

UM MODELO NUMÉRICO DE APLICAÇÃO GERAL PARA A ANÁLISE DINÂMICA DE ESTRUTURAS COM NÃO LINEARIDADE GEOMÉTRICA

Alexandre Luis Braun[†]

[†]Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (PPGEC)
Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS),
Av. Osvaldo Aranha, 99 – 3º Andar, Porto Alegre/RS, Brasil, CEP: 90035-190
e-mail: allbraun@ig.com.br

Palavras-chave: Análise dinâmica de estruturas, Não linearidade geométrica, Método dos Elementos Finitos (MEF), Integração Reduzida, Travamento volumétrico e de cisalhamento.

Resumo. Neste trabalho é apresentado um esquema numérico baseado no Método dos elementos Finitos para a análise dinâmica de diferentes tipos de estruturas com não linearidade geométrica. Embora seja bastante difundido o uso de elementos finitos específicos para a análise dos diferentes tipos estruturais (elementos de viga, elementos de placa, etc.) na mecânica dos sólidos, pesquisas recentes têm direcionado seus esforços para o desenvolvimento de códigos numéricos de uso generalizado a partir de elementos finitos simples como o hexaédro, por exemplo. Além disso, a integração numérica das matrizes em nível de elemento utilizando quadratura completa tem sido substituída pela integração reduzida, onde estas matrizes são avaliadas analiticamente. No entanto, cuidados especiais devem ser tomados com respeito a problemas de travamento volumétrico em materiais incompressíveis ou aproximadamente incompressíveis e problemas de travamento por cisalhamento em estruturas finas sujeitas à flexão, além de evitar o surgimento de modos espúrios. No modelo utilizado neste trabalho, emprega-se o Método dos Elementos Finitos (MEF) para a discretização espacial conjuntamente ao Princípio dos Resíduos Ponderados de Bubnov-Galerkin, usando o elemento hexaédrico isoparamétrico trilinear e integração analítica. Na discretização temporal usa-se o método implícito de Newmark. O travamento de cisalhamento é evitado desenvolvendo-se o tensor taxa de deformação em um sistema co-rotacional e removendo-se certas componentes de deformação de cisalhamento. O travamento volumétrico é solucionado avaliando-se a parte esférica da matriz gradiente no ponto central do elemento. Ao final, são apresentados alguns exemplos com o objetivo de demonstrar a aplicabilidade do modelo para diferentes tipos estruturais.

1 INTRODUÇÃO

O uso de modelos numéricos para a análise dinâmica de estruturas utilizando o Método dos Elementos Finitos tem uma larga tradição na Mecânica dos Sólidos. Ao desenvolverem-se a partir da aplicação do método às diferentes teorias estruturais existentes para a determinação do equilíbrio de um corpo sólido (teoria de placas, cascas, vigas, etc.), os tipos de elementos criados segundo as teorias correspondentes conferem aos os códigos atuais a capacidade de analisar um grande número de problemas com alto nível de precisão, sendo, porém, de uma forma restrita. Mais recentemente, a partir de uma melhor compreensão dos mecanismos que regem o comportamento de fenômenos de instabilidade como os travamentos volumétrico e de corte e a excitação de modos espúrios, técnicas de estabilização foram desenvolvidas com o objetivo de produzir elementos mais rápidos, mais confiáveis e de grande aplicabilidade.

Uma das áreas de aplicação mais recentes para os códigos numéricos de análise dinâmica de estruturas está na criação de algoritmos para a simulação de fenômenos de interação fluido-estrutura (ver, por exemplo, Stein et al., 2001¹), onde problemas tridimensionais de grande porte, transientes e com alta não linearidade são observados. Neste caso, o uso de elementos eficientes é fundamental para a obtenção de um código rápido. Além disso, um elemento de aplicação geral é importante, pois possibilita a análise de diferentes estruturas com o mesmo código e uma maior facilidade no processo de acoplamento, onde pode-se então usar o mesmo elemento tanto para a estrutura como para o fluido.

Algoritmos modernos têm usado, atualmente, o recurso da integração numérica por quadratura de Gauss com um único ponto de integração, obtendo assim um processo analítico de integração. Em problemas tridimensionais, principalmente não lineares, este artifício reduz enormemente o esforço computacional. No entanto, pode ocorrer o surgimento de modos espúrios se uma técnica de estabilização eficiente não for empregada no elemento (Oñate, 1995²). Portanto, para adotar a quadratura mínima, deve-se recorrer a um procedimento de estabilização, que é feito sobre a matriz de rigidez e os vetores de força interna dos elementos, para evitar o desenvolvimento de mecanismos associados a modos de deformação nula (modos espúrios).

