

TRANSICIÓN DESDE LA REFLEXIÓN REGULAR A LA REFLEXIÓN IRREGULAR DE ONDAS DE CHOQUE OBLICUAS

Federico Langhi, Rodrigo Paz y Mario Storti

*Centro Internacional de Métodos Computacionales en Ingeniería (CIMEC), CONICET - INTEC - UNL,
Parque Tecnológico Litoral Centro, (3000) Santa Fe Argentina <http://www.cimec.org.ar>*

Palabras clave: Flujo interno, Reflexión Regular, Reflexión Irregular, Mach Stem.

Resumen. En este trabajo se presentan los resultados obtenidos del análisis del flujo interno a través de un conducto convergente y la interacción de las ondas de choque formadas en el mismo.

El problema consiste en analizar la interacción entre dos ondas de choque oblicuas, en un flujo interno, que se forman al hacer pasar dicho flujo a través de dos superficies inclinadas, denominadas cuñas compresivas, formando un cierto ángulo con la dirección de la corriente sin perturbar.

Se presenta la interacción de las ondas de choque oblicuas en la Reflexión Regular y la formación de una tercera onda de choque recta, denominada Mach Stem en la condición de Reflexión Irregular. Esta transición, de la Reflexión Regular a la Irregular, esta asociada a la variación del ángulo de las superficies inclinadas.

Se observa un fenómeno de histéresis en la transición entre la reflexión regular y la reflexión irregular en el dominio de solución dual. En el proceso de histéresis, la configuración de reflexión regular, persiste para ángulos de la onda de choque incidente crecientes hasta que transiciona a la configuración reflexión irregular. Una vez que se establece la condición reflexión irregular, ésta persiste para ángulos de la onda de choque incidente decrecientes, hasta que regresa a la condición de reflexión regular.

Para realizar este trabajo se utilizó el programa PETSc-FEM, el cual resuelve las ecuaciones de conservación de masa, de cantidad de movimiento y de energía total para flujos viscosos compresibles por el método de elementos finitos.

1. INTRODUCCIÓN

La interacción de ondas de choque oblicuas en un flujo interno, es de gran relevancia, por ejemplo, en el análisis del funcionamiento de las tomas de aire de aviones supersónicos e hipersónicos, ya que, al producirse este fenómeno en dichas tomas, se produce una modificación en el flujo de aire y esto altera las prestaciones de los motores. Es por esto que se toma este problema para analizar, ya que es de una gran importancia práctica en la ingeniería aeronáutica.

Esta interacción, a su vez, varía al modificarse las condiciones del flujo y al modificarse la configuración de la geometría. Debido a esto, se produce más de un tipo de configuración de las estructuras de las ondas de choques y además, estas configuraciones no son únicas para cada condición de la geometría y del flujo.

El propósito de este trabajo es el de analizar este fenómeno, capturando las ondas de choque que se producen en una geometría caracterizada por dos cuñas, denominadas cuñas compresivas, a través de las cuales circula un flujo a velocidades hipersónicas. En este tema se han desarrollado trabajos, tanto experimentales como numéricos. Los resultados experimentales pueden verse en los trabajos desarrollados por [Hornung et al. \(1979\)](#) y los numéricos en los trabajos de [Walker and Schmesseur \(2002\)](#).

En problemas de flujo hipersónico, las no-linealidades se amplifican y cualquier dificultad en la convergencia del sistema lineal puede conducir a la convergencia no lineal y finalmente hacer que el sistema explote. Por lo tanto, la iteración global resulta un esquema no conveniente (alta demanda de CPU y memoria para el método de preconditionamiento GMRes, por ejemplo) para este paso. Un nuevo preconditionador para el método de descomposición de dominio (ver Referencias [Storti et al. \(2006\)](#); [Paz and Storti \(2005\)](#); [Paz et al. \(2005\)](#)) es usado para obtener soluciones físicas y para acelerar la convergencia a una tolerancia baja en los residuos. Además, se ha probado (ver artículo de [Paz et al. \(2005\)](#)) que el rendimiento de preconditionadores clásicos como los Additive Schwarz Methods es mucho menor que el rendimiento de preconditionadores Interface Strip Preconditioners, cuando se utilizan en la solución de este tipo de problemas.

2. LAS ECUACIONES DE NAVIER-STOKES DE FLUJO COMPRESIBLE

La forma diferencial de la ecuación de conservación de masa, de cantidad de movimiento y de energía total para flujos viscosos compresibles se escribe de la forma:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial(\mathcal{F}^a)_i}{\partial x_i} = \frac{\partial(\mathcal{F}^d)_i}{\partial x_i} + \mathcal{G} \quad \text{en } \Omega \times (0, t_+], \quad (1)$$

donde Ω es el dominio del modelo cuyo contorno es Γ , ver trabajos realizados por [Paz et al. \(2006\)](#). $\mathbf{U} = (\rho, \rho \mathbf{u}, \rho E)^t$ es el vector de estados desconocidos expresado en las variables conservativas, E representa la energía total específica, \mathcal{F}^a considera los flujos advectivos, \mathcal{F}^d considera los flujos difusivos y \mathcal{G} se usa para los términos de las fuentes externas (por ejemplo, $\mathcal{G} = (0; \rho \mathbf{f}_e; W_f + q_h)$, $W_f = \rho \mathbf{f}_e \cdot \mathbf{u}$ es el trabajo de las fuerzas externas \mathbf{f}_e . Los flujos advectivos y difusivos son definidos como:

$$\mathcal{F}_i^a = \begin{pmatrix} \rho u_i \\ \rho u_1 u_i + \delta_{i1} p \\ \rho u_2 u_i + \delta_{i2} p \\ \rho u_3 u_i + \delta_{i3} p \\ \rho \mathcal{H} u_i \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathcal{F}_i^d = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{i1} \\ \tau_{i2} \\ \tau_{i3} \\ \tau_{ik} u_k - q_i \end{pmatrix}, \quad (2)$$

donde \mathcal{H} es la entalpía específica total definida en términos de la energía interna específica e y la energía cinética específica como: $\mathcal{H} = e + p/\rho + \frac{1}{2}|\mathbf{u}|^2$. En las ecuaciones de los términos advectivos y difusivos, δ_{ij} es el tensor isotrópico de Kronecker de rango 2 (también denotado como \mathbf{I}), τ_{ij} son las componentes del tensor de tensiones viscosas de Newton: $\tau = 2\mu\epsilon(\mathbf{u}) - \frac{2}{3}\mu(\nabla \cdot \mathbf{u})\mathbf{I}$. El tensor ϵ de tasa de deformación es $\epsilon(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\partial_j u_i + \partial_i u_j)$. q_i es el flujo de calor definido de acuerdo a la ley de Fourier asumido como: $q_i = -\kappa \nabla T$ con κ la conductividad térmica y T la temperatura absoluta. Los coeficientes de viscosidad y conductividad térmica pueden ser modelados por la fórmula de Sutherland como:

