

SIMULACIÓN POR VOLUMENES FINITOS DEL FLUJO DE HARTMANN

Livio S. Maglione^a, Sergio A. Elaskar^b, Héctor H. Brito^{a,c}, Raúl A. Dean^a y Mauricio J. Ghirardotto^a

^aGrupo de Mecánica Computacional, Universidad Nacional de Río Cuarto, Ruta Nac. 36 Km 601, Río Cuarto, Córdoba (X5804BYA), Argentina, smaglione@ing.unrc.edu.ar, rdean@ing.unrc.edu.ar, mghirardotto@ing.unrc.edu.ar, <http://www.unrc.edu.ar>

^bDepartamento de Aeronáutica, Universidad Nacional de Córdoba, CONICET, Av. Velez Sarfield 1611, Córdoba (5000), Argentina, selaskar@efn.uncor.edu

^cCentro de Investigaciones Aplicadas, Instituto Universitario Aeronáutico, Ruta 20 Km 5.5, Córdoba (5022), Argentina, hbrito@iua.edu.ar

Keywords: MHD, Riemann Solver, TVD, AMPD.

Resumen. El estudio de los flujos en los cuales un fluido eléctricamente conductor se mueve en un campo magnético es denominado Magnetohidrodinámica (MHD). En este artículo se presentan la metodología y los resultados obtenidos al simular numéricamente flujos MHD difusivos, viscosos, bidimensionales e inestacionarios. Las ecuaciones de la MHD conforman un sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales hiperbólico-parabólico. Al ser planteado el sistema de ecuaciones en forma conservativa las contribuciones parabólicas son escritas en forma de flujos, lo que permite actualizar las variables de estado considerando tanto los flujos hiperbólicos como los parabólicos. La aproximación numérica se basa en la utilización de volúmenes finitos sobre mallas estructuradas. Para tratar los flujos hiperbólicos la técnica de ocho ondas presentada por Powell ha sido implementada junto con la normalización de los vectores propios descrita por Zarachay. Para el cálculo de los flujos numéricos se ha implementado el esquema TVD de Harten-Yee conjuntamente con un seguidor de Riemann aproximado. Finalmente se simula el flujo de Hartmann y se realiza un estudio de sensibilidad considerando diferentes números de Hartmann. También se presenta un análisis sobre el tratamiento de las condiciones de contorno.

1 INTRODUCCIÓN

La propulsión eléctrica de aplicaciones espaciales, esencialmente en el área de micro y nanosatélites, actualmente es tema de investigación en el Instituto Universitario Aeronáutico, la Universidad Nacional de Córdoba y la Universidad Nacional de Río Cuarto (UNRC). Investigadores de estas instituciones trabajan en el desarrollo de un módulo propulsivo de plasma pulsante ablativo (PPPA), ver Brito et al. (2001), Elaskar et al. (2000) y Elaskar et al. (2005). En la UNRC existe un programa de investigación que tiene como objetivo general definir soluciones tecnológicas para la propulsión electromagnética del tipo magnetoplasmadinámico con propelente sólido (AMPD), para dichas aplicaciones. Esta investigación tiene como uno de sus objetivos específicos describir en forma física y numérica el desarrollo del flujo de plasma, para así avanzar hacia una mayor comprensión de dicho flujo dentro de la cámara de reacción de propulsores de plasma de los tipos PPPA y AMPD.

