vec{x}, t) \quad (11)$$

$$m \sum_\alpha f_\alpha(\vec{x}, t + \Delta t) \vec{v}_\alpha = \rho(\vec{x}, t) \vec{u}(\vec{x}, t) \quad (12)$$

$$m \sum_\alpha f_\alpha(\vec{x}, t + \Delta t) \vec{v}_\alpha \vec{v}_\alpha^T = \rho \left( \vec{u} \vec{u}^T + c^2 \vec{\mathbb{1}} \right) \quad (13)$$

donde  $c$  es la velocidad del sonido.

Hay varias soluciones que satisfacen las Ecs. 11, 12 y 13. La solución más conocida es (Qian y otros 1992):

$$f_\alpha(\bar{x}, t + \Delta t_c) = \frac{w_\alpha \rho}{m} \left[ 1 + \frac{\bar{v}_\alpha \cdot \bar{u}}{c^2} + \frac{(\bar{v}_\alpha \cdot \bar{u})^2}{2c^4} - \frac{u^2}{2c^2} \right] \quad (14)$$

donde el miembro derecho está evaluado en  $(\bar{x}, t)$ , y  $w_\alpha$  son pesos asociados con las velocidades de la grilla. Para el modelo D2Q9 los pesos son:

$$w_\alpha = \begin{cases} 4/9, & \alpha = 0, \\ 1/9, & \alpha = 1, 3, 5, 7, \\ 1/36, & \alpha = 2, 4, 6, 8, \end{cases} \quad (15)$$

Desarrollando el miembro de la izquierda de la Ec. (14) a primer orden en  $\Delta t$ :

$$f_\alpha(\bar{x}, t) + \Delta t \frac{\partial f_\alpha(\bar{x}, t)}{\partial t} = \frac{w_\alpha \rho}{m} \left[ 1 + \frac{\bar{v}_\alpha \cdot \bar{u}}{c^2} + \frac{(\bar{v}_\alpha \cdot \bar{u})^2}{2c^4} - \frac{u^2}{2c^2} \right] \quad (16)$$

Tomando los momentos 0 y 1 de la Ec. (16) respecto de  $\bar{v}_\alpha$ , y usando las Ecs. 11, 12 y 13 obtenemos:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (17)$$

$$\frac{\partial(\rho \bar{u})}{\partial t} = 0 \quad (18)$$

$$\bar{\pi} = \rho \left( \bar{u} \bar{u}^T + c^2 \bar{\mathbb{1}} \right) \quad (19)$$

### 2.3 Regla de Viscosidad

En la regla de viscosidad cada celda pasa a cada una de sus vecinas una cantidad  $d_\alpha$  de partículas de velocidad  $\bar{v}_\alpha$ , donde:

$$d_\alpha = \frac{D}{\rho} f_\alpha \quad (20)$$

siendo D es la cantidad total de partículas que salen de una celda a cada una de sus vecinas, esto es:

$$\sum_\alpha d_\alpha = D \quad (21)$$

De esta manera como cada celda intercambia cada vecina la misma cantidad de partículas

D,  $\rho$  se conserva localmente.

Formalmente, la regla de viscosidad transforma la función distribución de una celda como:

$$f_\alpha(\bar{x}, t + \Delta t) = f_\alpha(\bar{x}, t) - N d_\alpha + d_\alpha^r \quad (22)$$

donde  $N$  es el número de vecinos de la celda y  $d_\alpha^r$  es la cantidad de partículas con velocidad  $\vec{v}_\alpha$  recibidas desde todos sus nodos vecinos, dada por:

$$d_\alpha^r = Dm \sum_{\alpha'} \frac{f_\alpha(\bar{x} + \vec{v}_{\alpha'} \Delta t, t)}{\rho(\bar{x} + \vec{v}_{\alpha'} \Delta t, t)} \quad (23)$$