$$\mu = \mu_0 \left(\frac{T}{T_0} \right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{T_0 + 110}{T + 110} \right) \quad \text{y} \quad \kappa = \frac{\gamma R \mu}{(\gamma - 1) Pr}, \quad (3)$$

donde μ_0 es la viscosidad a la temperatura de referencia T_0 y Pr es el número de Prandtl (siendo $Pr = c_p \mu / \kappa$, donde c_p denota el calor específico a presión constante, μ el coeficiente de viscosidad, y κ la conductividad térmica). El modelo físico es cerrado por la definición de la ley constitutiva para la energía interna específica en términos del estado termodinámico y de algunas ecuaciones de estado para las variables termodinámicas; normalmente, se adopta una ley de gas ideal, entonces $\rho e = p/(\gamma - 1) + \frac{1}{2}\rho\|\mathbf{u}\|^2$ y $p = \rho RT$ donde $R = (\gamma - 1)c_v$ es la constante particular del gas, con $\gamma = c_p/c_v$ la relación de calores específicos a presión constante y volumen constante respectivamente, denominado exponente isoentrópico. Alternativamente, la ecuación de conservación de masa, cantidad de movimiento y energía total en forma diferencial puede ser escrita en la forma casi lineal:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + A_i \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(K_{ij} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_j} \right) + \mathcal{G}, \quad (4)$$

donde se asume que los vectores de flujo son solo función de las variables de estado, por ejemplo, $\mathcal{F}^a = \mathcal{F}^a(\mathbf{U})$ y $\mathcal{F}^d = \mathcal{F}^d(\mathbf{U}, \nabla \mathbf{U})$. Entonces, la divergencia de las funciones de los vectores de flujo pueden escribirse como:

$$\frac{\partial \mathcal{F}_i^a}{\partial x_i} = \frac{\partial \mathcal{F}_i^a}{\partial \mathbf{U}} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_i} = A_i \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_i} \quad \text{y} \quad \mathcal{F}_i^d = K_{ij} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_j}. \quad (5)$$

3. FORMULACIÓN VARIACIONAL

Consideremos una discretización del dominio Ω por elementos finitos en subdominios Ω^e ($e = 1, 2, 3, \dots, n_{el}$). Basados en esta discretización, los espacios de función de elemento finitos para las soluciones de prueba y para las funciones de peso, se definen, respectivamente como \mathcal{V}^h y \mathcal{L}^h . Estos espacios de funciones son elegidos como un subconjunto de funciones de $[\mathbf{H}^{1h}(\Omega)]^{ndof}$ al tomar las condiciones de contorno de Dirichlet, donde $\mathbf{H}^{1h}(\Omega)$ es el espacio funcional de Sobolev de dimensión finita sobre Ω , y $ndof$ es el número de grados de libertad en el problema continuo. La estabilización de la formulación por elementos finitos de la forma cuasi lineal de la ecuación (1), se escribe de la siguiente forma: Encontrar $\mathbf{U}^h \in \mathcal{V}^h$ tal que para todo $\mathbf{W}^h \in \mathcal{L}^h$

$$\int_{\Omega} \mathbf{W}^h \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{U}^h}{\partial t} + \frac{\partial F_a^h}{\partial x_i} \right) d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{W}^h \cdot \left(\frac{\partial F_d^h}{\partial x_i} + \mathcal{G} \right) d\Omega$$

$$\int_{\Omega} \mathbf{W}^h \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{U}^h}{\partial t} + A_i^h \frac{\partial \mathbf{U}^h}{\partial x_i} - \mathcal{G} \right) d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{W}^h}{\partial x_i} \cdot K_{ij}^h \frac{\partial \mathbf{U}^h}{\partial x_j} d\Omega - \int_{\Gamma_h} \mathbf{W}^h \cdot H^h d\Gamma$$

$$\begin{aligned}
& +tau_fac \sum_{e=1}^{nel} \int_{\Omega^e} \tau (A_i^h)^T \frac{\partial \mathbf{W}^h}{\partial x_k} \cdot \left\{ \frac{\partial \mathbf{U}^h}{\partial t} + A_i^h \frac{\partial \mathbf{U}^h}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(K_{ij}^h \frac{\partial \mathbf{U}^h}{\partial x_j} \right) - \mathcal{G} \right\} d\Omega \\
& + F_{sc} \sum_{e=1}^{nel} \int_{\Omega^e} \delta_{shc} \frac{\partial \mathbf{W}^h}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{U}^h}{\partial x_i} d\Omega = 0,
\end{aligned} \tag{6}$$

siendo tau_fac el “Factor de SUPG”, el cual multiplica a la primera sumatoria de la ecuación 6 y F_{sc} el “Factor de shock-capturing”, el cual multiplica al término de “Shock-Capturing” en la ecuación 6, y donde

$$\mathcal{L}^h = \{ \mathbf{U}^h \mid \mathbf{U}^h \in [\mathbf{H}^{1h}(\Omega)]^{n_{dof}}, \mathbf{U}^h|_{\Omega^e} \in [P^1(\Omega^e)]^{n_{dof}}, \mathbf{U}^h = g \text{ en } \Gamma_g \}$$

$$\mathcal{V}^h = \{ \mathbf{W}^h \mid \mathbf{W}^h \in [\mathbf{H}^{1h}(\Omega)]^{n_{dof}}, \mathbf{W}^h|_{\Omega^e} \in [P^1(\Omega^e)]^{n_{dof}}, \mathbf{W}^h = 0 \text{ en } \partial\Omega_g \},$$

donde las matrices A_i y K_{ij} son definidas como en la sección §2.

Cálculo del parámetro de estabilización y definición del término de shock-capturing

En el contexto de la formulación SUPG (streamline upwind/Petrov Galerkin), el tensor de tiempo intrínseco τ se define de la siguiente forma, ver trabajo de [Aliabadi \(1994\)](#), $\tau = \max[0, \tau_a - \tau_d - \tau_\delta]$, con cada τ_x definido como sigue (considerando los efectos advectivos y difusivos y evitando la duplicación del operador de shock-capturing y del operador SUPG):

$$\tau_a = \frac{h}{2(c + |\mathbf{u}|)} \mathbf{I}, \quad \tau_d = \frac{\sum_{j=1}^{n_{sd}} \beta_j^2 \text{diag}(K_{jj})}{(c + |\mathbf{u}|)^2} \mathbf{I}, \quad \tau_\delta = \frac{\delta_{shc}}{(c + |\mathbf{u}|)^2} \mathbf{I} \tag{7}$$

donde c es la velocidad del sonido, h es el tamaño del elemento calculado como la longitud del elemento en la dirección de las líneas de corriente y $\beta = \nabla \|\mathbf{U}\|^2 / \|\nabla \|\mathbf{U}\|^2\|$.

