

ANÁLISIS DE SÓLIDOS BIDIMENSIONALES CON GRANDES DEFORMACIONES APLICANDO REMALLADO ADAPTATIVO

Walter B. Castelló y Fernando F. Flores

Departamento de Estructuras, Universidad Nacional de Córdoba, Casilla de Correo 916, Córdoba, Argentina, wcastello@efn.uncor.edu - fflores@efn.uncor.edu,

<http://www.efn.unc.edu.ar/departamentos/estruct/>

Palabras clave: elementos finitos, grandes deformaciones, remallado por zonas, deformaciones impuestas, sólidos bidimensionales.

Resumen. En el análisis de problemas industriales con grandes deformaciones elasto-plásticas se presentan aspectos tales como el flujo plástico isócoro, acoplamiento termo-mecánico; también se evidencian severos inconvenientes debido a la distorsión progresiva de los elementos y a la eventual interacción de los elementos con las herramientas. Es conocido que los elementos de bajo orden de interpolación son más adecuados en el análisis de problemas en deformaciones finitas, y esto lleva a proponer elementos cuadriláteros bilineales o triángulos lineales. Por otra parte la dificultad que surge de la distorsión de los elementos puede ser resuelta implementando una adecuada técnica de remallado, debiéndose destacar que el remallado usando triángulos resulta más versátil cuando las geometrías son complejas. El remallado permite mejorar la precisión a través de una correcta restauración de la malla distorsionada durante el análisis. En este trabajo se utilizó un elemento triangular definido por tres nudos con solo grados de libertad de traslación y donde la evaluación del gradiente es función de la geometría de los elementos adyacentes. Se han analizado sólidos isótropos bidimensionales empleando el elemento triangular en deformaciones impuestas, aplicando una Formulación Lagrangiana Actualizada asociada a un modelo elasto-plástico basado en la descomposición multiplicativa del tensor de deformaciones. Se implementó una estrategia de remallado automático por zonas, y también un esquema de transferencia de variables basada en el Superconvergent Patch Recovery donde las variables a transferir son las mismas del modelo elasto-plástico pues el remallado se realiza en la configuración deformada. Se ha hecho énfasis en los problemas axilsimétricos en deformaciones finitas, los cuales son muy comunes en la industria del forjado de piezas de revolución. Los resultados de este trabajo muestran una muy buena concordancia con los obtenidos en otros trabajos, además existe una importante reducción de tiempos de cálculo como consecuencia del empleo de la Formulación Lagrangiana Actualizada y el esquema de remallado por zonas.

1. INTRODUCCIÓN

Algunos establecimientos industriales que realizan procesos como el forjado o la extrusión de piezas de revolución, se sirven hoy en día de las simulaciones por elementos finitos como etapa previa a la fabricación de los productos. En este contexto los análisis son relativamente complejos, pues presentan: importantes cambios de la geometría y grandes deformaciones, flujo plástico isócoro, contacto con las herramientas de conformado y autocontacto, e inclusive acoplamiento termo-mecánico en algunos casos particulares. La simulación numérica de estos procesos; ha permitido disminuir costos de fabricación y tiempos de desarrollo de nuevos productos. Y como consecuencia de esto, existe un continuo proceso de mejora en las herramientas computacionales de modo de lograr elementos más eficientes y algoritmos de mayor generalidad para aplicarse en estas simulaciones.

En estas aplicaciones se tiene una cantidad de grados de libertad considerable, y resulta más versátil el uso de elementos de bajo de orden de interpolación con grados de libertad con sentido físico claro (desplazamientos) para facilitar la interpretación de los resultados. En dos dimensiones esto conduce a elementos triangulares lineales o cuadriláteros bilineales, sin embargo estos elementos muestran bloqueo volumétrico en problemas de deformaciones finitas. Además en el caso de triángulos es necesario un malla muy fina si se desean obtener resultados precisos. Se han desarrollado mejoras, a fin de aumentar la eficiencia y robustez de estos elementos frente a los problemas numéricos mencionados. En el caso del elemento cuadrilátero bilineal las formulaciones del mismo han tenido una evolución importante, lográndose elementos que no bloquean en problemas cuasi-incompresibles o con mallas gruesas. Las diferentes aproximaciones desarrolladas en cuadriláteros comprenden desde la adición de modos incompatibles, la integración reducida o selectiva, el método B-barra, e inclusive las formulaciones más modernas en deformaciones impuestas y/o mejoradas. Como ejemplos de estas mejoras se citan los trabajos de [Simo y Rifai \(1990\)](#), [César de Sá y Natal Jorge \(1999\)](#), [Armero \(2000\)](#) y las referencias que allí se mencionan. Por otra parte, desde el punto de vista de la aplicación el elemento triángulo resulta más conveniente por dos motivos: los generadores de triángulos son más robustos y eficientes, y además se tiene la ventaja de poder remallar con mayor facilidad cuando la geometría se deforma excesivamente. Esto ha motivado el desarrollo de aproximaciones basadas en triángulos, que introducen grados de libertad que no son desplazamientos, formulaciones mixtas o híbridas, y también formulaciones F-barra. Algunos trabajos en esta área son los de [Felippa \(2003\)](#), [Zienkiewicz et al. \(1998\)](#) y [SouzaNeto et al. \(2003\)](#).

Estos problemas presentan además grandes cambios en la geometría, por lo tanto suele ser necesario aplicar alguna estrategia de remallado y un algoritmo de transferencia de datos. Una estrategia eficiente desde el punto de vista del costo computacional es el remallado por zonas asociado a alguna medida de la distorsión del elemento. El refinamiento adaptativo por zonas no es algo nuevo, algunos trabajos en esta area son [Lo y Lee \(1998\)](#) y [Perić et al. \(1999\)](#), sin embargo en lo que se refiere a la remallado adaptativo por zona sin cambiar el tamaño del elemento no está tan estudiado. Por otra parte resulta conveniente que el algoritmo de transferencia no implique una disminución en la calidad de los resultados. Se han desarrollado distintos algoritmos transferencia de variables, entre los cuales el algoritmo *Superconvergent Patch Recovery* (SPR) introducido por [Zienkiewicz y Zhu \(1992a,b\)](#) es el que ha tenido mayor aceptación. En este algoritmo la distribución global de las variables en el dominio, se logra a partir de valores nodales obtenidos con una expansión polinómica sobre parcelas de elementos que comparten a cada nodo de la malla. Esta expansión polinómica aproxima (vía mínimos cuadrados) a los valores obtenidos del análisis por elementos finitos en algunos puntos dentro de la parcela que tienen

características de superconvergencia. El algoritmo original ha sido complementado por distintos autores, mejorándose distintos aspectos como: incluir ecuaciones de equilibrio en la parcela, aumentar la robustez de la interpolación en los puntos de contorno, etc. Algunos trabajos en esta área corresponden a [Wiberg et al. \(1994\)](#), [Labbé y Garon \(1995\)](#) y [Yazdani et al. \(1998\)](#). Estos trabajos han dado origen a los llamados métodos *Enhanced Superconvergent Patch Recovery*. Si bien el procedimiento resulta heurístico, se ha probado lo suficiente como para admitir que brinda resultados muy precisos, el trabajo de [Zienkiewicz et al. \(1999\)](#) y más recientemente el de [Bugeda \(2006\)](#) son ejemplos de ello. Además fueron [Boroomand y Zienkiewicz \(1999\)](#) los primeros en aplicar el algoritmo SPR a problemas elasto-plásticos. Otros trabajos basados en el algoritmo SPR en el área de deformaciones finitas pertenecen a [Gu y Kitamura \(2000\)](#) y [Gu et al. \(2004\)](#).

Este trabajo resulta la extensión de otros dos realizados anteriormente, ver [Castelló y Flores \(2005\)](#) y [Castelló y Flores \(2006\)](#), en donde se empleó un elemento triangular cuya geometría se define por tres nudos con solo grados de libertad de traslación y posee la característica de que la evaluación del gradiente es función de la geometría de los elementos adyacentes. En este trabajo se han analizado sólidos isótropos bidimensionales empleando este elemento triangular y un modelo elasto-plástico basado en la descomposición multiplicativa del tensor de deformaciones, bajo una formulación Lagrangiana Actualizada como la propuesta por [García Garino \(1993\)](#), la cual disminuye la cantidad de operaciones a nivel elemental y mejora la eficiencia computacional como se observa en los resultados obtenidos. Por otra parte en este trabajo se propone la restauración adaptativa de los elementos cuya distorsión es excesiva y se espera que tengan consecuencias negativas sobre la precisión de los resultados. Es decir el esquema de remallado adaptativo empleado en este análisis consiste en la restauración geométrica de los elementos distorsionados sin cambiar el tamaño de elementos. Además se ha implementado un algoritmo de transferencia basado en el *Superconvergent Patch Recovery*, sobre la formulación original de [Zienkiewicz y Zhu \(1992a,b\)](#), a fin de minimizar la pérdida de información en la transferencia de variables en cada remallado. Este trabajo se realizó dentro del código explícito basado en el método de elementos finitos Stampack© [STAMPACK \(2004\)](#).