La magnetohidrodinámica (MHD) es la parte de la mecánica del continuo que estudia el movimiento de un medio eléctricamente conductor en presencia de un campo magnético. Es necesario recordar que cuando un fluido conductor o un gas ionizado (plasma) se mueve dentro de un campo magnético se induce un campo eléctrico y aparece una corriente eléctrica; a su vez la interacción de la corriente con el campo magnético cambia el movimiento del fluido, modificando por lo tanto el campo magnético. El sistema de ecuaciones que gobiernan la MHD real es hiperbólico-parabólico no convexo apareciendo un sistema de ondas más complejo que en aerodinámica. La MHD requiere conocimientos de gas dinámica, electromagnetismo y fisicoquímica para poder describir el flujo de gases ionizados en presencia de campos electromagnéticos. Una revisión de algunos de los modelos físicos y matemáticos usados actualmente en aplicaciones aeroespaciales para describir el flujo de fluidos eléctricamente conductores en presencia de campos electromagnéticos, se encuentra en D'Ambrosio and Giordano (2004). Recientes investigaciones en el campo de la MHD teórica y computacional, y en particular en magnetoaerodinámica apuntan al control de flujos hipersónicos a través de la utilización del campo magnético (Shang, 2001).

El objetivo de este trabajo es presentar los resultados logrados con un código numérico desarrollado para resolver las ecuaciones adimensionales de la MHD real, bidimensional e inestacionaria utilizando un solver de Riemann aproximado junto con un esquema TVD.

En este trabajo se presentan los resultados obtenidos al simular el problema de Hartmann, el cual es la extensión MHD del flujo de Couette. Este es un problema difusivo dominante con predominio de la parte parabólica.

2 ECUACIONES DE LA MAGNETOHIDRODINAMICA REAL

Las ecuaciones adimensionales de la magnetohidrodinámica real e inestacionaria para un fluido simple escritas en su forma conservativa tensorial son:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \rho \\ \rho \underline{u} \\ \underline{B} \\ e \end{bmatrix} + \nabla \cdot \begin{bmatrix} \rho \underline{u} \\ \rho \underline{u} \underline{u} - \underline{B} \underline{B} + I \left(p + \frac{1}{2} B^2 \right) \\ \underline{u} \underline{B} - \underline{B} \underline{u} \\ \left(e + p + \frac{1}{2} B^2 \right) \underline{u} - (\underline{B} \cdot \underline{u}) \underline{B} \end{bmatrix} =$$

$$\nabla \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\underline{\underline{\tau}}}{R_e A_l} \\ \frac{\underline{\underline{E}}_r}{L_u A_l} \\ \frac{\underline{\underline{u}} \cdot \underline{\underline{\tau}}}{R_e A_l} - \frac{\left[\underline{\underline{\eta}} \cdot (\nabla \times \underline{\underline{B}}) \right] \times \underline{\underline{B}}}{L_u A_l} + \frac{\underline{\underline{k}} \cdot \nabla T}{P_e A_l} \end{bmatrix} \quad (1)$$

con

$$\nabla \cdot \underline{\underline{E}}_r = -\nabla \times \left[\frac{1}{\mu_o} \underline{\underline{\eta}} \cdot (\nabla \times \underline{\underline{B}}) \right] \quad (2)$$

en las cuales ρ indica la densidad, p la presión, $\underline{\underline{u}}$ el vector velocidad, $\underline{\underline{B}}$ el vector campo magnético, e la energía total, μ_o la permeabilidad magnética del vacío, $\underline{\underline{k}}$ el tensor de conductividad térmica y $\underline{\underline{\eta}}$ el tensor de resistividad eléctrica del plasma (todas en forma adimensional) .

El tensor de tensiones viscoso esta dado por

$$\underline{\underline{\tau}} = \mu \left[\nabla \underline{\underline{u}} + (\nabla \underline{\underline{u}})^T - \frac{2}{3} \underline{\underline{I}} (\nabla \cdot \underline{\underline{u}}) \right] \quad (3)$$

siendo μ la viscosidad adimensional del plasma e $\underline{\underline{I}}$ el tensor unitario.