El término shock-capturing, presenta dos operadores: un operador isotrópico y un operador anisotrópico, ambos propuestos por [Tezduyar and Senga \(2004\)](#). Se define un vector unitario orientado con la dirección del gradiente de la densidad como $\mathbf{j} = \frac{\nabla \rho^h}{|\nabla \rho^h|}$ y una longitud característica como $h = 2 \left(\sum_{a=1}^{n_{en}} |j \cdot \nabla N_a| \right)^{-1}$, donde N_a es la función de forma del elemento finito correspondiente al nodo a . Se define entonces el correspondiente operador shock-capturing isotrópico como

$$\delta_{shc} = \frac{h}{2} \mathbf{u}_{char} \left(\frac{|\nabla \rho^h| h}{\rho_{ref}} \right)^{\beta^*}, \tag{8}$$

donde $u_{char} = |\mathbf{u}| + c$ es la velocidad característica. ρ_{ref} es la densidad interpolada y β^* es un parámetro que puede tomarse como 1 o 2, de acuerdo a la agudeza (sharpness) de la discontinuidad que se quiere capturar. La versión anisotrópica del termino de shock-capturing en la ecuación (6) es cambiado como

$$\sum_{e=1}^{nel} \int_{\Omega^e} \frac{\partial \mathbf{W}^h}{\partial x_i} j_i \delta_{shc} j_k \frac{\partial \mathbf{U}^h}{\partial x_k} d\Omega. \tag{9}$$

4. MÉTODOS DE DESCOMPOSICIÓN DE DOMINIOS

Dado que en problemas hipersónicos las no-linealidades pueden presentar un serio problema, es indispensable precondicionar muy bien el problema para que esto no dificulte la resolución del mismo. Como se menciona más arriba, este método está siendo utilizado actualmente.

El objetivo principal de los Métodos de Descomposición de Dominio, ver Paz et al. (2006), es la solución eficiente en arquitecturas paralelas de problemas que se presentan en mecánica computacional con geometrías irregulares y discretizadas con mallas muy finas.

Estos métodos se basan en descomponer el dominio de definición del problema en subdominios de modo que en cada uno de éstos el problema sea más fácil de resolver o bien sea de un tamaño adecuado para que pueda ser alojado en un solo procesador. Estos subdominios pueden solaparse (método de Schwarz) o no solaparse. Entre los que no se solapan, es decir que el contacto se produce en las fronteras inter-subdominios, se incluyen los procedimientos que utilizan el complemento de Schur, ver trabajos de Storti et al. (2003); Paz and Storti (2005). El problema de descomposición de dominio puede mirarse como un buen procedimiento para precondicionar el problema global.

5. TUBO DE CHOQUE

A modo de validación de la formulación de las ecuaciones planteadas para resolver el problema numéricamente, se plantea este ejemplo, el tubo de choque, el cual tiene solución analítica.

Este problema puede tomarse como un problema de Riemann, es decir, que tiene condiciones iniciales uniformes para un dominio infinito, excepto para un salto de discontinuidad. Esto se representaría, para un problema centrado en $x = x_0$ y para un tiempo inicial $t = t_0$, las condiciones iniciales son:

$$u(x, t_0) = \begin{cases} u_I & x < x_0 \\ u_D & x > x_0 \end{cases} \quad (10)$$

Este ejemplo se encuentra resuelto en forma analítica en el libro de Shapiro (1954).

La elección de este problema, se debe a que en él, las ecuaciones de Euler pueden ser resueltas en forma exacta. También se puede observar la simplicidad del problema, ya que su geometría y las condiciones iniciales y de contorno que se imponen para resolverlo en forma numérica, son muy simples.

El problema consiste en un tubo recto, el cual se encuentra inicialmente dividido por un diafragma. A cada lado del diafragma, el gas se encuentra en reposo a diferentes presiones. Este es un problema que se puede considerar unidimensional, ya que solo se producen variaciones en la dirección longitudinal del tubo y no se observan variaciones en la dirección transversal del mismo. Se considera que el fluido es no viscoso, es decir, que no habrá tensiones de corte producidas por los efectos de la viscosidad. La zona que se encuentra a la derecha del diafragma, a la cual denominaremos zona 1, es la de baja presión, siendo la que se encuentra a la izquierda, a la que denominaremos zona 3, la de alta presión. En un determinado momento, se rompe el diafragma que separa ambas zonas y se producen, una onda de choque recta, que viaja hacia la zona de baja presión o zona 1, un abanico de expansión que viaja hacia la zona de alta presión o zona 3 y una discontinuidad de contacto, que separa las zonas que quedan entre la onda de choque y el abanico de expansión. Los estados resultantes luego de la rotura del diafragma son, un estado 2, el que queda detrás de la onda de choque y un estado 4, el que queda detrás del abanico de expansión. Una vez que el diafragma se rompe, se igualan las presiones y las velocidades en las zonas 2 y 4, es decir, $p_2 = p_4$ y $u_2 = u_4$. Dado que entre las zonas 3 y 4 no hay cambio de entropía y entre las zonas 1 y 2 hay un aumento de la entropía a través de la

onda de choque, las temperaturas en la zona 2 y en la zona 4 no son las mismas, y, por ende, se produce una discontinuidad de contacto, es decir, que las velocidades y las presiones son iguales a ambos lados de esta discontinuidad que separa las zonas 2 y 4, pero la temperatura es diferente.

5.1. La Geometría

La geometría consiste en un tubo representado en dos dimensiones, es decir, solo se considera el largo y el alto del tubo. Las dimensiones son:

largo = 20 m

alto = 1 m

El diafragma se encuentra ubicado en $x = 0$ m, es decir, se lo ubica en el centro del tubo, y los extremos se encuentran en $x = -10$ m y $x = 10$ m. En la Figura 1 se puede ver la geometría y las dos zonas.

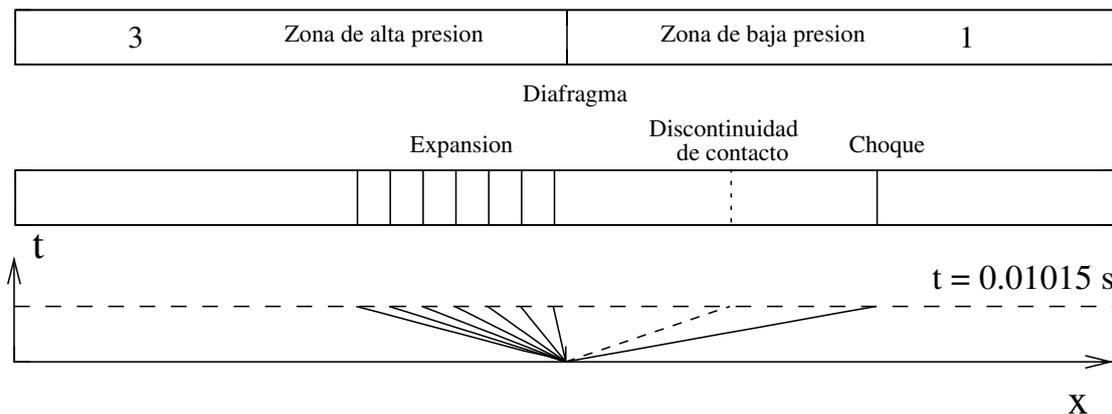


Figura 1: Esquema del tubo de choque. Posiciones de las ondas. Gráfico x-t.