El contenido de este trabajo se resume a continuación. En la sección 2 se introducen las relaciones cinemáticas asociadas al modelo constitutivo propuesto y se definen las ecuaciones de equilibrio en la configuración donde se plantea el problema. La sección 3 es un compendio del algoritmo de aproximación en deformaciones impuestas que se emplea en este trabajo. En la sección 4 se presentan los algoritmos de remallado por zona y el de transferencia de variables basado en el SPR. La sección 5 muestra los resultados obtenidos con la presente formulación y se comparan con los obtenidos en otros trabajos. Por último la sección 6 contiene un resumen de las conclusiones de este trabajo.

2. ALGORITMO DE INTEGRACIÓN ELASTO-PLÁSTICO

2.1. Hipótesis asociadas al algoritmo

Si se considera un sólido en su posición original o indeformada, ocupando un dominio Ω_0 en el espacio \mathbb{R}^3 y cuyo contorno queda definido por Γ_0 . Si es posible definir una función $\varphi(\mathbf{X}, t)$ que relacione en todo momento la configuración de referencia Ω_0 con otra cualquiera Ω_t , a la cual se puede denominar actual o deformada, resulta entonces posible definir el tensor gradiente de la deformación como:

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \varphi(\mathbf{X}, t)}{\partial \mathbf{X}} \quad (1)$$

El modelo cinemático empleado en este trabajo surge de la descomposición multiplicativa del gradiente de deformación \mathbf{F} , en sus partes elástica \mathbf{F}^e y plástica \mathbf{F}^p de acuerdo a:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^e \cdot \mathbf{F}^p \quad (2)$$

en donde se supone que la parte plástica no modifica el volumen (flujo plástico isócoro) de modo que $\det(\mathbf{F}^p) = 1$ y $\det(\mathbf{F}) = \det(\mathbf{F}^e) = J$.

El modelo presenta una evidencia física muy clara, similar a los que sucede en el análisis de monocristales. Además como resultado de los trabajos actuales en el área microestructural este modelo goza de una elevada aceptación, y por este motivo se lo extiende al análisis de sólidos policristalinos. El principal inconveniente radica en que esta descomposición queda exactamente definida salvo una rotación de cuerpo rígido, inconveniente que originó importantes controversias en el pasado. Actualmente se acepta que la ecuación (2) es suficiente para definir sin ambigüedades la descomposición multiplicativa en el caso de materiales isótropos, que de hecho es el tipo de material que se estudia en este trabajo. Además en este trabajo se considera que la plasticidad es independiente del tiempo, no hay acoplamiento termo-mecánico y el proceso es isotérmico.

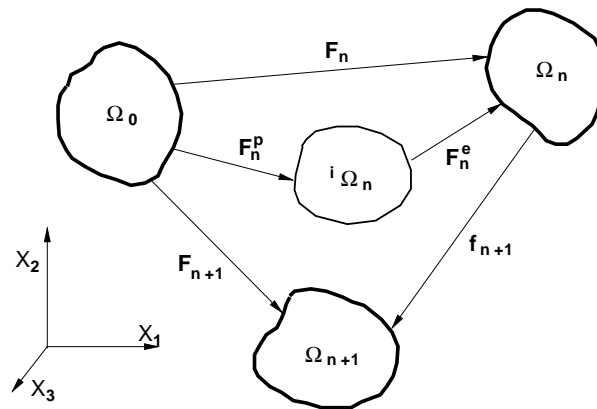


Figura 1: Esquema de configuraciones empleado en las relaciones cinemáticas y en la integración de la ecuación constitutiva.

La figura 1 presenta un esquema de las configuraciones involucradas cuando se aplica la descomposición multiplicativa. En esta figura se observa la inclusión de una configuración adicional denominada *configuración intermedia* (denotada por ${}^i\Omega_t$), la cual tiene la característica de ser una configuración libre de tensiones. Al igual que otros algoritmos elasto-plásticos como el de [Simo y Hughes \(1998\)](#) o el de [Crisfield \(1997\)](#), en el propuesto por [García Garino \(1993\)](#) se descompone el problema en dos: un problema elástico donde las variables plásticas no cambian (predictor elástico) y un problema plástico donde el estado elástico se mantiene sin variaciones (corrector plástico), de modo que la resolución de ambos es equivalente a la solución del problema original. La ventaja del algoritmo de [García Garino \(1993\)](#) se encuentra en tratar de una manera más eficiente la integración de la ecuación constitutiva, reduciendo la cantidad de operaciones necesarias a nivel elemental. Este modelo elasto-plástico considera además una regla de flujo asociativa y con endurecimiento lineal e isótropo, de modo que se puede aplicar el algoritmo de retorno radial para regresar a la superficie de fluencia cuando se presenta un estado de carga plástica.

2.2. Algoritmo de integración

Antes de presentar el algoritmo de integración se muestran algunos detalles de la cinemática asociada a las configuraciones observadas en la figura 1. Si se desea obtener la actualización de una determinada configuración, por ejemplo una configuración anterior φ_n , a partir de la aplicación de un desplazamiento incremental \mathbf{u}_n , se tiene:

$$\mathbf{x}_{n+1} = \varphi_{n+1}(\mathbf{X}) = \varphi_n(\mathbf{X}) + \mathbf{u}_n[\varphi_n(\mathbf{X})] \quad (3)$$

donde la nueva configuración geométrica está referida a la configuración anterior conocida $\varphi_n(\mathbf{X})$, y al igual que los desplazamientos actuales \mathbf{u}_n son datos por lo cual resulta trivial la obtención configuración actualizada. Y de acuerdo con la figura 1 y la ecuación (3), se puede obtener el *gradiente de deformación total* en el paso actual \mathbf{F}_{n+1} como:

$$\mathbf{F}_{n+1} = \frac{\partial \mathbf{x}_{n+1}}{\partial \mathbf{X}} = [\mathbf{1} + \nabla_{x_n} \mathbf{u}_n] \mathbf{F}_n \quad (4)$$

y por otra parte aplicando derivadas parciales:

$$\mathbf{F}_{n+1} = \frac{\partial \mathbf{x}_{n+1}}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial \mathbf{x}_{n+1}}{\partial \mathbf{x}_n} \frac{\partial \mathbf{x}_n}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{f}_{n+1} \mathbf{F}_n \quad (5)$$

Se observa también que el *gradiente relativo* \mathbf{f}_{n+1} resulta ser:

$$\mathbf{f}_{n+1} = \frac{\partial \mathbf{x}_{n+1}}{\partial \mathbf{x}_n} = \mathbf{F}_{n+1} \mathbf{F}_n^{-1} = \mathbf{1} + \nabla_{x_n} \mathbf{u}_n \quad (6)$$

La formulación propuesta por [García Garino \(1993\)](#) emplea la inversa del gradiente de deformación relativo \mathbf{f}_{n+1}^{-1} y se calcula este tensor directamente con la ecuación:

$$\mathbf{f}_{n+1}^{-1} = \frac{\partial \mathbf{x}_n}{\partial \mathbf{x}_{n+1}} = \mathbf{1} - \nabla_{x_n} \mathbf{u}_n \quad (7)$$

donde (7) se puede obtener a partir de (4). En este trabajo la inversa del gradiente relativo se obtiene como:

$$\mathbf{f}_{n+1}^{-1} = \mathbf{x}_n^I \mathbf{N}_{\mathbf{x}_{n+1}}^I \quad (8)$$

y resulta claro que se deben evaluar las derivadas de las funciones de forma en cada paso de tiempo. Por otra parte el gradiente de deformación total en (5), puede obtenerse de igual manera como:

$$\mathbf{F}_{n+1} = \mathbf{x}_{n+1}^I \mathbf{N}_{\mathbf{x}_n}^I \quad (9)$$

donde las derivadas se evalúan un sola vez respecto de la configuración de referencia.