Quando emprega-se o MEF na discretização de materiais incompressíveis ou proximamente incompressíveis, pode ocorrer o surgimento de uma anomalia de origem numérica denominada de travamento volumétrico. Ela ocorre em problemas onde há um conflito entre o estado de deformações provocado por uma determinada carga e a invariância de volume, dada pela incompressibilidade, para determinados elementos da malha, propagando o travamento por todo o domínio. O procedimento mais eficaz para aliviar esta instabilidade consiste no uso de integração seletiva ou, ainda, reduzida (Hu e Nagy, 1997³).

Em problemas de placas e cascas submetidas à flexão pode ocorrer o travamento de corte quando se emprega elementos de baixa ordem. Isto se deve ao fato de que a taxa de cisalhamento será diferente de zero nestes elementos quando se utiliza o campo de deformações de cisalhamento completo (Zu e Cescotto, 1996⁴). O travamento por cisalhamento pode ser eliminado por meio de uma sub-avaliação das componentes de corte do campo de deformações (Liu et al, 1998⁵).

Neste trabalho, emprega-se um modelo numérico para a análise dinâmica não linear

geométrica de estruturas, semelhante ao usado por Duarte Filho e Awruch (2004)⁶. Neste modelo, o travamento volumétrico é eliminado através de uma integração reduzida seletiva da matriz gradiente. O travamento de corte é evitado ao descrever o tensor taxa de deformação em um sistema de coordenadas corotacional e uma sub-avaliação das componentes de cisalhamento do tensor de deformação. O método implícito de Newmark é utilizado na discretização da equação de equilíbrio dinâmico. O Método dos Elementos Finitos é aplicado conjuntamente ao Princípio dos Resíduos Ponderados de Bubnov-Galerkin utilizando o elemento hexaédrico isoparamétrico trilinear com integração analítica das matrizes de elemento. Ao final, são apresentados alguns exemplos com o objetivo de demonstrar a aplicabilidade do modelo para diferentes tipos estruturais.

2 O PRINCÍPIO DOS TRABALHOS VIRTUAIS

O Princípio dos Trabalhos Virtuais é descrito no contexto do Método dos Elementos Finitos da seguinte forma (Belytschko et al., 2000⁷):

$$\int_{V_e} \delta \mathbf{u}^t \rho \ddot{\mathbf{u}} dV + \int_{V_e} \delta \mathbf{u}^t \varphi \dot{\mathbf{u}} dV + \delta \mathbf{W}_e^{\text{int}} = \int_{V_e} \delta \mathbf{u}^t \mathbf{b} dV + \int_{S_e} \delta \mathbf{u}^t \bar{\mathbf{p}} dS \quad (1)$$

onde ρ é a massa específica, φ é o coeficiente de amortecimento, $\delta \mathbf{u}$ é o vetor de deslocamentos virtuais, \mathbf{u} é o vetor de deslocamentos, $\dot{\mathbf{u}}$ é o vetor de velocidades, $\ddot{\mathbf{u}}$ é o vetor de acelerações, \mathbf{b} é o vetor de forças de corpo, $\bar{\mathbf{p}}$ é o vetor de forças de superfície aplicadas sobre S_e e $\delta \mathbf{W}_e^{\text{int}}$ é o vetor que representa o trabalho gerado pelas forças internas virtuais, o qual é expresso por:

$$\delta \mathbf{W}_e^{\text{int}} = \int_{V_e} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^t \boldsymbol{\sigma} dV \quad (2)$$

onde $\boldsymbol{\sigma}$ é o vetor de tensões e $\delta \boldsymbol{\varepsilon}$ é o vetor de deformações virtuais. Todas as grandezas definidas acima referem-se a um elemento genérico e .

As aproximações em elementos finitos para os vetores de deslocamentos, velocidades e acelerações são dadas de acordo com as seguintes expressões:

$$\mathbf{u} = \mathbf{N} \mathbf{U}_{(e)} \quad ; \quad \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{N} \dot{\mathbf{U}}_{(e)} \quad ; \quad \ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{N} \ddot{\mathbf{U}}_{(e)} \quad ; \quad \delta \mathbf{u} = \mathbf{N} \delta \mathbf{U}_{(e)} \quad (3)$$

sendo $\mathbf{U}_{(e)}$, $\dot{\mathbf{U}}_{(e)}$, $\ddot{\mathbf{U}}_{(e)}$ e $\delta \mathbf{U}_{(e)}$ os valores nodais de \mathbf{u} , $\dot{\mathbf{u}}$, $\ddot{\mathbf{u}}$ e $\delta \mathbf{u}$, respectivamente, relativos ao elemento e . Os vetores contêm as funções de interpolação do elemento hexaédrico isoparamétrico trilinear.