5.2. Discretización del Dominio

El dominio se discretizó con una malla de 801 elementos distribuidos en forma homogénea a lo largo del tubo equiespaciados, lo que resultó en un total de 1602 nodos. Solo se tienen elementos en la dirección del flujo (dirección x en este esquema) ya que, como se menciona anteriormente, solo en esta dirección se tienen variaciones. Para generar dicha malla, se utilizó una rutina de Octave.

5.3. Condiciones Iniciales

Aquí no tenemos condiciones de flujo entrante o saliente, pues como se menciona anteriormente, el fluido está inicialmente en reposo, por lo tanto, no se deben imponer condiciones de entrada y salida del flujo. Las condiciones iniciales son las que a continuación se detallan:

$$p_1 = 10000 \text{ Pa}$$

$$\rho_1 = 0,125 \text{ kg/m}^3$$

$$u_1 = 0 \text{ m/s}$$

$$p_2 = 100000 \text{ Pa}$$

$$\rho_2 = 1 \text{ kg/m}^3$$

$$u_1 = 0 \text{ m/s}$$

5.4. Resultados

Debido a que este problema es inestacionario, la presentación de la solución se da para un cierto tiempo transcurrido desde la rotura del diafragma y no para la condición en la cual el flujo se haya desarrollado por completo, es decir el estado estacionario, pues a partir de ese instante, el fluido volvería a estar en reposo en todo el tubo y las condiciones serían homogéneas en todo el dominio.

A continuación, en las Figuras 2 a 4, se presentan los gráficos de la densidad, la presión y la velocidad del flujo en el tubo, transcurridos 0,01 segundos desde que se produce la rotura del diafragma. Se graficaron dos soluciones, la solución analítica y la solución numérica.

En las Figuras 5 y 6 se observa cómo influye la variación de los factores τ_{fac} y F_{sc} , los cuales están definidos en §3, en la captura de las discontinuidades. En la Figura 5 se observan ambos parámetros en los valores extremos, ambos con el mismo valor. En la Figura 6 se grafican los valores máximo y mínimo que pueden adoptar, pero alternados, es decir, cuando uno adopta el máximo, el otro adopta el mínimo.

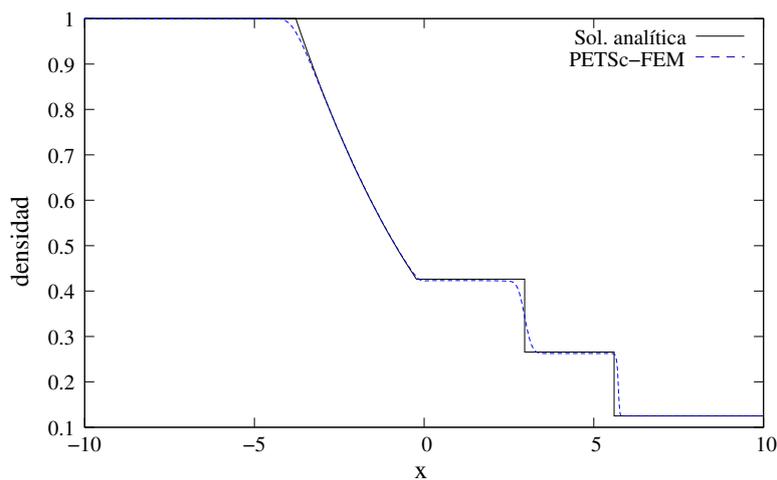


Figura 2: Comparación de densidad. Valores de $\tau_{fac} = 0,25$ y $F_{sc} = 0,01$.

6. INTERACCIÓN DE ONDAS DE CHOQUE OBLICUAS

La interacción de ondas de choque oblicuas en un flujo interno, es de gran relevancia, por ejemplo, en el análisis del funcionamiento de las tomas de aire de aviones, ya que, al producirse estas ondas de choque en dichas tomas, se produce una modificación en el flujo de aire y esto altera las prestaciones de los motores. Es por esto que se eligió este problema para analizar, ya que es de una gran importancia práctica en la ingeniería aeronáutica. El problema consiste en analizar la interacción entre dos ondas de choque oblicuas, ver trabajos realizados por [Hornung et al. \(1979\)](#), en un flujo interno, que se forman al hacer pasar dicho fluido a través de dos superficies inclinadas, denominadas cuñas compresivas, formando un cierto ángulo θ con la dirección de la corriente sin perturbar. Las superficies pueden girar alrededor de los bordes de fuga de las mismas, variando de esta manera, el ángulo θ que forman con la dirección del flujo. Se producen dos tipos de reflexión de las ondas de choque, la reflexión regular y la reflexión irregular. En la Figura 7 se ve el esquema de la geometría y las dos formas de reflexión de las

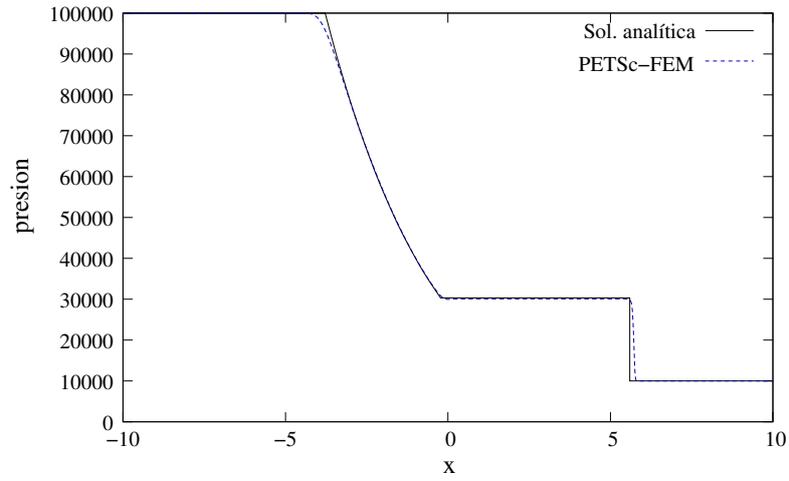


Figura 3: Comparación de presión. Valores de $\tau_{fac} = 0,25$ y $F_{sc} = 0,01$.