La formulación empleada en este trabajo se corresponde con un esquema Lagrangiano Actualizado (FLA), y el algoritmo está basado en el propuesto por [García Garino \(1993\)](#). A partir de la descomposición multiplicativa del tensor gradiente de las deformaciones, considerando (2) y (6) se tiene:

$$\mathbf{F}_{n+1}^{e \text{ trial}} = \mathbf{F}_{n+1} \mathbf{F}_n^{p-1} = \mathbf{f}_{n+1} (\mathbf{F}_n \mathbf{F}_n^{p-1}) = \mathbf{f}_{n+1} \mathbf{F}_n^e \quad (10)$$

y a partir de esta última expresión es posible obtener la parte elástica del tensor de Finger según:

$$[\mathbf{b}_{n+1}^{e-1}]^{\text{trial}} = (\mathbf{F}_{n+1}^{e \text{ trial}})^{-T} (\mathbf{F}_{n+1}^{e \text{ trial}})^{-1} = \mathbf{f}_{n+1}^{-T} (\mathbf{b}_n^{e-1}) \mathbf{f}_{n+1}^{-1} \quad (11)$$

El tensor elástico de prueba (*trial*) de Almansi puede calcularse empleando el tensor de Finger (11) a través de la siguiente ecuación:

$$\mathbf{e}_{n+1}^{e \text{ trial}} = \frac{1}{2} \left[\mathbf{1} - (\mathbf{b}_{n+1}^e)^{-1} \right] \quad (12)$$

y con este se puede obtener el tensor elástico de prueba de Kirchhoff de acuerdo a:

$$\boldsymbol{\tau}_{n+1}^{\text{trial}} = K \text{tr}(\mathbf{e}_{n+1}^{e \text{ trial}}) \mathbf{1} + 2\mu \text{dev}(\mathbf{e}_{n+1}^{e \text{ trial}}) \quad (13)$$

en donde, considerando que $\text{dev}(\mathbf{e}_{n+1}^e) = -\frac{1}{2} \text{dev}(\mathbf{b}_{n+1}^e)^{-1}$, la parte desviadora de la tensión de Kirchhoff queda definida por:

$$\mathbf{s}_{n+1}^{\text{trial}} = 2\mu \text{dev}(\mathbf{e}_{n+1}^{e \text{ trial}}) = -\mu \text{dev}([\mathbf{b}_{n+1}^e]^{-1})^{\text{trial}} \quad (14)$$

Para proseguir con el algoritmo constitutivo se debe comprobar la condición de fluencia de Mises-Huber, que para este caso tiene la forma:

$$f_{n+1} = \|\mathbf{s}\| - \sqrt{\frac{2}{3}} [A' e^p + \sigma_Y] \leq 0 \quad (15)$$

con \mathbf{s} la parte desviadora del tensor de tensiones de Kirchhoff, σ_Y la tensión de fluencia del material, A' el módulo de endurecimiento y e^p el parámetro de endurecimiento. Si no se sobrepasa la superficie de fluencia ($f_{n+1}^{\text{trial}} = f(\mathbf{s}_{n+1}^{\text{trial}}, e_n^p) \leq 0$), el estado es elástico con lo cual pueden adoptarse las deformaciones (12) y las tensiones (13) como el estado resultante. En caso contrario, si se ha violado la condición (15) y $f_{n+1}^{\text{trial}} > 0$, es necesario corregir el estado elástico de prueba por plasticidad y retornar a la superficie de fluencia.

La regla de flujo queda definida por $\mathbf{d}^p = \dot{\gamma} \mathbf{n}$, en donde: $\mathbf{n} = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\tau}}$ es la dirección del flujo plástico en la configuración actual, \mathbf{d}^p es el tensor velocidad de deformación plástica y $\dot{\gamma}$ es el cambio en el parámetro de consistencia. El cambio en la parte plástica del tensor derecho de Cauchy-Green queda definido por:

$$\dot{\mathbf{C}}^p = 2\phi^*(\dot{\gamma} \mathbf{n}) = 2\dot{\gamma} \mathbf{N} \quad (16)$$

donde ϕ^* implica una transformación del tipo *pull-back* para expresar la regla de flujo respecto a la configuración original, y esta ecuación (16) puede discretizarse con un esquema en diferencias finitas:

$$\frac{\mathbf{C}_{n+1}^p - \mathbf{C}_n^p}{\Delta t} = 2\dot{\gamma} \mathbf{N}_{n+1} \quad (17)$$

esta expresión puede reescribirse en variables espaciales, haciendo uso de una transformación del tipo *push-forward* a la que indicaremos con ϕ_* , y resulta:

$$\phi_* \mathbf{C}_{n+1}^p = \phi_* \mathbf{C}_n^p + 2\dot{\gamma} \mathbf{n}_{n+1} \quad (18)$$

En variables espaciales, el primer término $\phi_* \mathbf{C}_{n+1}^p$ puede expresarse como:

$$\phi_* \mathbf{C}_{n+1}^p = \mathbf{F}_{n+1}^{-T} \mathbf{C}_{n+1}^p \mathbf{F}_{n+1}^{-1} = \mathbf{b}_{n+1}^e \quad (19)$$

Por otra parte, para el segundo término $\phi_* \mathbf{C}_n^p$, se calcula de manera similar empleando para ello el tensor gradiente de la deformación total en el paso de tiempo actual (\mathbf{F}_{n+1}) y aprovechando su relación el tensor gradiente de deformación relativo (\mathbf{f}_{n+1}) resulta:

$$\phi_* \mathbf{C}_n^p = \mathbf{F}_{n+1}^{-T} \mathbf{C}_n^p \mathbf{F}_{n+1}^{-1} \quad (20)$$

con lo cual, de acuerdo a (11) se tiene:

$$\begin{aligned} \phi_* \mathbf{C}_n^p &= \mathbf{f}_{n+1}^{-T} \mathbf{b}_n^{e-1} \mathbf{f}_{n+1}^{-1} \\ &= [\mathbf{b}_{n+1}^{e-1}]^{\text{trial}} \end{aligned} \quad (21)$$

Entonces el esquema de actualización del tensor elástico de Finger en variables espaciales se puede definir a partir de las ecuaciones (18), (19) y (21), obteniéndose:

$$\mathbf{b}_{n+1}^{e-1} = [\mathbf{b}_{n+1}^{e-1}]^{\text{trial}} + 2\gamma \mathbf{n}_{n+1} \quad (22)$$

a partir de la cual puede corregirse el tensor elástico de Almansi:

$$\mathbf{e}_{n+1}^e = \frac{1}{2} [\mathbf{1} - \mathbf{b}_{n+1}^{e-1}] \quad (23)$$

Aplicando la ecuación (14) en la (22) resulta:

$$\begin{aligned} -\mu \operatorname{dev} (\mathbf{b}_{n+1}^{e-1}) &= -\mu \operatorname{dev} \left([\mathbf{b}_{n+1}^{e-1}]^{\text{trial}} \right) + 2\mu\gamma \mathbf{n}_{n+1} \\ \mathbf{s}_{n+1} &= \mathbf{s}_{n+1}^{\text{trial}} - 2\mu\gamma \mathbf{n}_{n+1} \end{aligned} \quad (24)$$

que es la ecuación que permite actualizar las tensiones desviadoras, el tensor de tensiones de Kirchhoff actualizado queda definido adicionando a la ecuación (24) la parte volumétrica de las tensiones de modo que:

$$\boldsymbol{\tau}_{n+1} = K \operatorname{tr} (\mathbf{e}_{n+1}^e) \mathbf{1} + \mathbf{s}_{n+1} \quad (25)$$

Considerado que la regla de flujo es asociativa, la evolución del parámetro de endurecimiento queda establecida por:

$$e_{n+1}^p = e_n^p + \sqrt{\frac{2}{3}} \gamma \quad (26)$$

La hipótesis característica del *algoritmo de retorno radial* es suponer fija la dirección del vector normal a la superficie de fluencia, es decir $\mathbf{n}_{n+1} = \mathbf{n}_{n+1}^{\text{trial}}$. Entonces considerando las tensiones desviadoras corregidas (24), empleando la relación entre las tensiones desviadoras y el vector normal a la superficie de fluencia resulta en una ecuación escalar:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{s}_{n+1}\| \mathbf{n}_{n+1} &= \|\mathbf{s}_{n+1}^{\text{trial}}\| \mathbf{n}_{n+1}^{\text{trial}} - 2\mu\gamma \mathbf{n}_{n+1}^{\text{trial}} \\ (\|\mathbf{s}_{n+1}\| + 2\mu\gamma) &= \|\mathbf{s}_{n+1}^{\text{trial}}\| \end{aligned} \quad (27)$$