Combinando las Ecs. 22 y 23 se obtiene:

$$f_\alpha(\bar{x}, t + \Delta t) = f_\alpha(\bar{x}, t) + Dm \sum_{\alpha'} \left[ \frac{f_\alpha(\bar{x} + \vec{v}_{\alpha'} \Delta t, t)}{\rho(\bar{x} + \vec{v}_{\alpha'} \Delta t, t)} - \frac{f_\alpha(\bar{x}, t)}{\rho(\bar{x}, t)} \right] \quad (24)$$

Tomando los momentos 0 y 1 de la Ec. (24) respecto de  $\vec{v}_\alpha$  obtenemos:

$$\rho(\bar{x}, t + \Delta t) = \rho(\bar{x}, t) \quad (25)$$

$$\vec{w}(\bar{x}, t + \Delta t) = \vec{w}(\bar{x}, t) + Dm \sum_{\alpha'} [\vec{u}(\bar{x} + \vec{v}_{\alpha'} \Delta t, t) - \vec{u}(\bar{x}, t)] \quad (26)$$

donde  $\vec{w} = \rho \vec{u}$ .

Desarrollando en potencias de  $\Delta t$ :

$$\Delta t \frac{\partial \vec{w}}{\partial t} = \Delta t Dm \nabla \vec{u} \bullet \sum_{\alpha} \vec{v}_\alpha + \frac{\Delta t^2}{2} Dm \nabla^2 \vec{u} \sum_{\alpha} |\vec{v}_\alpha|^2 \quad (27)$$

donde  $\nabla$  y  $\nabla^2$  se aplican sobre cada componente de  $\vec{u}$ . Las sumatorias sobre los  $\vec{v}_\alpha$  resultan:

$$\sum_{\alpha} \vec{v}_\alpha = 0 \quad (28)$$

$$\sum_{\alpha} |\vec{v}_\alpha|^2 = 6v^2 \quad (29)$$

Con lo cual:

$$\frac{\partial \rho \vec{u}}{\partial t} = 3\Delta t v^2 m \nabla^2 D\vec{u} \quad (30)$$

Comparando con la ecuación de Navier-Stokes, se encuentra que la viscosidad cinemática está dada por:

$$\nu_D = \frac{3v^2 \Delta t Dm}{\rho} \quad (31)$$

En general, el parámetro de control  $D$  puede tener un valor diferente en cada par de celdas vecinas, con lo cual esta regla permite simular viscosidades anisotrópicas y localizadas, las cuales pueden darse en flujos porosos o en aproximaciones continuas de flujos exteriores a manojos de tubos en intercambiadores de calor. En ese caso  $D$  es una matriz definida en  $\vec{x}$ .

## 2.4 Regla de Fuente

La regla de fuentes transforma la función  $f_\alpha(\vec{x}, t)$  de acuerdo a:

$$f_\alpha(\vec{x}, t + \Delta t) = f_\alpha(\vec{x}, t) + \Delta t S_\alpha(\vec{x}, t) \quad (32)$$

donde  $S_\alpha(\vec{x}, t)$  es el número de partículas con velocidad  $\vec{v}_\alpha$  que son introducidas o extraídas por unidad de tiempo en la posición  $\vec{x}$ .

Desarrollando el miembro de la izquierda a primer orden en  $\Delta t$ :

$$\frac{\partial f_\alpha(\vec{x}, t)}{\partial t} = S_\alpha(\vec{x}, t) \quad (33)$$

Un modelo de fuente de masa e impulso propuesto recientemente es (Dalponte y otros 2007):

$$S_\alpha(\vec{x}, t) = \frac{s(\vec{x}, t)}{9} + \frac{\vec{v}_\alpha^T \vec{F}(\vec{x}, t) \vec{v}_\alpha}{6v^2} \quad (34)$$

donde  $s(\vec{x}, t)$  y  $\vec{F}(\vec{x}, t)$  son las tasas de variación de masa y la fuerza exterior por unidad de volumen actuante en  $(\vec{x}, t)$ .