Los números adimensionales característicos utilizados en Ec. (1) son:

$$\text{Reynolds } R_e = \rho_{ref} \frac{a U}{\mu_{ref}} \quad (4)$$

$$\text{Alfvén } A_l = \frac{c_a}{U} \quad (5)$$

$$\text{Lundquist } L_u = \frac{\mu_o a U}{\eta_{ref}} \quad (6)$$

$$\text{Peclet } P_e = \frac{a U}{\alpha_{ref}} \quad (7)$$

en los cuales el sufijo “*ref*” indica valores de referencia, U es una velocidad de referencia del flujo, a una longitud de referencia, α el coeficiente de difusividad térmica, η la resistividad y c_a la velocidad de Alfvén. El número de Lundquist (6) describe como el campo magnético es influenciado por el flujo y recíprocamente como el flujo se ve

modificado por el campo magnético, a menudo en publicaciones científicas es denominado también Reynolds Magnético, para $L_u \ll 1$ el campo magnético no tiene una notable influencia en el movimiento del flujo. Se destaca que algunos autores consideran el número de Lundquist cuando se reemplaza en la Ec. (6) la velocidad por la velocidad de Alfvén (Goldston and Rutherford, 1995).

Introduciendo un sistema de coordenadas cartesianas ortonormales la Ec. (1) puede ser escrita en términos de flujos para el caso bidimensional como:

$$\frac{\partial \underline{U}}{\partial t} + \frac{\partial \underline{F}_h}{\partial x} + \frac{\partial \underline{G}_h}{\partial y} = \frac{\partial \underline{F}_p}{\partial x} + \frac{\partial \underline{G}_p}{\partial y} \quad (8)$$

donde \underline{U} es el vector de variables de estado, \underline{F}_h \underline{G}_h los vectores que especifican los flujos hiperbólicos y \underline{F}_p \underline{G}_p los vectores que especifican los flujos parabólicos.

Escribiendo el lado izquierdo del sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales Ec. (1) en su forma cuasi-lineal se obtiene:

$$\frac{\partial \underline{U}}{\partial t} + [A_c] \frac{\partial \underline{U}}{\partial x} + [B_c] \frac{\partial \underline{U}}{\partial y} = \frac{\partial \underline{F}_p}{\partial x} + \frac{\partial \underline{G}_p}{\partial y} \quad (9)$$

en la cual $[A_c]$ $[B_c]$ son las matrices Jacobianas de los flujos y la letra “c” indica que la derivación se ha llevado a cabo con respecto a las variables de estado conservativas. Sin embargo, su expresión es más simple si se escriben en función de las variables primitivas:

$$\underline{W} = (\rho, u_x, u_y, u_z, B_x, B_y, B_z, p)^T \quad (10)$$

En términos de las variables primitivas la Ec. (8) queda expresada de la siguiente manera:

$$\frac{\partial \underline{W}}{\partial t} + [A_p] \frac{\partial \underline{W}}{\partial x} + [B_p] \frac{\partial \underline{W}}{\partial y} = \frac{\partial \underline{F}_p}{\partial x} + \frac{\partial \underline{G}_p}{\partial y} \quad (11)$$

Debido a que las matrices $[A_p]$ $[B_p]$ poseen un valor propio nulo, no es posible utilizar seguidores de Riemann basados en un sistema de ocho ondas. Es importante destacar que ambas formulaciones, tanto en variables primitivas como en variables conservativas son equivalentes, por consiguiente el valor propio nulo aparece en ambas. Para poder subsanar este inconveniente se ha implementado la técnica de ocho ondas presentada por Powell (1995). Claramente para flujos unidimensionales quedan bien definidos los siete valores propios y no es necesario utilizar esta técnica que introduce una nueva matriz Jacobiana de los flujos.

Los valores propios de la nueva matriz $[A]$ son:

$$\begin{aligned} \lambda_e &= u_x \\ \lambda_a &= u_x \pm c_a \\ \lambda_f &= u_x \pm c_f \\ \lambda_s &= u_x \pm c_s \\ \lambda_d &= u_x \end{aligned} \quad (12)$$

La velocidad de Alfvén y las magnetosónicas lentas y rápidas se expresan respectivamente como:

$$c_a = \frac{|B_n|}{\sqrt{\rho}} \quad (13)$$

$$c_{f,s}^2 = \frac{1}{2} \left[\frac{\gamma p + B^2}{\rho} \pm \sqrt{\left(\frac{\gamma p + B^2}{\rho} \right)^2 - 4 \frac{\gamma p B_n^2}{\rho^2}} \right] \quad (14)$$

en las cuales el signo positivo corresponde a las ondas magnetosónicas rápidas.