La condición de consistencia debida a la función de fluencia de Mises-Huber resulta $\|\mathbf{s}_{n+1}\| = R_{n+1}$, en donde R_{n+1} es el radio del cilindro de von Mises:

$$\|\mathbf{s}_{n+1}\| = \sqrt{\frac{2}{3}} (\sigma_Y + A' e_{n+1}^p) \quad (28)$$

reemplazando (26) y (27) en (28), se puede obtener:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{s}_{n+1}^{\text{trial}}\| - \sqrt{\frac{2}{3}}(\sigma_Y + A'e_n^p) &= \frac{2}{3}A'\gamma + 2\mu\gamma \\ f_{n+1}^{\text{trial}} &= \left(\frac{2}{3}A' + 2\mu\right)\gamma \end{aligned} \quad (29)$$

a partir de la cual se define la evolución del parámetro de consistencia:

$$\gamma = \frac{3f_{n+1}^{\text{trial}}}{2A' + 6\mu} \quad (30)$$

A partir de las definiciones previas, la forma débil de las ecuaciones de balance en la configuración de referencia actualizada puede escribirse como:

$$\delta\Pi = \int_{\Omega_n} [\delta\mathbf{e}_{\text{AL}} \cdot \boldsymbol{\tau}] \, d\Omega_n + \delta\Pi_{\text{ext}} = 0 \quad (31)$$

donde \mathbf{e}_{AL} es el tensor de deformaciones de Almansi (15) definido a partir de la parte elástica del tensor de Finger.

3. APROXIMACIÓN POR ELEMENTOS FINITOS

La eficiencia de la aproximación en deformaciones impuestas que se utilizó en este trabajo, ya ha sido probada con éxito en dos trabajos anteriores [Castelló y Flores \(2005\)](#) y [Castelló y Flores \(2006\)](#). Esta aproximación consiste en la aplicación de un elemento triangular similar al propuesto por [Flores \(2006\)](#), el cual es un elemento de bajo orden de interpolación y cuyos grados de libertad son únicamente los desplazamientos.

El punto de partida en esta aproximación es discretizar el dominio con elementos triangulares de tres nodos donde, pero a diferencia de la aproximación convencional en triángulos lineales, la evaluación de las deformaciones en cada triángulo se hace teniendo en cuenta la geometría de los tres elementos adyacentes. Así entonces se tiene una parcela de cuatro elementos, un elemento central sobre el cual se desea evaluar la deformación y tres elementos adyacentes a los lados del elemento central (figura 2). Se observa en esta figura que se mantienen los vértices del elemento central en el espacio isoparamétrico, sin embargo puede verse la existencia de los tres elementos adyacentes.

Entonces en la figura 2 muestra que la parcela de elementos triangulares queda definida por seis nodos y de esta forma, si bien se parte de elementos triangulares de tres nodos, se llega a una aproximación cuadrática. El nuevo conjunto de funciones de forma (no estándar), considerando que $\zeta = 1 - \xi - \eta$, son las que se muestran en tabla 1.

$$\begin{aligned} N^1 &= \zeta + \xi\eta & N^4 &= \frac{\zeta}{2}(\zeta - 1) \\ N^2 &= \xi + \eta\zeta & N^5 &= \frac{\xi}{2}(\xi - 1) \\ N^3 &= \eta + \zeta\xi & N^6 &= \frac{\eta}{2}(\eta - 1) \end{aligned}$$

Tabla 1: Funciones de forma asociadas a la parcela elemental.

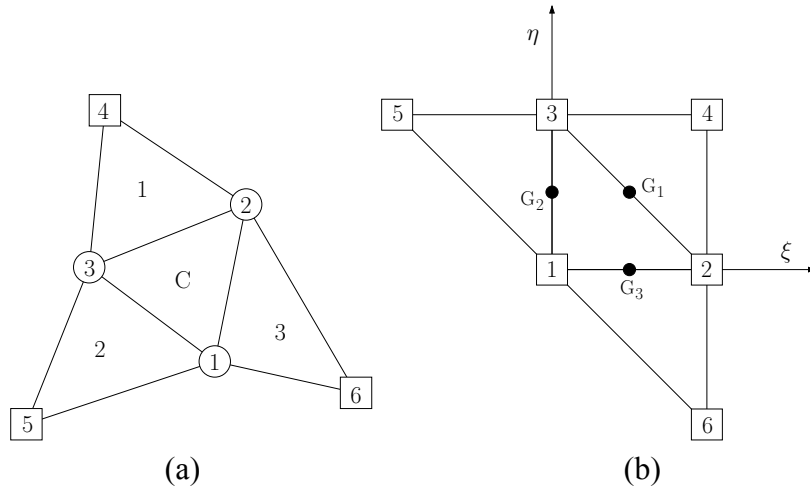


Figura 2: Parcela de elementos triangulares. (a) Coordenadas espaciales. (b) Coordenadas naturales.

A través de las funciones de forma se obtienen los gradientes de deformación en algunos puntos predeterminados, y utilizando la clásica notación en elementos finitos:

$$\mathbf{f}^{-1} = \partial \mathbf{x}_n / \partial \mathbf{x}_{n+1} = \sum_{I=1}^{NN=6} N_{I,x_{n+1}}^I x_n^I \quad (32)$$

que es la expresión la inversa del gradiente relativo de deformación, en donde x_n^I representan las coordenadas nodales en la configuración anterior y $N_{I,x_{n+1}}^I$ son las derivadas de las funciones de forma respecto de la configuración actualizada. A través de la (32) se pueden obtener las dos primeras columnas de \mathbf{f}^{-1} , mientras que para la dirección normal al plano se puede expresar como $\mathbf{a}_3 = \lambda_3 (0, 0, 1)^T$. En el caso de deformación plana resulta simplemente $\lambda_3 = 1$, por otra parte en axilsimetría además de considerar el alargamiento normal en el elemento central, se adiciona el promedio de los alargamientos normales de los elementos adyacentes:

$$\lambda_3 = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\sum_{I=1}^3 x_n^I}{\sum_{I=1}^3 x_{n+1}^I} + \frac{1}{3} \left(\frac{\sum_{J=1}^3 \sum_{K=1}^3 x_n^{K(J)}}{\sum_{J=1}^3 \sum_{K=1}^3 x_{n+1}^{K(J)}} \right) \right\} \quad (33)$$

Los gradientes de deformación se evalúan a mitad de cada lado del triángulo central C (puntos identificados como G_1 , G_2 y G_3 en la figura 2) y la aproximación propuesta consiste en adoptar un gradiente de deformación en el elemento, que surge del promedio:

$$\bar{\mathbf{f}}^{-1} = \frac{1}{3} (\mathbf{f}_{G_1}^{-1} + \mathbf{f}_{G_2}^{-1} + \mathbf{f}_{G_3}^{-1}) \quad (34)$$

es decir se interpolan los gradientes obtenidos a mitad de cada lado del elemento central y de hecho esta operación le da carácter de aproximación en deformaciones impuestas al elemento. El gradiente de deformación promedio obtenido con (34) es el que se emplea luego en las ecuaciones del modelo constitutivo (11) y las ecuaciones de gobierno del problema (31).

La selección de los puntos a mitad de cada lado del elemento central no es arbitraria, trae aparejadas ventajas pues la evaluación del gradiente a la mitad de cada lado depende exclusivamente de la posición de los nodos asociados a los dos elementos que comparten el lado. Estos es algo que puede verificarse fácilmente, derivando las expresiones de las funciones de forma (ver tabla 1) y evaluándolas en las coordenadas de los puntos G_1 , G_2 y G_3 .

4. ESQUEMA DE REMALLADO ADAPTATIVO

En los problemas de deformaciones finitas los cambios de geometría suelen ser tan importantes, que la única manera de concluir el análisis es regenerando la malla cuando esta se ha distorsionado más allá de los límites aconsejables para obtener una buena aproximación. En trabajos anteriores, como por ejemplo [Castelló y Flores \(2005\)](#) y [Castelló y Flores \(2006\)](#), se han empleado técnicas de remallado en donde la totalidad de los elementos pertenecientes al dominio deformado son reemplazados para evitar su excesiva distorsión y mantener un nivel de aproximación adecuado. Sin embargo reemplazar todos los elementos de una malla tiene algunas desventajas, entre ellas: a) la transferencia de variables implica alguna pérdida de información (ej.: se suavizan los gradientes locales de las variables) y por lo tanto se está perdiendo algo de información en cada elemento de la malla; y b) si bien el remallado se hace con el mismo tamaño de los elementos de la malla original sucede que el remallado es no-estructurado y como consecuencia se tiene una mayor cantidad de elementos en la nueva malla. Una solución a estos problemas es realizar un “remallado por zonas”, reemplazando solo aquellos elementos que se han distorsionado y que pueden disminuir la calidad de los resultados. La propuesta de este trabajo es restaurar solamente aquellos elementos distorsionados reemplazándolos con otros de tamaño similar y de geometría más regular.