Tomando los momentos 0 y 1 de la Ec. (34) respecto de  $\vec{v}_\alpha$  obtenemos:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = s(\vec{x}, t) \quad (35)$$

$$\frac{\partial(\rho \vec{u})}{\partial t} = \vec{F}(\vec{x}, t) \quad (36)$$

## 2.5 Límite diferencial

Combinando las ecuaciones del límite diferencial de las reglas del autómata, Ecs. 35 y 36, resulta:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = s \quad (37)$$

$$\frac{\partial(\rho\bar{u})}{\partial t} + \nabla \bullet \rho\bar{u}\bar{u}^T = -\nabla p + \nu \nabla^2 \bar{u} + \bar{F} \quad (38)$$

donde hemos puesto la presión como  $p = c^2 \rho$ .

Para valores suficientemente grandes de  $D\Delta t$ , la viscosidad viene dada por la Ec. (31). Debe tenerse en cuenta, de todos modos, que hay una cota superior de  $D$  que no puede sobrepasarse en un paso porque equivaldría a sacar más partículas de las que hay en una celda, lo cual lleva a valores negativos de  $f$ . Sin embargo, este inconveniente se soluciona repitiendo la aplicación de la regla de difusión viscosa varias veces.

Cuando  $D$  tiende a cero existe una viscosidad numérica remanente que no puede evitarse, proveniente de la combinación de las reglas de advección y colisión. A orden  $\Delta t$  esta viscosidad remanente es igual a  $\frac{1}{2}c^2\Delta t$  (Chen y Doolen 1998). La expresión de la viscosidad total queda:

$$\frac{\nu}{v^2\Delta t} = \frac{1}{2} \frac{c^2}{v^2} + \frac{3m}{\rho} D \quad (39)$$

### 3 IMPLEMENTACIÓN

El paradigma orientado a objetos (OO), junto con la utilización de patrones de diseño adecuados, está usándose cada vez más en el desarrollo de software científico. Un diseño flexible y orientado a objetos puede ser a priori menos eficiente que su equivalente implementado en un lenguaje estructurado. No obstante, en muchos casos resulta más provechoso plantear un esquema flexible que permita incorporar gradualmente distintas características.

En este desarrollo se optó por una implementación OO de la RB propuesta en JAVA, que soporta la concurrencia a través de *threads*, lo cual es útil como alternativa de paralelización. Brinda además todas las características del paradigma de programación orientada a objetos, tales como abstracción, encapsulamiento, herencia y polimorfismo, favoreciendo la generación de una plataforma de desarrollo flexible.

Se utilizó una variante a la arquitectura Model View Controller (MVC, Gamma 1995) denominada Document-View, que mantiene independiente la lógica de la aplicación de la funcionalidad propia de la interfaz de usuario, permitiendo la realización de cambios sin que afecten al RB. Con este diseño se permiten múltiples vistas del modelo, que pueden incorporarse en forma interactiva en tiempo de ejecución. Existen distintas implementaciones de las reglas de advección, colisión y difusión según si la celda corresponde a un borde (norte, sur, este, oeste) o si corresponde a un obstáculo. Se utiliza el patrón de diseño Strategy, el cual facilita la definición y el encapsulamiento de familias de algoritmos, que pueden variar dinámicamente (Gamma 1995).

La aplicación provee una interfaz gráfica para facilitar la configuración de las simulaciones y la visualización de las magnitudes macroscópicas (i.e. velocidad), lo cual es una



herramienta fundamental para el análisis de resultados. Se proveen mapas de contorno dinámicos de las magnitudes principales en escalas de colores no-lineales para alcanzar un mayor nivel de detalle en los valores pequeños. A través de una interfaz amigable se pueden configurar diferentes canales y guardar el estado completo de las simulaciones. Además se provee un conjunto de funciones orientadas a generar salidas en formato de texto de las magnitudes simuladas.