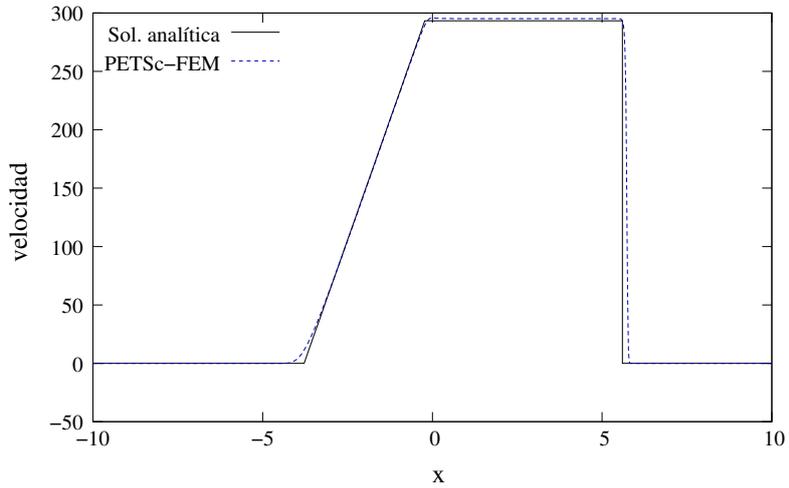


Figura 4: Comparación de velocidad. Valores de $\tau_{fac} = 0,25$ y $F_{sc} = 0,01$.

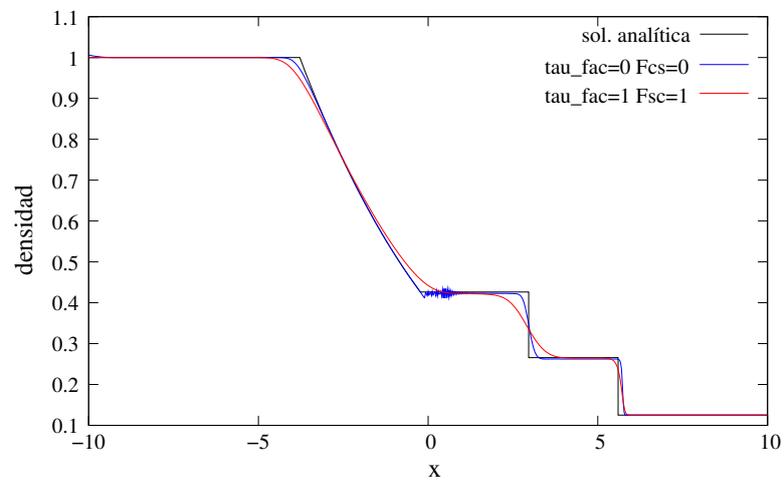


Figura 5: Variación de los parámetros τ_{fac} y F_{sc} .

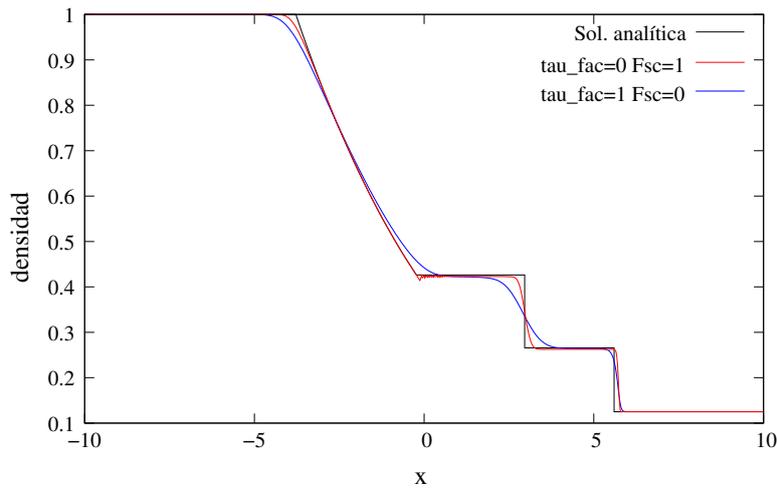


Figura 6: Variación de los parámetros τ_{fac} y F_{sc} .

ondas de choque. En la reflexión regular, la cual se da cuando el ángulo α , que es el que se forma entre la onda de choque incidente y la dirección de la corriente libre, es suficientemente pequeño, una onda de choque reflejada (RS) se forma en el punto de intersección de la onda de choque incidente (IS) y el plano de simetría. El flujo que pasa a través de la onda reflejada (RS) retorna a su dirección original, paralela al plano de simetría. Esto es debido a que la deflexión de las líneas de corriente causada por la onda de choque incidente es cancelada por la onda de choque reflejada. Esta condición es la que se observa en la Figura 7.a). Cuando el ángulo α se incrementa más allá de un valor crítico, la configuración cambia repentinamente a la condición de reflexión irregular, también denominada en la bibliografía como Mach Reflection, que es la mostrada en la Figura 7.b). Aquí se puede observar que una tercera onda de choque, casi normal, se forma en el punto T, punto de intersección de las ondas de choque incidente (IS) y reflejada (RS). Esta tercera onda de choque se denomina Mach Stem (MS). Además de las tres ondas de choque, una superficie de deslizamiento (SS) surge desde el punto triple T y divide la corriente que pasa a través de los choques MS, IS y RS. En el borde de fuga de la cuña, se forma un abanico de expansión, el cual se refracta en la onda de choque reflejada RS e interactúa con la superficie de deslizamiento. Debido a esta interacción, la superficie de deslizamiento SS se curva y forma una “tobera virtual”. El valor más pequeño de α para el cual la configuración reflexión irregular es teóricamente posible fue obtenido por von Neumann y es denotado como α_N . El valor más grande al cual la configuración reflexión regular es posible es α_d , para el cual la deflexión de las líneas de corriente producida por la onda de choque incidente es igual a la máxima deflexión alcanzable por la onda de choque reflejada, $\alpha_d > \alpha_N$. Debido a que este valor de ángulo α_d corresponde al desprendimiento de la onda de choque en el flujo sobre la cuña, es llamada condición de desprendimiento. La condición de reflexión irregular siempre resulta para ángulos de la onda de choque inicial o incidente superiores a los ángulos de desprendimiento. Entre la condición de Neumann y la de desprendimiento, existe un rango para el ángulo de la onda de choque inicial, en el cual ambas condiciones, reflexión regular e irregular, son posibles. Esta región, denominada dominio de solución dual, es bastante pequeña para números de Mach bajos, pero incrementa su tamaño para números de Mach superiores. Se observa un fenómeno de histéresis en la transición entre la reflexión regular y la reflexión irregular en el dominio de solución dual. En el proceso de histéresis, la configuración de reflexión regular, persiste para ángulos de la onda de choque incidente crecientes hasta que transiciona a la configuración reflexión irregular, cercano a la condición de desprendimiento. Una vez que se establece la condición