O vetor de deformações pode ser aproximado em termos do vetor de deslocamentos nodais em nível de elemento como segue:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \bar{\mathbf{B}} \mathbf{U}_{(e)} \quad (4)$$

sendo $\bar{\mathbf{B}}$ a matriz gradiente.

A relação entre tensões e deformações é dada pela equação constitutiva para materiais elásticos, expressa por:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon} \quad (5)$$

onde \mathbf{C} é matriz constitutiva para materiais elásticos.

Levando em conta as equações (3) e (4), o trabalho gerado pelas forças internas virtuais pode ser re-escrito na seguinte forma:

$$\delta \mathbf{W}_e^{\text{int}} = \delta \mathbf{U}_{(e)}^t \int_{V_e} \bar{\mathbf{B}}^t \boldsymbol{\sigma} dV \quad (6)$$

A Eq. (1) pode ser finalmente expressa na sua forma matricial clássica, a qual é também conhecida como equação de equilíbrio dinâmico:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{P} \quad (7)$$

sendo:

$$\mathbf{M} = \int_{V_e} \rho \mathbf{N}^t \mathbf{N} dV \quad ; \quad \mathbf{D} = \int_{V_e} \phi \mathbf{N}^t \mathbf{N} dV \quad ; \quad \mathbf{K} = \int_{V_e} \bar{\mathbf{B}}^t \mathbf{C} \bar{\mathbf{B}} dV \quad ; \quad \mathbf{P} = \int_{V_e} \mathbf{N}^t \mathbf{b} dV + \int_{V_e} \mathbf{N}^t \bar{\mathbf{p}} dV \quad (8)$$

onde \mathbf{M} , \mathbf{D} e \mathbf{K} são as matrizes de massa, amortecimento e rigidez, respectivamente. \mathbf{P} é o vetor de forças externas.

3 A TÉCNICA DE INTEGRAÇÃO REDUZIDA E O PROCESSO DE ESTABILIZAÇÃO DO ELEMENTO

Considerando o elemento hexaédrico isoparamétrico trilinear, as coordenadas no espaço e as componentes do vetor de deslocamentos são dadas pelas seguintes expressões:

$$x_i = \sum_{a=1}^8 N^a x_i^a \quad (i=1,2,3) \quad ; \quad u_i = \sum_{a=1}^8 N^a u_i^a \quad (i=1,2,3) \quad (9)$$

com as funções de forma dadas por:

$$N^a(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{8}(1 + \xi_a \xi)(1 + \eta_a \eta)(1 + \zeta_a \zeta) \quad (10)$$

onde ξ_a , η_a e ζ_a são as coordenadas naturais do nó a de um elemento qualquer.

Na técnica de integração reduzida apenas um ponto é usado no processo de integração numérica, de tal forma que as funções de interpolação e suas derivadas são avaliadas no centro do elemento ($\xi = \eta = \zeta = 0$). Para evitar o surgimento de travamento volumétrico, utiliza-se uma integração reduzida seletiva da matriz gradiente $\bar{\mathbf{B}}$, conforme a proposição de

Hughes (1980)⁸. A matriz $\bar{\mathbf{B}}$ é, então, decomposta da seguinte forma:

$$\bar{\mathbf{B}}(\xi, \eta, \zeta) = \tilde{\mathbf{B}}(0) + \hat{\mathbf{B}}(\xi, \eta, \zeta) \quad (11)$$

onde $\tilde{\mathbf{B}}(0)$ e $\hat{\mathbf{B}}(\xi, \eta, \zeta)$ são as parcelas da matriz gradiente correspondentes às partes volumétrica, avaliada no centro do elemento, e desviadora, respectivamente, do vetor de deformações.