El esquema de RB propuesto en la secciones 3 y 4 fue aplicado en dos casos de prueba para analizar su performance: el flujo viscoso entre dos placas paralelas y el flujo en un medio 2D poroso anisotrópico.

### 3.1 Flujo viscoso entre placas paralelas

Considérese el flujo entre dos placas planas y paralelas, forzado por un gradiente de presión constante en la dirección  $x$ . Para simular el problema se implementó una RB en un canal rectangular sin pendiente de  $40 \times 40$  celdas, con los siguientes parámetros de red (en unidades MKS):

$$\Delta x = 1 ; \Delta t = 1 ; \bar{S}_\alpha = 0 ; \frac{c^2}{v^2} = \frac{1}{3} ; m = 1$$

En las paredes laterales paralelas al flujo se impusieron condiciones de contorno de velocidad neta cero. En los contornos abiertos se impuso presión constante,  $0.05/\sqrt{3}$  y  $0.049/\sqrt{3}$  para la entrada y salida respectivamente. Inicialmente se supone velocidad nula y 0.09 partículas en cada celda, y la RB evoluciona hasta converger al estado estacionario. Como indicador de convergencia se utilizó la norma  $l^2$ , esto es:

$$l^2 = \frac{\sum_{(x,y)} \sqrt{[u_x(t) - u_x(t)]^2 + [u_y(t) - u_y(t)]^2}}{\sum_{(x,y)} \sqrt{u_x^2(t) + u_y^2(t)}} \quad (40)$$

usando como criterio de convergencia una tolerancia de  $l^2 < 10^{-12}$ .

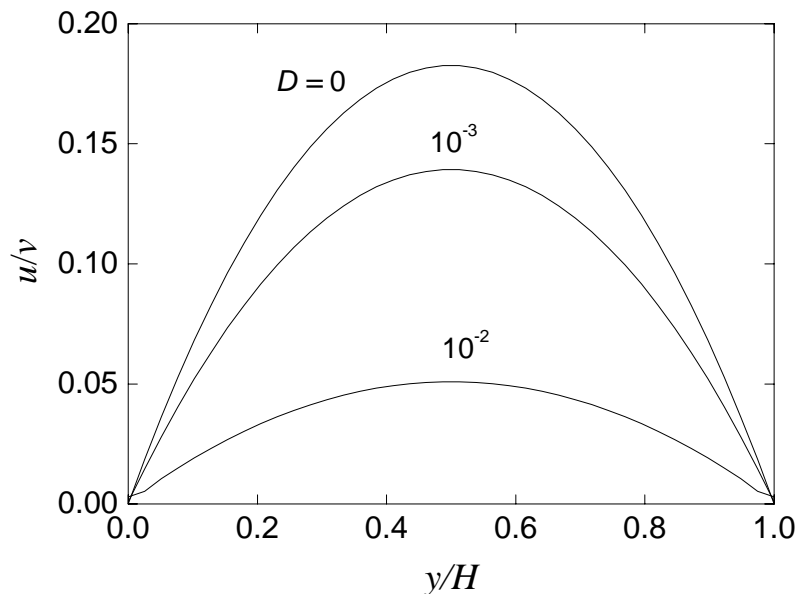


Figura 1. Perfil de velocidad en la mitad del canal para distintos valores de  $D$  en un flujo viscoso entre placas paralelas.

En la [Figura 1](#) se muestra el perfil de velocidad macroscópica resultante calculado para diferentes valores de  $D$ . Puede observarse que se obtienen perfiles parabólicos, y que a medida que el parámetro de difusión  $D$  se incrementa la velocidad central decrece, como es de esperar cuando aumenta la viscosidad.