4.1. Remallado automático

La idea central es reemplazar únicamente los elementos que muestran una distorsión importante, esto incluye algunos elementos cercanos a los distorsionados, y de este modo quedan definidas las zonas dentro del dominio de análisis que deben ser remalladas. Los puntos relevantes son establecer una adecuada cuantificación de la distorsión del elemento, y además seleccionar los elementos adyacentes que encapsulan al elemento distorsionado. Este segundo punto es relativamente sencillo, pues de hecho la información de elementos vecinos se conoce desde el momento en que se generan las parcelas empleadas en la aproximación numérica.

Existen distintos métodos para cuantificar la distorsión de un elemento triangular, entre los más usados están los algoritmos basados en: a) la comparación de la geometría del elemento triangular respecto de un triángulo equilátero de igual área, b) la comparación de los ángulos internos de un elemento triangular respecto de los ángulos internos de un triángulo equilátero. En este trabajo se ha empleado un criterio de cuantificación basado en la comparación de los ángulos internos, ver figura 3.

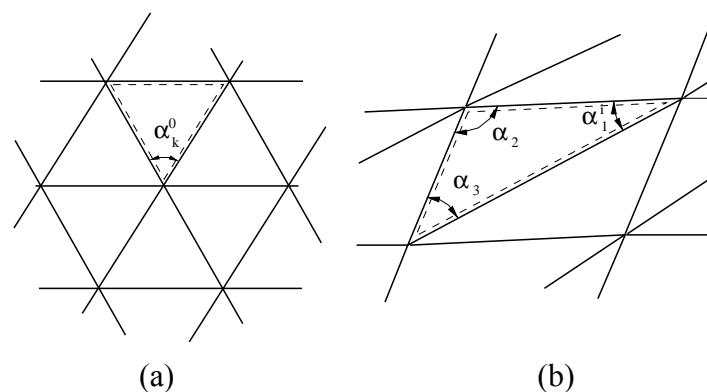


Figura 3: Distorsión de un elemento triangular según su menor ángulo interno.
a) Distribución óptima en el remallado. b) Elemento distorsionado.

El remallado por zona se activa automáticamente cuando la distorsión β en un elemento cualquiera es:

$$\beta = \min \left(\frac{\alpha_j^i}{\alpha_j^0} \right) < d_{\min} \quad (35)$$

en donde α_j^0 es el ángulo en el nodo j del elemento sin distorsionar, α_j^i es el ángulo en el nodo j del mismo elemento distorsionado en la configuración deformada actual i , y d_{\max} es la máxima distorsión admitida para un elemento triangular. Los elementos que deben ser reemplazados son aquellos que cumplen con la condición $d_{\min} < \beta < d_{\max}$. En otras palabras existirá un conjunto de elementos distorsionados comprendidos en el entorno $\beta \in [d_{\min}, d_{\max}]$ que conformarán la zona a remallar. Este par de valores límite son impuestos de antemano, habiéndose encontrado muy buenos resultados para el par $\beta = [1/3, 2/3]$.

Considerando que el área de análisis en este trabajo son sólidos bidimensionales, entonces el contorno pasa a ser una línea, y la complicación mas severa esta asociada a definir correctamente el contorno de la zona que es parte interna del dominio. La generación de esta nueva geometría, la aplicación de las condiciones de contorno y la discretización (respetando el tamaño de elemento de la malla original) de la zona se realiza con el software [GiD \(2002\)](#) a través de la opción *batch file*.

4.2. Transferencia de variables

La importancia de esta técnica se sustenta en su capacidad de interpolar las variables de forma muy precisa a partir de puntos de superconvergencia, puntos que habitualmente resultan ser coincidentes con los puntos de integración a nivel elemental. El método SPR presenta la ventaja de tener una menor pérdida de la información que se está transfiriendo. El algoritmo empleado por la transferencia fue desarrollado en [Castelló y Flores \(2006\)](#), está basado en el SPR original de [Zienkiewicz y Zhu \(1992a,b\)](#) y coincide con los conceptos planteados por [Akin \(2005\)](#). El punto de partida es definir una determinada cantidad de conjuntos de elementos que comparten algunos de sus nodos con un elemento central (ver Figura 4), estos conjuntos se denominan “parcelas del SPR”. El proceso de interpolación resulta de la aplicación de una expansión polinomial sobre el conjunto de elementos que forman la parcela. Los coeficientes de esta expansión polinomial quedan establecidos ajustando, a través de mínimos cuadrados, las variables en puntos de muestreo que resultan ser los puntos de integración elementales. La Figura 4 muestra el detalle de la parcela usada en este trabajo.

En el caso especial de la formulación de [Akin \(2005\)](#) la base polinomial se corresponde con las funciones de forma de un elemento triángulo cuadrático estándar, y de esta forma la minimización del residuo devuelve los coeficientes que multiplican a estas funciones. Las funciones de forma están asociadas a un elemento ficticio (ver Figura 4) que encierra a la parcela de elementos del SPR y con la aproximación polinomial resultante se procede a la transferencia de las variables vía interpolación sobre los puntos de integración k de la nueva malla.

5. RESULTADOS NUMÉRICOS

En este apartado se presenta un compendio de los resultados obtenidos con la formulación propuesta en los párrafos precedentes, se han analizado sólidos en grandes deformaciones elasto-plásticas y se ha hecho especial énfasis en problemas axilsimétricos. Se presentan distintos casos de análisis donde es necesario remallar para mantener la precisión en los resultados. Los resultados obtenidos a partir de la aproximación propuesta en este trabajo se identifican con

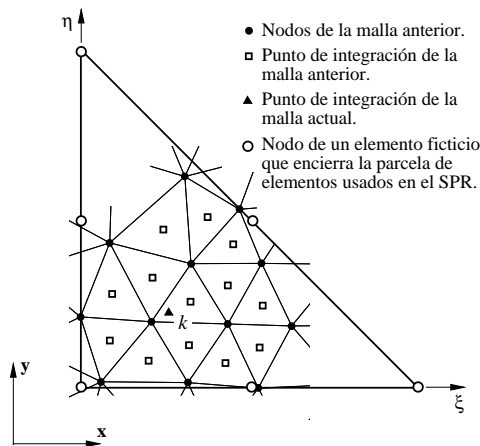


Figura 4: Esquema de transferencia vía SPR. Configuración de la parcela empleada en este trabajo y esquema de interpolación.

las siglas *TR2D*.

5.1. Acortamiento de un tocho cilíndrico

Este problema propuesto por Taylor y Becker (1983), consiste en la compresión de un tocho cilíndrico para reducir su longitud en un 40 %. Este análisis involucra grandes deformaciones y además una importante distorsión de la malla. Se estudia un pequeño tocho cilíndrico de 30 mm de longitud, con un radio de 10 mm, ubicado entre dos placas rígidas perfectamente rugosas. El modelo del material está definido por un módulo de Young $E = 200$ GPa, una relación de Poisson $\nu = 0.3$ y una densidad de $\rho = 7833$ kg/m³. Se asume un endurecimiento isótropo, con una tensión de fluencia $\sigma_y = 700$ MPa y un módulo de endurecimiento $A' = 0.3$ GPa. La fricción entre la prensa y el tocho, se modela con un coeficiente de fricción $\eta = 1.00$.