Além disso, $\hat{\mathbf{B}}(\xi, \eta, \zeta)$ deve ser expandida em séries de Taylor, no centro do elemento, até os termos bilineares. Conseqüentemente, a Eq. (11) passa a ser escrita na seguinte forma:

$$\bar{\mathbf{B}}(\xi, \eta, \zeta) = \mathbf{B}(0) + \hat{\mathbf{B}}_{,\xi}(0)\xi + \hat{\mathbf{B}}_{,\eta}(0)\eta + \hat{\mathbf{B}}_{,\zeta}(0)\zeta + 2\hat{\mathbf{B}}_{,\xi\eta}(0)\xi\eta + 2\hat{\mathbf{B}}_{,\eta\zeta}(0)\eta\zeta + 2\hat{\mathbf{B}}_{,\xi\zeta}(0)\xi\zeta \quad (12)$$

onde $\mathbf{B}(0) = \tilde{\mathbf{B}}(0) + \hat{\mathbf{B}}(0)$ é a contribuição das partes volumétrica e desviadora da matriz gradiente obtidas por integração reduzida.

O vetor de tensões é também expandido em séries de Taylor da mesma maneira feita acima, obtendo-se:

$$\boldsymbol{\sigma}(\xi, \eta, \zeta) = \boldsymbol{\sigma}(0) + \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{,\xi}(0)\xi + \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{,\eta}(0)\eta + \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{,\zeta}(0)\zeta + 2\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{,\xi\eta}(0)\xi\eta + 2\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{,\eta\zeta}(0)\eta\zeta + 2\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{,\xi\zeta}(0)\xi\zeta \quad (13)$$

Substituindo as equações (12) e (13) na Eq. (6), considerando-se ainda a decomposição dada pela Eq. (11), a seguinte expressão para o trabalho interno virtual, em nível de elemento, é obtida:

$$\delta \mathbf{W}_e^{\text{int}} = \delta \mathbf{U}_{(e)}^t \left[\mathbf{B}^t(0)\boldsymbol{\sigma}(0) + \frac{1}{3}\hat{\mathbf{B}}_{,\xi}^t(0)\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{,\xi}(0) + \frac{1}{3}\hat{\mathbf{B}}_{,\eta}^t(0)\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{,\eta}(0) + \frac{1}{3}\hat{\mathbf{B}}_{,\zeta}^t(0)\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{,\zeta}(0) + \frac{1}{9}\hat{\mathbf{B}}_{,\xi\eta}^t(0)\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{,\xi\eta}(0) + \frac{1}{9}\hat{\mathbf{B}}_{,\eta\zeta}^t(0)\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{,\eta\zeta}(0) + \frac{1}{9}\hat{\mathbf{B}}_{,\xi\zeta}^t(0)\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{,\xi\zeta}(0) \right] V_{(e)} \quad (14)$$

sendo $V_{(e)}$ o volume do elemento e .

O vetor de forças internas, em nível de elemento, pode ser expresso pela seguinte expressão:

$$\mathbf{f}^{\text{int}} = \mathbf{f}^e + \mathbf{f}^{\text{hg}} = (\mathbf{K}^e + \mathbf{K}^{\text{stab}}) = \mathbf{K}\mathbf{U} \quad (15)$$

onde:

$$\mathbf{f}^e = \mathbf{B}^t(0)\boldsymbol{\sigma}(0)V_e \left[\mathbf{B}^t(0)\mathbf{C}\mathbf{B}(0)V_e \right] \mathbf{U} = \mathbf{K}^e \mathbf{U} \quad (16)$$

$$\mathbf{f}^{\text{hg}} = \mathbf{K}^{\text{stab}} \mathbf{U} = \left[\frac{1}{3}\hat{\mathbf{B}}_{,\xi}^t(0)\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{,\xi}(0) + \frac{1}{3}\hat{\mathbf{B}}_{,\eta}^t(0)\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{,\eta}(0) + \frac{1}{3}\hat{\mathbf{B}}_{,\zeta}^t(0)\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{,\zeta}(0) + \frac{1}{9}\hat{\mathbf{B}}_{,\xi\eta}^t(0)\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{,\xi\eta}(0) + \frac{1}{9}\hat{\mathbf{B}}_{,\eta\zeta}^t(0)\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{,\eta\zeta}(0) + \frac{1}{9}\hat{\mathbf{B}}_{,\xi\zeta}^t(0)\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{,\xi\zeta}(0) \right] V_{(e)} \quad (17)$$

sendo que a Eq. (16) refere-se à parcela do vetor de forças internas, obtido por integração

reduzida, e a Eq. (17) corresponde à parcela do vetor de forças internas referente ao controle de modos espúrios.