La solución analítica del perfil de velocidad estacionario para flujos de bajo Reynolds es:

$$u = -\frac{G}{2\rho\nu} y(y-H) \quad (41)$$

donde  $G$  es el gradiente de presión y  $H$  es el ancho del canal. La velocidad máxima en el centro del canal es:

$$u_{\max} = -\frac{GH}{8\rho\nu} \quad (42)$$

La velocidad máxima resultante de la RB puede usarse en la Ec. (31) para relacionar la viscosidad con el parámetro de difusión  $D$ , verificándose la siguiente relación lineal:

$$\frac{\nu}{v^2 \Delta t} = 0.18 + 60 D \quad (43)$$

Comparando las Ecs. 31 y 43 se encuentra una discordancia del 9% en la viscosidad intrínseca de la red (independiente de  $D$ ) y 0.7% en la difusión viscosa (dependiente de  $D$ ). La disparidad es atribuible a correcciones de tercer orden.

### 3.2 Flujo en medios porosos con viscosidad anisotrópica

Una ventaja práctica del esquema propuesto es que el parámetro de difusión  $D$  puede tener un valor diferente localmente. De esta manera se puede simular zonas de diferente resistencia al flujo (como obstáculos porosos), o viscosidades anisotrópicas. Este último caso tiene aplicación en la simulación de escurrimientos en napas, flujos entre manojos de tubos, etc.

Para probar la simulación de un medio anisótropo se modeló el flujo estacionario un canal entre placas paralelas ( $101 \times 51$  celdas) con una contracción impuesta por un obstáculo (Figura 2). Los parámetros de la red son los mismos que el caso anterior. Las condiciones de contorno en las paredes son slip y en la entrada y la salida presión constante ( $0.05/\sqrt{3}$  y  $0.049/\sqrt{3}$ , respectivamente). Se impuso  $D = 0$  en la dirección transversal,  $D = 0.008$  en la dirección axial, y  $D = 0.004$  en la diagonal. En la Figura 2 se muestra el mapa de velocidades (módulo de la velocidad) resultante de la simulación. Puede verse que la velocidad aumenta en la contracción, como es de esperar para conservar el caudal.

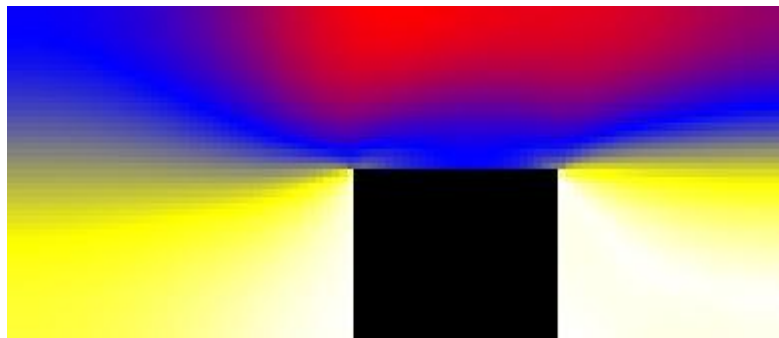


Figura 2. Mapa de velocidades en el canal con un obstáculo que estrecha el paso del flujo.

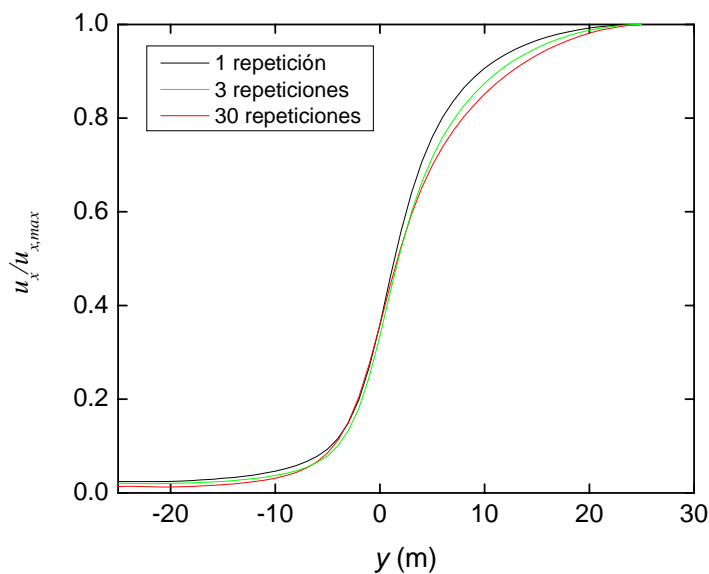


Figura 3. Perfil de velocidades horizontal 5 celdas delante del obstáculo, con distintas repeticiones del paso de difusión.