Finalmente, los vectores propios asociados se han normalizado para evitar problemas de degeneración del sistema, ver [Zarachay et al. \(1994\)](#).

3 APROXIMACION NUMERICA

Discretizando el dominio en celdas e introduciendo una formulación integral se obtiene la formulación en volúmenes finitos. La derivada respecto al tiempo de las variables conservativas se aproxima usando diferencias finitas de primer orden; obteniéndose así un método de avance en el tiempo explícito. Para la determinación de los flujos numéricos las variables conservativas son consideradas constantes dentro de las celdas.

Los flujos numéricos hiperbólicos son evaluados por medio de la técnica TVD de [Yee et al. \(1985\)](#) obteniéndose con este método de alta resolución al menos exactitud de segundo orden en regiones donde la solución es suave, determinación de las discontinuidades sin excesivas dificultades y ausencia de oscilaciones falsas.

Considerando lo anterior la fórmula para la actualización temporal es:

$$\begin{aligned} \tilde{U}_{ij}^{n+1} = \tilde{U}_{ij}^n - & \left[\frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\overline{F_{i+\frac{1}{2};j}^n} - \overline{F_{i-\frac{1}{2};j}^n} \right) + \frac{\Delta t}{\Delta y} \left(\overline{G_{i;j+\frac{1}{2}}^n} - \overline{G_{i;j-\frac{1}{2}}^n} \right) \right]_h \\ & + \left[\frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\overline{F_{i+\frac{1}{2};j}^n} - \overline{F_{i-\frac{1}{2};j}^n} \right) + \frac{\Delta t}{\Delta y} \left(\overline{G_{i;j+\frac{1}{2}}^n} - \overline{G_{i;j-\frac{1}{2}}^n} \right) \right]_p \end{aligned} \quad (15)$$

La función que determina el flujo numérico hiperbólico para el instante n es:

$$\left[\overline{F_{i+\frac{1}{2};j}^n} \right]_h = \frac{1}{2} \left\{ \overline{F_{i+1}} + \overline{F_i} + \sum_m \tilde{r}_{i+\frac{1}{2}}^m \Phi_{i+\frac{1}{2}}^m \right\}^{(n)} ; j \quad (16)$$

siendo \tilde{r}^m el m -ésimo vector propio derecho de la matriz $[A_c]$ modificada, Φ la función limitadora y cuyos elementos para el esquema TVD de segundo orden se expresan como:

$$\Phi_{i+\frac{1}{2}}^m = \left(g_{i+1}^m + g_i^m \right) - \sigma \left(\lambda_{i+\frac{1}{2}}^m + \gamma_{i+\frac{1}{2}}^m \right) \alpha_{i+\frac{1}{2}}^m \quad (17)$$

con

$$g_i^m = \operatorname{sgn}(\lambda_{i+\frac{1}{2}}^m) \max \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ \min \left[\begin{array}{l} \sigma_{i+\frac{1}{2}}^m |\alpha_{i-\frac{1}{2}}^m| \\ \sigma_{i-\frac{1}{2}}^m \frac{\operatorname{sgn}(\lambda_{i+\frac{1}{2}}^m)}{2} \alpha_{i-\frac{1}{2}}^m \end{array} \right] \end{array} \right\} \quad (18)$$

$$\sigma(z) = \begin{cases} |z| & |z| \geq \varepsilon \\ \frac{1}{2\varepsilon} (z^2 + \varepsilon^2) & |z| < \varepsilon \end{cases} \quad (19)$$

$$\gamma_{i+\frac{1}{2}}^m = \begin{cases} \frac{1}{\alpha_{i+\frac{1}{2}}^m} (g_{i+1}^m - g_i^m) & \alpha_{i+\frac{1}{2}}^m \neq 0 \\ 0 & \alpha_{i+\frac{1}{2}}^m = 0 \end{cases} \quad (20)$$

$$\alpha^m = \underline{L}_p^m \cdot (W_{i+1} - W_i) \quad (21)$$

siendo \underline{L}_p^m el m-esimo vector propio izquierdo de la matriz $[A_p]$ modificada asociado a la onda m .