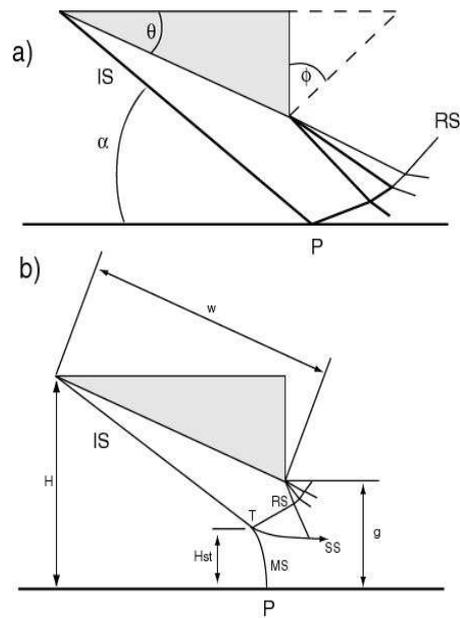


Figura 7: Esquema de reflexión regular e irregular de ondas de choque oblicuas.

reflexión irregular, ésta persiste para ángulos de la onda de choque incidente decrecientes, hasta que regresa a la condición de reflexión regular, cercano a la condición de Neumann.

6.1. La Geometría

En la Figura 7 se pueden ver las dimensiones características de la geometría, las cuales son, w , que representa la longitud de la cuña, la cual es tomada como longitud característica para la determinación del número de Reynolds, g , la altura desde el borde de fuga de la cuña hasta el eje de simetría de la geometría. La altura g , en este ejemplo, es tal que cumple la relación $g/w = 0,42$. La geometría se completa con un conducto recto de 1.2 m de largo detrás de las cuñas compresivas.

6.2. Discretización del Dominio

Para la discretización del dominio se utilizaron 12322 nodos y 12000 elementos. La malla utilizada es estructurada y fue generada con una rutina de Octave. La longitud del conducto de salida es de 1.2 m, $w = 1,0837$ m y en base a w , se calculó el resto de las dimensiones. El ángulo θ se fue variando, aumentándolo y disminuyéndolo para lograr el efecto buscado, la histéresis. En la Figura 8 se ve el esquema de la malla utilizada en la resolución del problema.

6.3. Condiciones de Contorno e Iniciales

La velocidad del flujo es de Mach 5 y un Reynolds de 2000000. Se inició el análisis del caso con un ángulo de la cuña de $\theta = 22,66^\circ$, a partir de ese valor, se lo fue incrementando hasta llegar al valor de $\theta = 30^\circ$. La relación g/w es de 0,42. En la superficie se impusieron condiciones de no deslizamiento. Una vez alcanzado, para cada ángulo, el estado estacionario, se varía el ángulo θ al valor siguiente. En este caso, con el nuevo valor del ángulo, el estado inicial, es ahora el estado estacionario del ángulo anterior. Esto se hizo tanto cuando se fueron aumentando los ángulos como cuando se fueron disminuyendo.

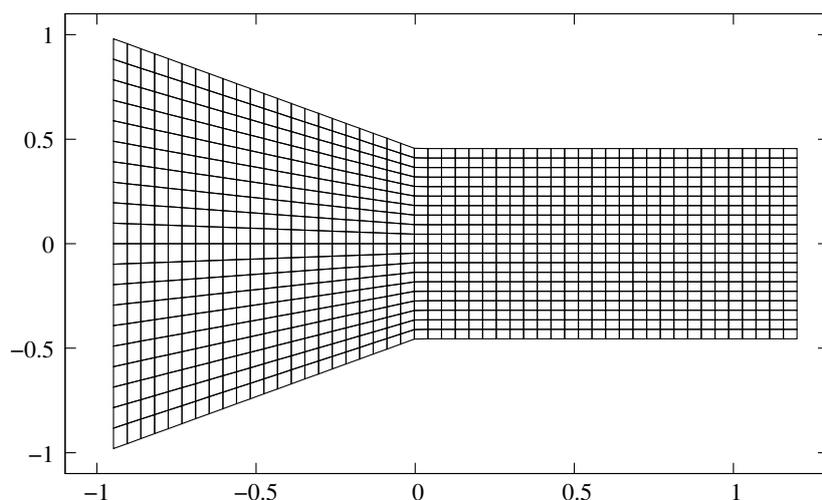


Figura 8: Malla. El número de nodos representado aquí es menor que el utilizado realmente.

6.4. Resultados

Se observa, para el ángulo de 29° , la formación de las dos ondas de choque oblicuas primarias o incidentes y la formación de las ondas de choque secundarias o reflejadas. También puede observarse que a medida que el ángulo de las cuñas va aumentando ocurre lo mismo con el ángulo α de la onda de choque incidente. Hasta un $\theta = 29,5^\circ$ no se forma la tercera onda de choque, la denominada Mach Stem. Para un valor de $\theta = 30^\circ$ se forma dicha onda de choque, la cual se encuentra bien definida y es estable, es decir, que cuando el resultado converge a la solución estacionaria, la onda se mantiene fija en la posición. Cuando comenzamos a reducir el ángulo de la cuña, θ , la onda de choque vertical, Mach Stem, se mantiene aún para un ángulo de la cuña de $\theta = 29,5^\circ$. Esto muestra el efecto de histéresis que se menciona más arriba, y el cual es el efecto que se quiere representar. En las Figuras 9 a 13, se observa este fenómeno donde se ven graficados el número de Mach para los ángulos desde $\theta = 29^\circ$ hasta $\theta = 30^\circ$ aumentando y luego los mismos valores pero disminuyendo.

En este caso también se impusieron en la salida del dominio, las condiciones absorbentes. A continuación, en las Figuras 14 y 15 se grafican la distribución de presión a lo largo de la línea media. En la Figura 16 se ve gráficamente el fenómeno de histéresis que se quiere capturar. Aquí se ve graficada la variación del ángulo α en función de la variación del ángulo θ . Este último es el de la cuña, mientras que el primero es el de la onda de choque.

Resultados similares pueden verse en una publicación de la *American Institute of Aeronautics and Astronautics*, realizados por Walker and Schmesseur (2002). La Figura 17 muestra estos resultados. Se puede ver que los valores a los que se produce el Mach Stem son menores que los que se obtuvieron con PETSc-FEM. Esto puede deberse a efectos viscosos, debido a que en el caso corrido se considera la condición no slip sobre la superficie, es decir que la velocidad es cero sobre la misma. Por otro lado, puede también influir el paso de variación del ángulo θ y el refinamiento de la malla utilizada. Resultados experimentales pueden verse en el trabajo realizado por Hornung et al. (1979).