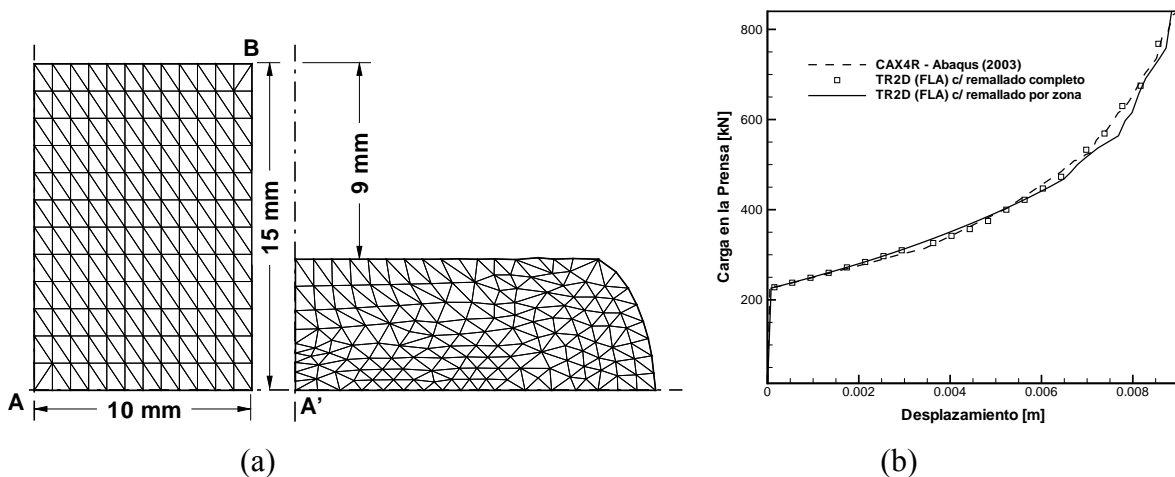


Figura 5: Acortamiento de un tocho cilíndrico. a) Geometría original del tocho y deformada final. b) Curvas de carga función del desplazamiento de la prensa.

Se ha empleado una malla estructurada de 288 (12x12x2) elementos triangulares. La distorsión en la malla por el cambio en la geometría se encuentra circunscrita a la diagonal $A'B'$ y puede observarse que es la zona remallada en la figura 5-a. El análisis involucra un solo paso de remallado, los elementos reemplazados son aquellos con un nivel de distorsión en el rango

Formulación	$e_{\text{máx}}^p$	t [seg]
Remallado Completo	1.8431	98.4
Remallado por Zonas	1.8471	86.1

Tabla 2: Acortamiento de un tocho cilíndrico. Comparativa de resultados y tiempos de cálculo respecto de las formulaciones Lagrangiana Total y Actualizada.

$\beta = [1/3, 2/3]$ y resultan 286 elementos triangulo después del remallado. Este análisis involucra una menor cantidad de elementos que el respectivo cuando se remalla todo el dominio (alrededor de 400 elementos de acuerdo a [Castelló y Flores \(2006\)](#)). Los resultados de este problema numérico se comparan con los obtenidos aplicando un cuadrilátero en deformaciones mejoradas (*CAX4R*) en el software [ABAQUS \(2003\)](#) bajo un esquema de rezoñificación de nodos. En la figura 5-b se muestran las curvas de carga vs desplazamiento de prensa para los elementos *CAX4R* y *TR2D*. Las curvas muestran las mismas tendencias y niveles de carga para producir la deformación del tocho. La tabla 2 muestra los resultados obtenidos en este trabajo considerando remallado completo y remallado por zonas, además de los tiempos de cálculo para estos casos. La poca diferencia en los tiempos de cálculo se debe a que en este caso los elementos restaurados en el remallado parcial del dominio representan casi un 70 % del total de elementos en la malla.

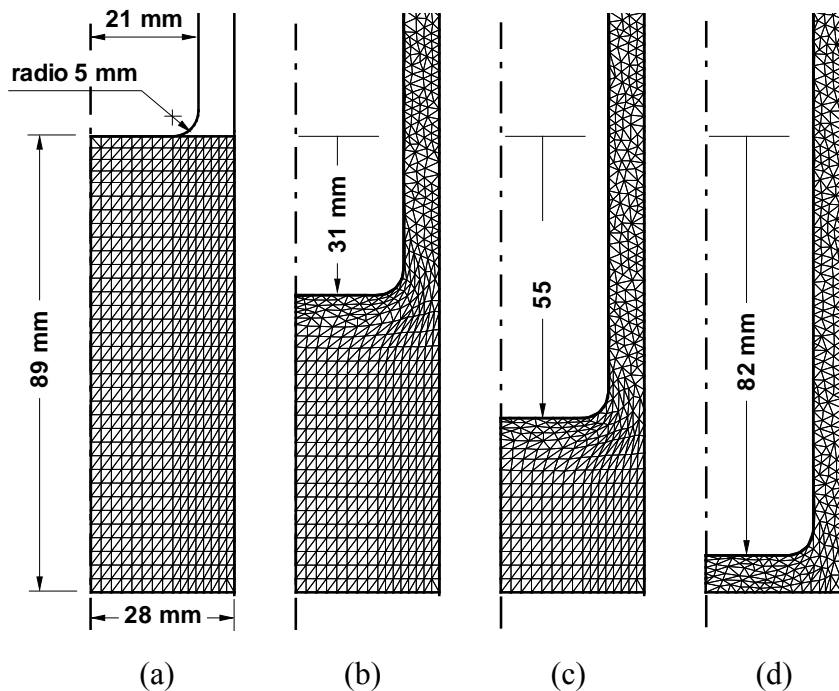


Figura 6: Extrusión hacia atrás de un tocho cilíndrico. a) Geometría original del tocho. b), c) y d) Deformadas para distintos avances del punzón y detalle del remallado por zona.

5.2. Extrusión hacia atrás de un tocho cilíndrico

La extrusión hacia atrás de un tocho cilíndrico para generar un tubo presenta elasto-plasticidad con excesivo cambio de la geometría. El modelo es axilsimétrico tal como se muestra en la figura 6. Las herramientas se tratan como cuerpos rígidos, y por otra parte el tocho cilíndrico se

supone construido en aluminio con un módulo de Young $E = 38$ GPa, un módulo de Poisson $\nu = 0.33$ y una densidad $\rho = 2672$ Kg/m³. El comportamiento plástico está definido por una ley de endurecimiento lineal e isótropa, con una tensión de fluencia $\sigma_y = 27$ MPa y un módulo de endurecimiento $A' = 1.1$ MPa. Las superficies de contacto entre herramientas y el tocho se asumen bien lubricadas, por lo tanto se desprecia la fricción. Se han empleado 1088 (16x34x2) elementos triangulares, y las herramientas se encuentran fijas con la excepción del punzón. Este punzón se desplaza un distancia de 82 mm, para generar el tubo de aluminio, tal como se presenta en la figura 6. En este problema fueron necesarios 22 pasos de remallado (empleando como límites de distorsión $\beta = [1/3, 2/3]$) con un promedio de 1060 elementos por paso.

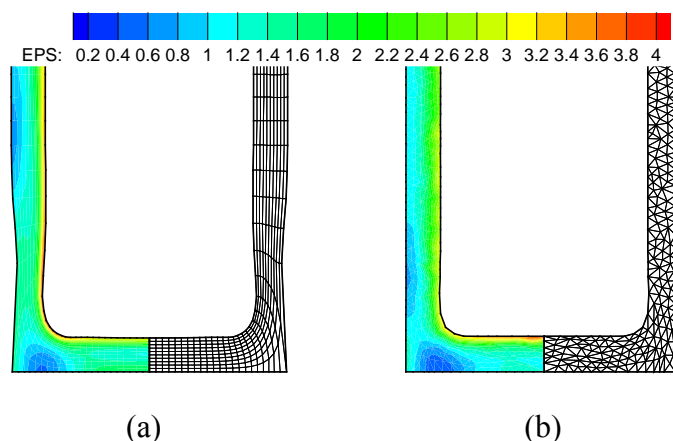


Figura 7: Extrusión hacia atrás de un tocho cilíndrico, deformada y distribución de deformación plástica equivalente. a) CAX4R (ABAQUS (2003)). b) TR2D (este trabajo).

Aproximación	$e_{m\acute{a}x}^p$	$L_{m\acute{a}x}$ (mm)
CAX4R (ABAQUS (2003))	4.080	200.20
TR2D (este trabajo)	3.841	196.92

Tabla 3: Extrusión hacia atrás de un tocho cilíndrico. Máxima deformación plástica efectiva y longitud del tubo extruido.

La tabla 3 muestra los resultados obtenidos en este trabajo (TR2D) y los resultados de ABAQUS (2003) (CAX4R). Con respecto a la deformación plástica efectiva, la diferencia se debe al empleo en ABAQUS (2003) de una estrategia de discretización denominado “mapeo de deformación” mas un esquema adaptivo que se realiza cada diez pasos de cálculo. Esta estrategia de discretización muestra un buen comportamiento, sin embargo sobre el final del análisis se produce una estricción cerca del casquete del tubo, ver figura 7-a. Esta estricción tiene asociada una deformación plástica efectiva elevada que obedece al modelo de discretización y no al comportamiento del material, ya que se supone que las herramientas no arrastran material por despreciarse la fricción.