Los flujos numéricos parabólicos son evaluados utilizando diferencias finitas de segundo orden.

$$\left[\underline{F}_{i+\frac{1}{2};j}^n \right]_p \rightarrow \left. \frac{\partial W}{\partial x} \right|_{i+\frac{1}{2};j} \approx \frac{W_{i+\frac{3}{2};j} - W_{i-\frac{1}{2};j}}{2\Delta x} \quad (22)$$

4 APLICACION AL PROBLEMA DEL FLUJO DE HARTMANN

El código numérico ha sido evaluado con anterioridad en problemas como el tubo de choque MGD introducido por [Brio y Wu \(1998\)](#) en donde la parte hiperbólica juega un rol preponderante ([Maglione, 2003](#)), incluso se realizaron simulaciones incorporando los términos parabólicos (difusivos) en el problema del tubo de choque y se pudo verificar que la naturaleza de la solución no cambia ([Maglione, 2006](#)). En este trabajo se presentan los resultados obtenidos al simular un problema difusivo dominante con predominio de la parte parabólica tal como es el problema de Hartmann.

Este tipo de flujo a densidad constante es una extensión del flujo de Couette para fluidos eléctricamente conductores. En este problema el flujo es laminar y se desarrolla entre dos placas paralelas virtualmente infinitas moviéndose, para nuestro caso, con velocidades de igual magnitud y sentido contrario. El campo aplicado es normal a las placas y de valor constante. Un esquema del problema del flujo de Hartmann puede ser observado en la [Figural](#).

El flujo es producido por el movimiento de las placas y es asumido en este caso que el gradiente de presión nulo.

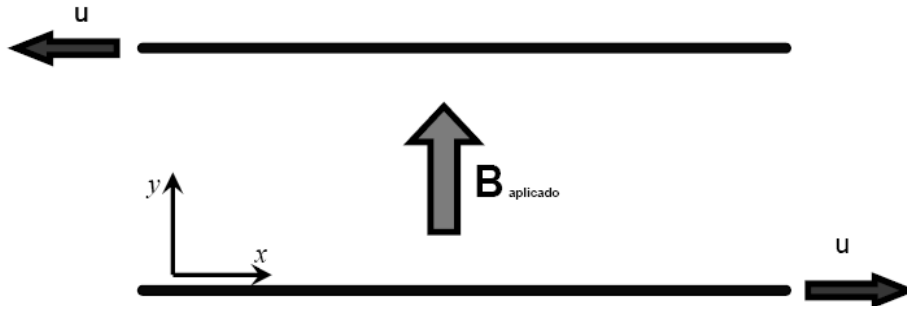


Figura 1: Esquema del problema de Hartmann

4.1 Solución Analítica del Flujo de Hartmann

El sistema de ecuaciones Ec. (1) para el caso unidimensional estacionario incompresible y con gradiente de presión cero se reduce a:

$$\begin{cases} B_y \frac{dB_x}{dy} + \frac{\mu}{R_e A_l} \frac{d^2 u_x}{dy^2} = 0 \\ B_y \frac{du_x}{dy} + \frac{\eta}{L_u A_l} \frac{d^2 B_x}{dy^2} = 0 \end{cases} \quad (23)$$