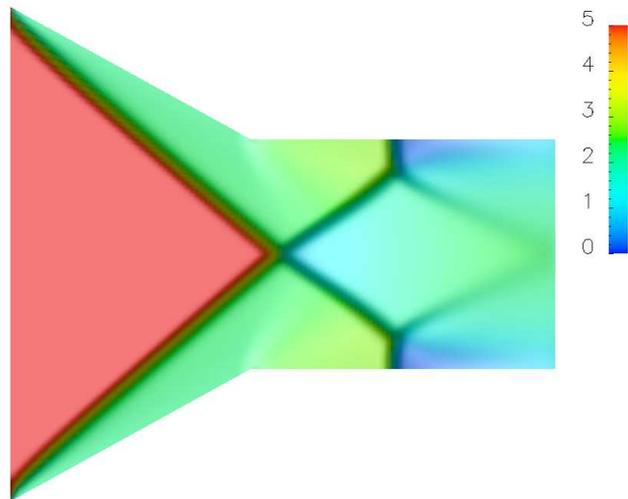


Figura 9: Valores del Mach para $\theta = 29^\circ$.

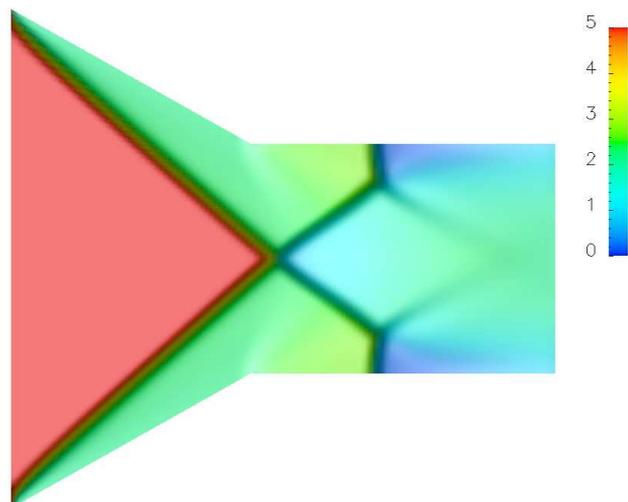


Figura 10: Valores del Mach para $\theta = 29,5^\circ$. Aumento del ángulo.

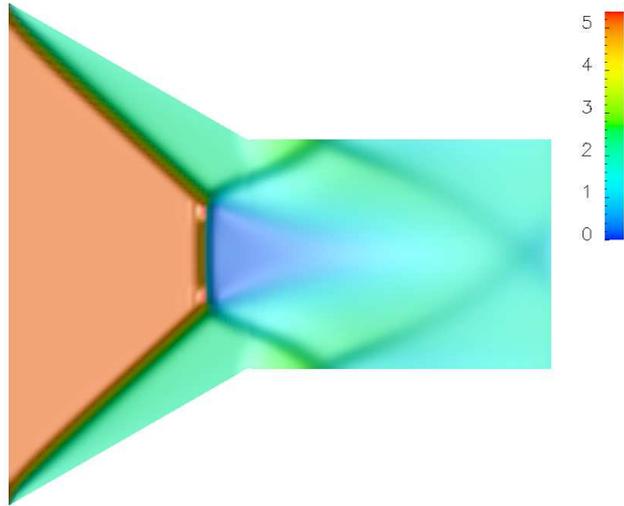


Figura 11: Valores de Mach para $\theta = 30^\circ$. Se produce la formación del Mach Stem.

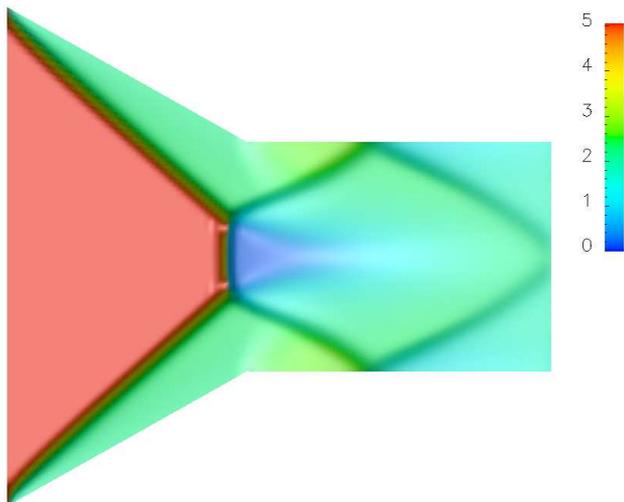


Figura 12: Valores del Mach para $\theta = 29,5^\circ$. Disminución del ángulo. Aún se mantiene el Mach Stem.

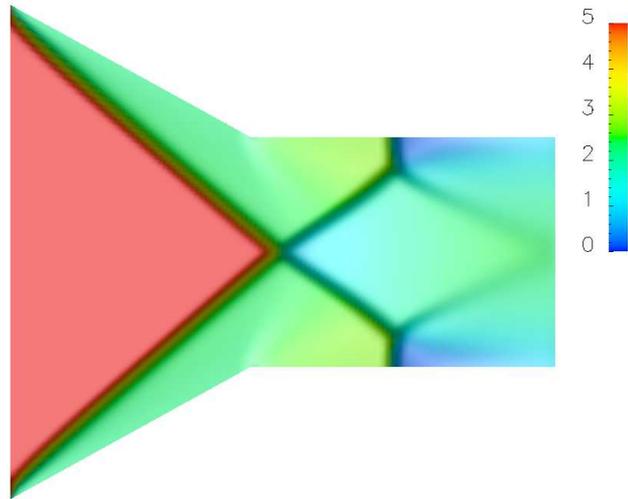


Figura 13: Valores del Mach para $\theta = 29^\circ$. Desaparición del Mach Stem.

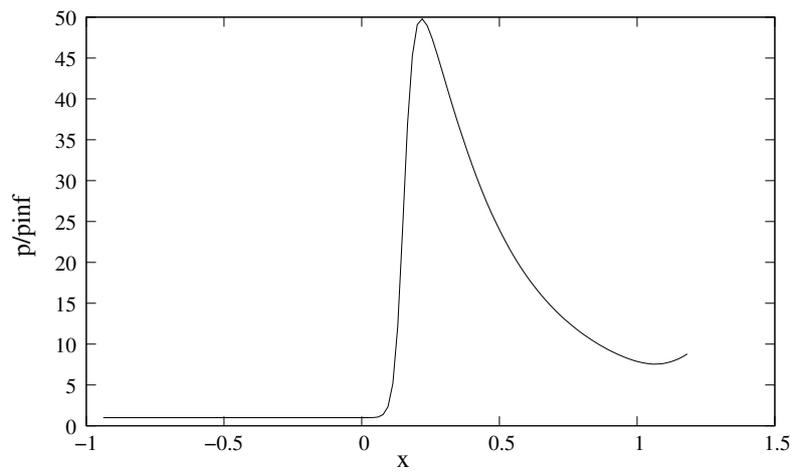


Figura 14: Relación de presiones a lo largo de la línea media para $\theta = 29^\circ$. Antes de la formación del Mach Stem.