5.3. Forjado con una matriz sinusoidal

Este caso permite evaluar el comportamiento del elemento en problemas de forjado que involucran geometrías complejas y un flujo de material importante durante el proceso. La

geometría del problema, ver figura 8, consiste en una matriz rígida y un disco metálico deformable de 10 mm de espesor con un radio de 20 mm. La forma de la matriz es sinusoidal con un amplitud de 5 mm y una longitud de onda de 10 mm. Durante el proceso la matriz se desplaza verticalmente a una velocidad de 2 m/seg hasta una distancia de 7,6 mm. El disco metálico está construido en acero con un módulo de Young $E = 200$ GPa, un módulo de Poisson $\nu = 0,3$ y una densidad $\rho = 7800$ kg/m³; el comportamiento plástico está definido por una ley de endurecimiento isótropo lineal con un tensión de fluencia $\sigma_y = 100$ MPa y un módulo de endurecimiento $A' = 300$ MPa.

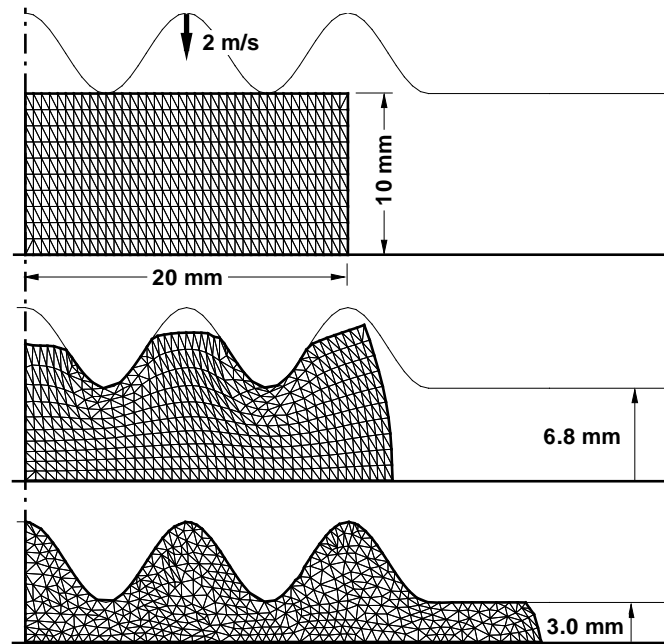


Figura 8: Forjado con una matriz sinusoidal. Geometría original del tocho y deformadas para distintos avances del punzón.

La cara inferior del disco se supone restringida por una superficie plana y la fricción entre las herramientas (lubricadas) y el disco metálico se considera despreciable. El disco de acero se ha discretizado con 800 (10x2x20) elementos triangulares. Se necesitaron 6 pasos de remallado en el análisis (límites de distorsión $\beta = [1/3, 2/3]$), con un promedio de 850 elementos en cada etapa. La tabla 4 muestra los resultados finales obtenidos con la aproximación propuesta en este trabajo, y se compara con los resultados obtenidos con [ABAQUS \(2003\)](#) en donde se ha usado el elemento en deformaciones mejoradas *CAX4R*. Los resultados obtenidos son muy similares, aunque se debe destacar que el mallado usado en [ABAQUS \(2003\)](#) es mucho más fino con 1152 (12x96) elementos cuadriláteros y se aplica un remallado adaptativo basado en la resonificación de nodos para poder completar el análisis. Finalmente en la figura 9 se muestra también la geometría del disco deformada en su totalidad y la distribución de las deformaciones plásticas efectivas.

5.4. Acortamiento de tubos cilíndricos

Este problema, planteado por [Gupta y Gupta \(2005\)](#), consiste en el análisis de la deformación de tubos metálicos en compresión. Estos tubos metálicos suelen utilizarse como dispositivos de absorción de energía, y los modos de colapso están asociados a la relación diámetro-espesor

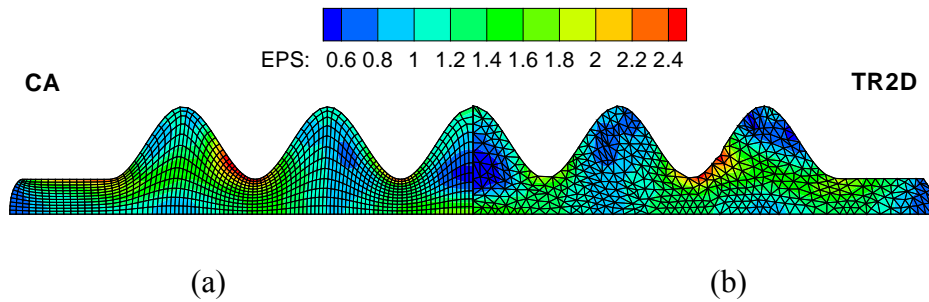


Figura 9: Forjado con una matriz sinusoidal. Deformada y distribución de deformación plástica equivalente. a) CAX4R (ABAQUS (2003)). b) TR2D (este trabajo).

Aproximación	$e_{\text{máx}}^p$	$r_{\text{máx}}$ (mm)
CAX4R (ABAQUS (2003))	2.625	31.90
TR2D (este trabajo)	2.588	31.99

Tabla 4: Extrusión hacia atrás de un tocho cilíndrico. Máxima deformación plástica efectiva y longitud del tubo extruido.

(D/h). Se analiza un tubo de diámetro 25 mm con un espesor de 4,01 mm, de modo que se tiene una relación (D/h) = 6,25 por lo que se espera que el modo de colapso sea en múltiples embarrilamientos. Se supone al tubo circular entre dos platos de una prensa y estos se modelan como cuerpos rígidos. Se adoptan como coeficientes de fricción: en el plato superior $\alpha_s = 0,45$ y en el plato inferior $\alpha_i = 0,15$. El material con que está construido el tubo es aluminio y está definido por un módulo de Young $E = 69$ GPa, una relación de Poisson $\nu = 0,33$ y una densidad $\rho = 2783$ kg/m³; además se adopta una ley de endurecimiento isotropa lineal con una tensión de fluencia de $\sigma_y = 240$ MPa y un módulo de endurecimiento $A' = 290$ MPa. La geometría original del tubo se discretizó con 400 (4x50x2) elementos triangulares y se necesitaron 3 etapas de remallado con 480 elementos en promedio por cada etapa.

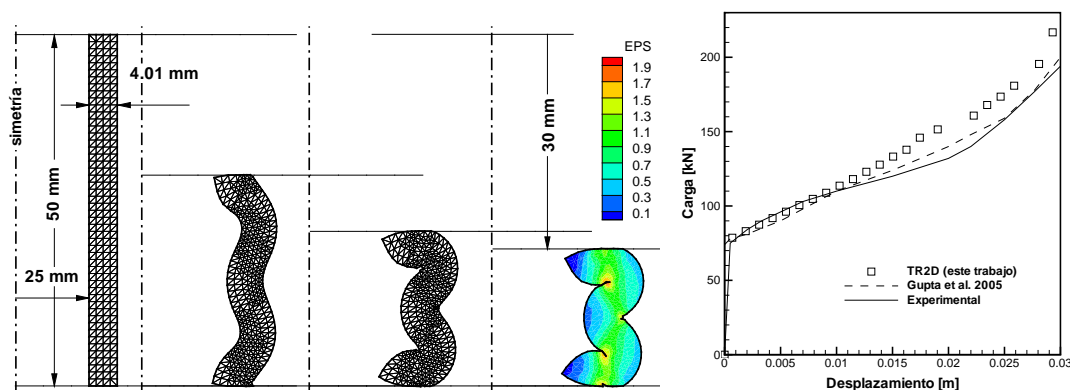


Figura 10: Acortamiento de tubos cilíndricos. a) Geometría original, deformadas con detalles de remallado por zona y distribución de deformación plástica efectiva. b) Curva de carga vs desplazamiento del punzon.

La figura muestra las deformadas para distintas posiciones de avance de la prensa. Estas deformadas son acordes a las geometrías obtenidas por Gupta y Gupta (2005) en su trabajo. En

la tabla 5 se presentan la máxima tensión equivalente de von Mises σ_e y la máxima deformación plástica efectiva e^p obtenidas con en este trabajo y se los compara con los resultados observados en [Gupta y Gupta \(2005\)](#). La comparación muestra un importante similitud entre los resultados de ambos trabajos. Por último la figura muestra la curva de carga vs. desplazamiento de la prensa. Se han graficado tres curvas: la curva que arroja la simulación con el elemento *TR2D* de este trabajo, la curva que se obtiene de la simulación numérica en la [Gupta y Gupta \(2005\)](#) y una curva experimental como validación de los resultados. Se observa que las dos numéricas curvas muestran la misma tendencia y solo se alejan levemente de los resultados obtenidos a través del método experimental.