Para este problema el sistema de Ec. (1) diferenciales en derivadas parciales no lineales se reduce a un sistema de dos ecuaciones diferenciales ordinarias y lineales. Considerando como condiciones de borde:

$$\begin{cases} u_x(y)|_0 = u & B_x(y)|_0 = 0 \\ u_x(y)|_L = -u & B_x(y)|_L = 0 \end{cases} \quad (24)$$

se obtienen las soluciones analíticas para el campo de velocidades y campo magnético:

$$u_x(y) = \frac{1}{2} \left(u_l + u_o + (-u_l + u_o) \frac{1}{sh\left(\frac{\sqrt{a}L}{2}\right)} sh\left(\frac{\sqrt{a}(L-2y)}{2}\right) \right) \quad (25)$$

$$B_x(y) = \sqrt{\frac{L_u \mu}{R_e \eta}} (u_l - u_o) \frac{1}{sh\left(\frac{\sqrt{a}L}{2}\right)} sh\left(\frac{\sqrt{a}(L-y)}{2}\right) sh\left(\frac{\sqrt{a}y}{2}\right) \quad (26)$$

donde:

$$a = \frac{B_y^2 R_e L_u A_l^2}{\eta \mu} \quad (27)$$

Como parámetro utilizaremos el número de Hartmann, el cual representa la relación entre las fuerzas de origen magnético y las fuerzas de origen viscoso; y se define como:

$$H_a = \sqrt{R_e L_u A_l^2} \quad (28)$$

4.2 Solución Numérica

Como parámetros de simulación la viscosidad y resistividad eléctrica adimensionales se consideraron unitarias y debido a que el código numérico es inestacionario se utilizaron condiciones iniciales nulas para el campo magnético inducido y para la velocidad. La placa superior se mueve con velocidad unitaria y hacia la izquierda (Ver Figura 1), mientras que la placa inferior se mueve con velocidad unitaria hacia la derecha.

Se realizaron simulaciones para dos números de Hartmann, utilizándose incrementos temporales y cantidades de elementos uniformemente espaciados como se muestran en la Tabla 1.

Ha	Incremento temporal	Cantidad de elementos
1	$\Delta t = 5e-7$	50
10	$\Delta t = 5e-7$	200

Tabla 1: Incremento temporal y cantidad de elementos para cada Ha

Con los parámetros de simulación anteriormente mencionados y aplicando la técnica de “Fractional Time Stepping” en la evaluación de los flujos numéricos, sin la cual los tiempos computacionales hubieran sido impracticables (cercano al mes) en una PC “hogareña”, se obtuvieron los resultados para el campo de velocidad y el campo magnético inducido, ambos verificados con la solución analítica dada por la Ec. (25) y la Ec (26). En la Figura 2 se muestran los resultados para Hartmann igual a uno y en la Figura 3 para Hartmann igual a diez.