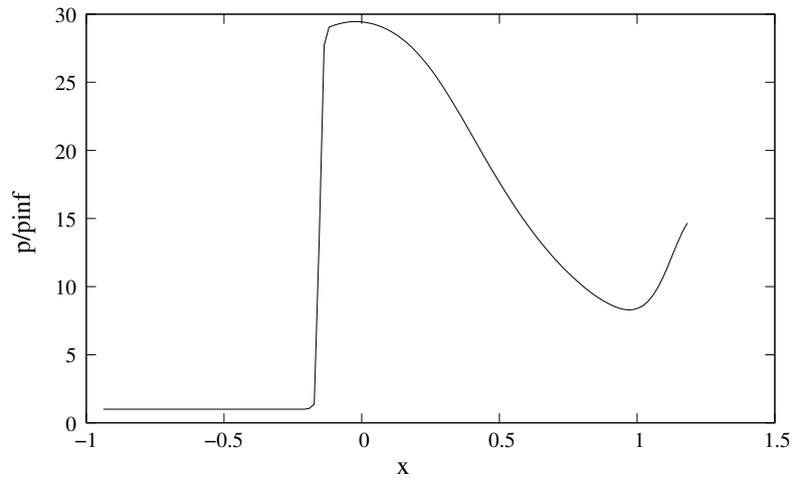


Figura 15: Relación de presiones a lo largo de la línea media para $\theta = 30^\circ$. Con la formación del Mach Stem.

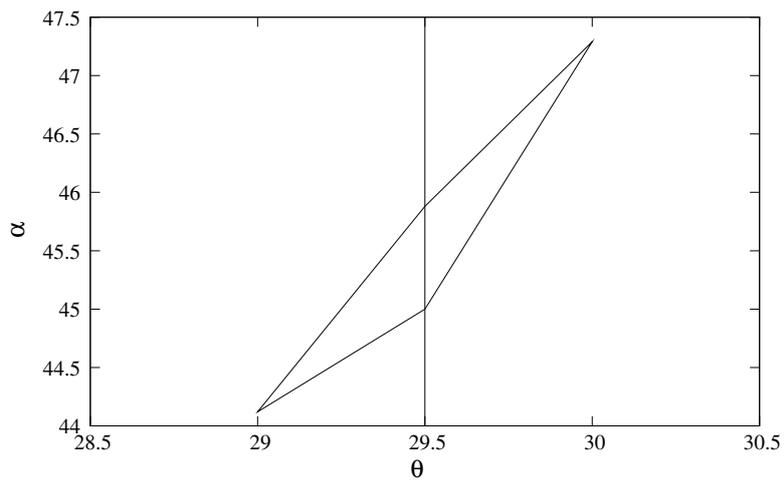


Figura 16: Variación del ángulo α en función de la variación del ángulo θ .

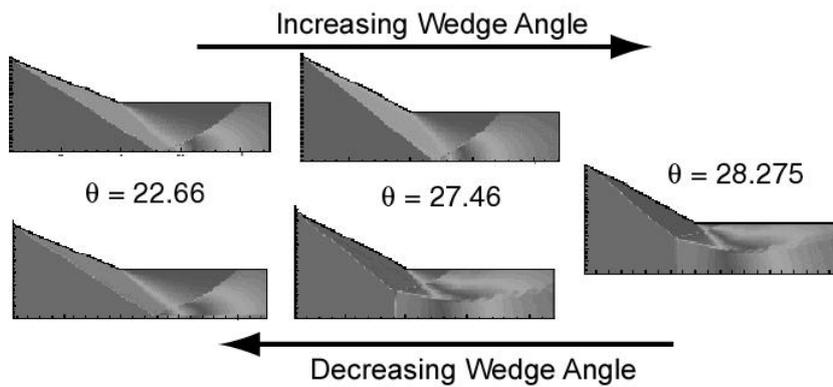


Figura 17: Variación de densidad mostrando el fenómeno de histeresis.

7. CONCLUSIONES

Se presenta en este trabajo la resolución de un problema de flujo interno, de alta velocidad, en el cual se produce una interacción entre las ondas de choque que se generan en el interior de la geometría. En este problema hay una zona en la cual, dos soluciones son posibles, la Reflección Regular y la Reflección Irregular. Esta zona de doble solución es la que hace que se presente este fenómeno de histéresis.

Se puede ver que con el método y la discretización planteados se logra capturar el fenómeno de histéresis en la formación del Mach Stem y se observan las demás estructuras de ondas que se forman en este problema, tanto en la Reflección Regular como en la Reflección Irregular. Estos resultados tienen una buena concordancia con los obtenidos tanto en trabajos experimentales (ver trabajos de [Hornung et al. \(1979\)](#)) como numéricos (ver trabajos de [Walker and Schmesseur \(2002\)](#)).

Como trabajos futuros se plantea realizar el análisis de este problema con flujos viscosos, con y sin condiciones absorbentes. También debería analizarse cómo varía la zona de doble solución con la variación del número de Mach, ya que esta debe reducirse con el mismo.

REFERENCIAS

- Aliabadi S.K. *Parallel finite element computation in aerospace applications. PhD Thesis.* Department of aerospace Engineering and Mechanics, University of Minnesota, 1994.
- Hornung H., Oertel H., and Sandeman R. Transition to mach reflexion of shock waves in steady and pseudosteady flow with and without relaxation. *Journal of Fluid Mechanics*, 27:541–560, 1979.
- Paz R., Nigro N., and Storti M. On the efficiency and quality of numerical solutions in cfd problems using the interface strip preconditioner for domain decomposition methods. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 2005. Submitted.
- Paz R., Nigro N., and Storti M. On the efficiency and quality of numerical solutions in CFD problems using the interface strip preconditioner for domain decomposition methods. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 52(1):89–118, 2006.
- Paz R. and Storti M. An interface strip preconditioner for domain decomposition methods: Application to hydrology. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 62(13):1873–1894, 2005.
- Shapiro A.H. The shock tube - riemann's problem. In *The Dynamics and Thermodynamics of Compressible Fluid Flow*. 1954.
- Storti M., Dalcin L., Paz R., Yommi A., Sonzogni V., and Nigro N. An interface strip preconditioner for domain decomposition methods. to appear in. *Journal of Computer Methods in Science and Engineering*, 2003. In press.
- Storti M., Dalcin L., Paz R., Yommi A., Sonzogni V., and Nigro N. A preconditioner for schur complement matrix. *Advances in Engineering Software*, 37:754–762, 2006.
- Tezduyar T. and Senga M. Determination of the shock-capturing parameters in supg formulation of compressible flows. In T.U.P. Springer-Verlag, editor, *Computational Mechanics WCCM IV, Beijing, China 2004*. 2004.
- Walker S. and Schmesseur J. Cfd validation of shock-shock interaction flow fields. *American Institute of Aeronautics and Astronautics*, pages 11–22, 2002.