En la [Figura 3](#) se muestra el módulo de velocidad a lo largo de la columna 40 del canal, 5 celdas antes del estrechamiento. En cada paso de simulación se aplican iteraciones de difusión, lo cual aumenta la anisotropía, ya que la viscosidad crece proporcionalmente sólo en las direcciones en que  $D \neq 0$ . Se observa que la anisotropía tiende a suavizar las variaciones transversales de velocidad.

#### 4 CONCLUSIONES

Se presentó la implementación de una red de Boltzmann en 2D con una regla de difusión viscosa. El nuevo planteo permite la partición de la ecuación discreta de Boltzmann clásica en reglas independientes de actualización que dan lugar a subclases totalmente secuenciales y explícitas, que naturalmente llevan a propiedades de herencia y encapsulamiento. Esto tiene relevancia en implementaciones orientadas a objetos. Mediante la secuenciación presentada se puede eliminar el término de relajación en la ecuación de advección, el cual acopla en los RB clásicos los mecanismos de transporte y viscosidad. El control de la viscosidad se recobra con la introducción de una regla de difusión con invariancia local de densidad, que de este modo se independiza de la advección, agregando flexibilidad para la implementación de modelos anisotrópicos de turbulencia y de flujos en medios porosos.

#### 5 REFERENCIAS

- Cancelliere A., Chan E., Fotu E., Rothman D. and Succi S., The permeability of a random media: comparison of simulation with theory, *Phys. Fluids Lett. A* 2, 2085, 1990.
- Chen S., Chen H., Martinez D. y Matthaeus W., Lattice Boltzmann model for simulation of magnetohydrodynamics, *Phys. Rev. Lett.* 67(27), 3776, 1991.
- Chen S., Doolen G. D., Lattice Boltzmann Method for Fluid Flows, *Annual Reviews Fluid Mechanics.* 30:329-64, 1998.
- Dalponte D., Rinaldi P., Vénere M., Clausse A., Redes de Boltzmann para la simulación de escurrimientos superficiales, *Mecánica Computacional V.26*, p. 1092-1103, 2007.
- Dellar P., Lattice Kinetic Schemes for Magnetohydrodynamics, *Journal of Computational Physics* 179, 95–126, 2002.
- Foti E. y Succi S., Three-dimensional flows in complex geometries with the lattice Boltzmann method, *Europhys. Lett.* 10(5), 433, 1989.
- Gamma E., Helm R., Johnson R., Vlissides J., 1995. *Design Patterns Elements of reusable Object-Oriented Software*. Addison-Wesley.
- Higuera F. and Succi S., Simulating the flow around a circular cylinder with a lattice Boltzmann equation, *Europhys. Lett.* 8, 517, 1989
- Lallemand P. y Luo L., Theory of the lattice Boltzmann method: Dispersion, dissipation, isotropy, Galilean invariance, and stability", *Physical Review E*, vol. 61, p. 6546-6562, June 2000.
- Qian Y., D'Humieres D. y Lallemand P., Lattice BGK Models for Navier-Stokes Equation, *Europhys. Lett.*, 17, 479-484, 1992.
- Succi S., *The Lattice Boltzmann Equation for Fluid Dynamics and Beyond*. Numerical

Mathematics and Scientific Computation. Clarendon Press, Oxford, 2001.

Zhou J. G., Lattice Boltzmann methods for Shallow Water Flows. Springer-Verlag, 2004.