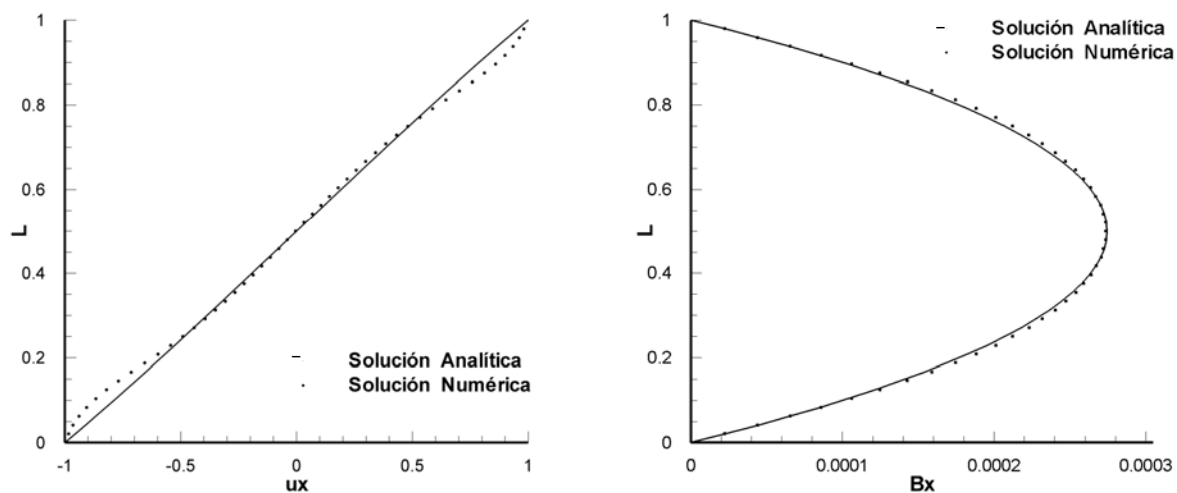


Figura 2: Campo de Velocidad y Campo Magnético para $Ha = 1$

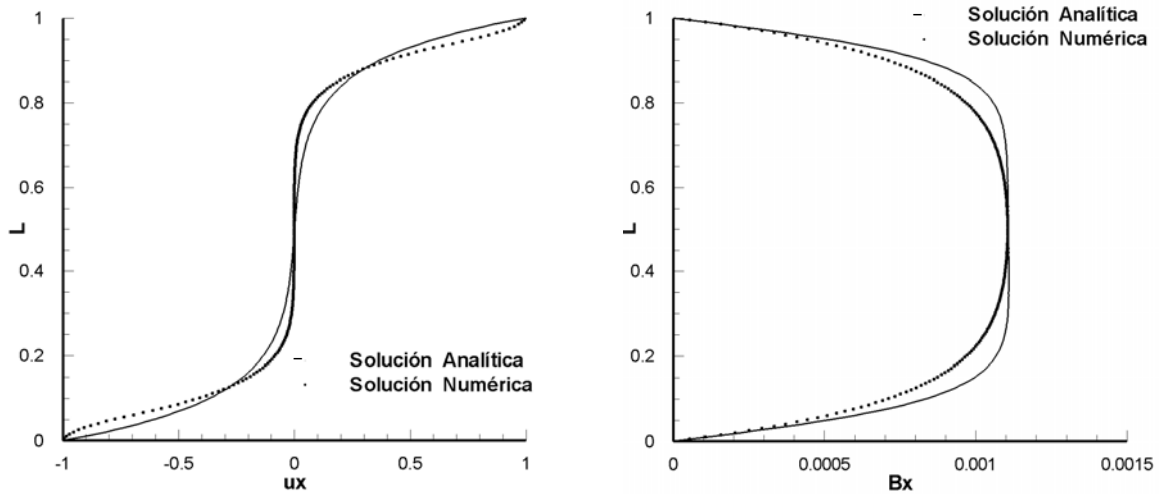


Figura 3: Campo de Velocidad y Campo Magnético para $Ha = 10$

Se destaca de las Figuras 2 y 3 que los resultados numéricos satisfacen razonablemente bien las soluciones analíticas. Para el flujo con número de Hartmann igual a 1 los valores numéricos hallados en esta investigación han sido más precisos que para flujos con número de Hartmann igual a 10. Sin embargo en ambos casos el código captó correctamente el valor máximo del campo magnético.

5 CONCLUSIONES

Los resultados obtenidos en el problema del flujo de Hartmann han sido satisfactorios, si bien se observan diferencias, el código numérico capta la naturaleza de la solución y el valor máximo en el campo magnético inducido.

Las diferencias se originan en los puntos cercanos a las placas. Con la finalidad de tratar de investigar los resultados hallados se seguirán tres líneas de trabajo: 1 - Una posible solución a investigar es la utilización de una malla no regular que con la misma cantidad de elementos totales (no incrementando el costo computacional) permita densificar la malla cerca de las placas. 2 - Otra línea a considerar es utilizar una aproximación numérica de primer orden cerca de las placas (por ejemplo “vector splitting technique”) y de segundo orden en el resto del dominio, evitando así la utilización de celdas fantasmas en los contornos para mantener una aproximación de segundo orden. 3 - Utilizar celdas fantasmas manteniendo un esquema de 2do orden en los bordes, pero considerando interpolación no lineal en las variables.