Resultado	Max(σ_e)	Max(e^p)
Gupta y Gupta (2005)	843.60 MPa	2.30
TR2D	856.90 MPa	2.28

Tabla 5: Acortamiento de tubos cilíndricos. Comparativa de los resultados obtenidos en este trabajo respecto a los presentados por [Gupta y Gupta \(2005\)](#).

6. CONCLUSIONES

En este trabajo se ha presentado un elemento finito triangular muy versátil para las aplicaciones industriales donde se desea analizar problemas en deformaciones finitas. La aproximación propuesta tiene una importante aplicación en problemas de grandes deformaciones de sólidos bidimensionales, y en particular en problemas axilimétricos. La geometría del elemento queda definida por tres nodos con solo grados de libertad de desplazamiento. La implementación del elemento en códigos con integración explícita de las ecuaciones de balance, resulta simple e inclusive presenta ventajas en problemas que introducen contacto y remallado adaptativo. La característica fundamental de la aproximación en deformaciones impuestas empleada en este trabajo, reside en que el gradiente de deformación se obtiene a través del promedio de los gradientes evaluados a la mitad de cada lado del triángulo, donde se considera además el aporte del triángulo adyacente al lado que se evalúa. El elemento ha sido probado con éxito en problemas con discretización pobre y flexión dominante en [Flores \(2006\)](#) y [Castelló y Flores \(2005\)](#), mostrando un comportamiento similar al triángulo de deformación lineal.

Además se ha mejorado la eficacia del elemento, a través de un esquema de remallado adaptativo por zonas. Este esquema de remallado consiste en remover la parte de la malla de elementos finitos que tiene excesiva distorsión, luego estos elementos distorsionados son reemplazados por otros con una geometría más regular. Las ventajas de este procedimiento surgen a simple vista, por una parte se disminuyen las operaciones necesarias de transferencia entre mallas pues es menor la cantidad de elementos en el remallado y por otra parte se disminuye la pérdida de información durante la transferencia. También a partir del trabajo [Castelló y Flores \(2006\)](#), se ha aplicado una Formulación Lagrangiana Actualizada a través del algoritmo propuesto por [García Garino \(1993\)](#) y esto se debe a la eficiencia asociada al número de operaciones a nivel elemental (el tiempo de análisis se reduce en promedio un 30% con respecto a la Formulación Lagrangiana Total basada en [Crisfield \(1997\)](#)). A esta reducción de tiempos en los cálculos a nivel elemental, se le puede adicionar una reducción importante de tiempo cuando se remalla solo una pequeña parte del dominio.

Si además se considera la opción de remallado automático gobernado por la distorsión de los elementos, se logra una herramienta computacional con un excelente desempeño. Además

de la importancia del esquema de remallado, la transferencia de las variables entre mallas juega un papel decisivo en la precisión de los resultados finales. Anteriormente se había probado con esquemas simples como el de extrapolación y suavizado de variables, mientras que en este trabajo se decidió emplear un algoritmo de transferencia basado en el *Superconvergent Patch Recovery* de Zienkiewicz y Zhu (1992a). Los resultados obtenidos empleando el SPR como estrategia de transferencia muestran una disminución en la pérdida de información, esto se observa principalmente en los problemas que involucran un cantidad importante de pasos de remallado.

AGRADECIMIENTOS

Los autores desean agradecer el apoyo financiero de CONICET (Argentina) y del Dpto de Estructuras de Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de la U.N.C. La utilización del programa Stampack ha sido posible gracias al apoyo de la empresa Quantech ATZ.

REFERENCIAS

- ABAQUS. *Student Edition, version 6.4.2*. Hibbit, Karlson and Sorensen Inc., Pawtucket, EE.UU., 2003.
- Akin J. *Finite Element Analysis with Error Estimators*. Butterworth-Heinemann, London, first edition, 2005.
- Armero F. On the locking and stability of finite elements in finite deformation plane strain problems. *Computers and Structures*, 75:261–290, 2000.
- Boroomand B. y Zienkiewicz O. Recovery procedures in error estimation and adaptivity, part ii: adaptivity in nonlinear problems of elasto-plasticity behaviour. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 176:127–146, 1999.
- Bugeda G. A new adaptive remeshing scheme based on the sensitivity analysis of the spr point-wise error estimation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195:462–478, 2006.
- Castelló W. y Flores F. Un elemento triangular en deformaciones impuestas para sólidos bidimensionales con grandes deformaciones. *Mecánica Computacional*, XXIV:595–616, 2005.
- Castelló W. y Flores F. Análisis bidimensional de sólidos con grandes deformaciones aplicando un elemento con deformaciones impuestas. *Mecánica Computacional*, XXV:329–349, 2006.
- Crisfield M. *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures: Advanced Topics*, volume II. Jhon Wiley Sons, Ltd, 1997.
- César de Sá J. y Natal Jorge R. New enhanced strain element incompressible problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 44:229–248, 1999.
- Felippa C. A study of optimal membrane triangles with drilling freedoms. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192:2125–2168, 2003.
- Flores F. A two-dimensional linear assumed strain triangular element for finite deformation analysis. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 2006. Aceptado para publicación.
- García Garino C. *Un modelo numérico para el análisis de sólidos elasto-plásticos sometidos a grandes deformaciones*. PhD thesis, E.T.S. Ingenieros de Caminos. Universidad Politécnica de Catalunya, 1993.
- GiD. *The personal pre and post processor, version 7.2*. International Center for Numerical Methods in Engineering, UPC, Barcelona, 2002.
- Gu H. y Kitamura M. A modified recovery procedure to improve the accuracy of stress at central area of bilinear quadrilateral element. *Journal of Society Naval Architects Japan*,

- 188:486–496, 2000.
- Gu H., Zong Z., y Hung K. A modified superconvergent patch recovery method and its application to large deformation problems. *Finite Elements in Analysis and Design*, 40:665–687, 2004.
- Gupta P. y Gupta N. Multiple barrelling in axial compression of cylindrical tubes. *Latin American Journal of Solids and Structures*, 2:195–217, 2005.
- Labbé P. y Garon A. A robust implementation of zienkiewicz and zhu s local patch recovery method. *Communications in Applied Numerical Methods*, 11:427–434, 1995.
- Lo S. y Lee C. Selective regional refinement procedure for adaptive finite element analysis. *Computers and Structures*, 68:325–341, 1998.
- Perić D., Vaz Jr. M., y Owen D. On adaptive strategies for large deformations of elasto-plastic solids at finite strains: computational issues and industrial applications. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 176:279–312, 1999.
- Simo J. y Hughes T. *Computational Inelasticity*. Springer-Verlag New York, Inc., 1998.
- Simo J. y Rifai M. A class of mixed assumed strain methods and the method of incompatible modes. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 29:1595–1638, 1990.
- SouzaNeto E., Pires F., y Owen D. A new f-bar based method for linear triangles and tetrahedra in the finite strain analysis of nearly incompressible solids. *VII International Conference on Computational Plasticity COMPLAS 2003, CIMNE, Barcelona*, 2003.
- STAMPACK. *A General Finite Element System for Sheet Stamping and Forming Problems, v6.0.0*. Quantech ATZ, Barcelona, España, 2004.
- Taylor L. y Becker E. Some computational aspects of large deformation rate dependent plasticity problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 41:251–278, 1983.
- Wiberg N., Abdulwahab F., y Ziukas S. Enhanced superconvergent patch recovery incorporating equilibrium and boundary conditions. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 37:3417–3440, 1994.
- Yazdani A., Gakwaya A., y Dhatt G. An improved superconvergent patch recovery technique for the axisymmetrical problems. *Computers and Structures*, 66:799–821, 1998.
- Zienkiewicz O., Boroomand B., y Zhu J. Recovery procedures in error estimation and adaptivity, part i: adaptivity in linear problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 176:111–125, 1999.
- Zienkiewicz O., Rojek J., Taylor R., y Pastor M. Triangles and tetrahedra in explicit dynamic codes for solids. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 43:565–583, 1998.
- Zienkiewicz O. y Zhu J. The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. part i: The recovery technique. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 33:1331–1364, 1992a.
- Zienkiewicz O. y Zhu J. The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. part ii: Error estimates and adaptivity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 33:1365–1382, 1992b.