Es importante destacar que el código ha sido desarrollado con la intención de simular flujos inestacionarios de fluidos compresibles y en este trabajo ha sido verificado con un “benchmark” que le exige resolver un problema de flujo incompresible y estacionario, características para las cuales no ha sido específicamente desarrollado.

Es necesario para poder aplicar el código en flujos de interés en propulsión por plasma con geometrías más complejas como son la de los propulsores, modelar adecuadamente las condiciones de borde mecánicas y electromagnéticas, e incorporar en la evaluación de los términos difusivos alguna técnica de “Divergence Free” para minimizar los errores numéricos asociados a la divergencia del campo magnético.

6 AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido financiado por: El programa “Definición tecnológica de un propulsor de plasma estacionario de propelente sólido y de sus dispositivos de ensayo” y en particular el proyecto “Simulación Numérica de Flujos Magnetogasdinámicos en Módulos Propulsivos” de la Secretaría de Ciencia y Técnica de la UNRC; el proyecto “Desarrollos en Magnetogasdinámica Computacional”- PICTO N° 30339 de la ANPCyT y el proyecto "Simulación por medio de volúmenes finitos de flujos magnetogasdinámicos y gas dinámicos con elevada entalpía" PIP N° 5692 del CONICET.

A los miembros del Grupo de Mecánica computacional de la UNRC por los comentarios realizados.

REFERENCIAS

- Brio, M., and Wu, C., An upwind differencing scheme for the equations of magnetohydrodynamics, *Journal Computational Physics*, 45:400–422, 1988.
- Brito, H., Calcani, E., Elaskar, S., Brito, C., Duelli, R., Maglione, S., and Cravero, L., A review of design and development works on the P4S-1 plasma thruster. *IAF-01-S.4.03*, 2001.
- D’Ambrosio, D., and Giordano, D., Electromagnetic Fluid Dynamics for Aerospace Applications. Part I: Classification and Critical Review of Physical Models, *35th AIAA Plasmadynamics and Laser Conference Paper 2004-2165*, 2004.
- Elaskar, S., Brito, H., and Tamagno, J., Numerical Simulation of High Enthalpy Pulse Facilities as an Exploratory Tool for PPT Modeling, *51st International Astronautical Congress Paper No. 00-S.4.07*, 2000.
- Elaskar, S., Brito, H., Maglione, L., Paoletti, N., Brito, C., Estudios Teóricos en el Desarrollo del Propulsor de Plasma Pulsante P4S-1. *Congreso Argentino de Tecnología Espacial*, 2005.
- Goldston, R., and Rutherford, P., Introduction to Plasma Physics. *Institute of Physics Publishing*, London, 1995
- Maglione, L., Elaskar, S., Brito, H., Numerical simulation of two-dimensional, non-steady, ideal magnetogasdynamics equations. *28th International Electric Propulsion Conference. IEPC. Paper N° 70*, 2003.
- Maglione, L., Elaskar, S., Brito, H., y Dean, R., Simulación numérica de flujos magnetogasdinámicos reales en dos dimensiones. *Mecánica computacional. ISSN 1666-6070*, 25:2475–2484, 2006.
- Powell, K., An approximate Riemann solver for magnetohydrodynamics (that works in more than one dimension), *NASA Contract No NAS1-19480, ICASE*, 1995.
- Shang, J., Recent research in magneto-aerodynamics, *Progress in Aerospace Sciences*, 37(1):1–20, 2001.
- Yee, H., Warming, R., and Harten, A., Implicit total variations diminishing (TVD) schemes for steady-state calculations, *Journal Computational Physics*, 57:110–127, 1983.
- Zarachay, A., Malagoli, A., and Collela, P., A higher order Godunov method for multidimensional ideal magnetohydrodynamics, *SIAM Journal on Scientific Computation*, 15:263–284, 1994.