As relações constitutivas para as derivadas primeira e segunda do vetor de tensões, dadas na Eq. (17), são obtidas a partir de:

$$\hat{\sigma}_{,\xi} = \mathbf{E} \hat{\epsilon}_{,\xi} ; \hat{\sigma}_{,\eta} = \mathbf{E} \hat{\epsilon}_{,\eta} ; \hat{\sigma}_{,\zeta} = \mathbf{E} \hat{\epsilon}_{,\zeta} ; \hat{\sigma}_{,\xi\eta} = \mathbf{E} \hat{\epsilon}_{,\xi\eta} ; \hat{\sigma}_{,\eta\zeta} = \mathbf{E} \hat{\epsilon}_{,\eta\zeta} ; \hat{\sigma}_{,\xi\zeta} = \mathbf{E} \hat{\epsilon}_{,\xi\zeta} \quad (18)$$

onde \mathbf{E} é a matriz de estabilização, proposta por Hu e Nagy (1997)³, dada por:

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{e}} & \underline{\mathbf{0}} \\ \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{e}} \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{e} = \begin{bmatrix} 2\mu & 0 & 0 \\ 0 & 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & 2\mu \end{bmatrix} \quad (19)$$

sendo μ a constante de Lamé.

Com o objetivo de remover o travamento por cisalhamento, as componentes de corte do vetor de deformações devem ser descritas em um sistema de referência corotacional ortogonal. Além disso, cada uma das componentes de corte do vetor de deformações são interpoladas linearmente em uma única direção do sistema de referência. Em consequência disso, tem-se que:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{B}}_{xy,\xi}(0) &= \hat{\mathbf{B}}_{xy,\eta}(0) = \hat{\mathbf{B}}_{xy,\xi\eta}(0) = \hat{\mathbf{B}}_{xy,\eta\zeta}(0) = \hat{\mathbf{B}}_{xy,\xi\zeta}(0) = 0 \\ \hat{\mathbf{B}}_{yz,\eta}(0) &= \hat{\mathbf{B}}_{yz,\zeta}(0) = \hat{\mathbf{B}}_{yz,\xi\eta}(0) = \hat{\mathbf{B}}_{yz,\eta\zeta}(0) = \hat{\mathbf{B}}_{yz,\xi\zeta}(0) = 0 \\ \hat{\mathbf{B}}_{xz,\xi}(0) &= \hat{\mathbf{B}}_{xz,\zeta}(0) = \hat{\mathbf{B}}_{xz,\xi\eta}(0) = \hat{\mathbf{B}}_{xz,\eta\zeta}(0) = \hat{\mathbf{B}}_{xz,\xi\zeta}(0) = 0 \end{aligned} \quad (20)$$

Uma vez que emprega-se a técnica de integração reduzida, o vetor de forças internas não será adequadamente avaliado quando o elemento estiver distorcido. Para corrigir esta deficiência, a matriz gradiente obtida por integração reduzida, $\mathbf{B}(0)$, deve ser substituída por uma matriz gradiente uniforme, $\mathbf{B}'(0)$, definida por Flanagan e Belytschko (1983)⁹ como sendo:

$$\mathbf{B}'_a(0) = \frac{1}{V_e} \int_{V_e} \mathbf{B}_a(\xi, \eta, \zeta) dV \quad (a = 1, \dots, 8) \quad (21)$$

onde a corresponde ao número de nó local do elemento e .

4 ANÁLISE NÃO LINEAR GEOMÉTRICA USANDO O SISTEMA DE REFERÊNCIA COROTACIONAL

Para evitar o travamento por cisalhamento, é necessário também empregar um sistema de coordenadas corotacional para a descrição geométrica, onde o sistema de referência está vinculado ao sistema de referência local do elemento finito.

O movimento de um meio contínuo pode ser decomposto em um movimento de corpo rígido seguido por uma deformação pura. Uma vez que a discretização espacial do domínio é

suficientemente refinada, esta decomposição pode ser feita em nível de elemento e, conseqüentemente, no sistema de referência corotacional, onde a parcela de deformação pura será sempre uma quantidade pequena relativa às dimensões do elemento.

Para calcular as atualizações dos vetores de tensão e deformação é necessário avaliar a parte do campo de deslocamentos referente à deformação no sistema corotacional. O campo de deslocamentos, em uma forma incremental, pode ser separado em uma parte relativa à deformação pura e em uma parte referente à rotação pura, como feito na decomposição polar:

$$\Delta \mathbf{u} = \Delta \mathbf{u}^{\text{def}} + \Delta \mathbf{u}^{\text{rot}} \quad (22)$$

onde $\Delta \mathbf{u}^{\text{def}}$ e $\Delta \mathbf{u}^{\text{rot}}$ são vetores de incremento de deslocamentos representando as contribuições devido à rotação pura e à deformação pura ao campo de deslocamentos incrementais no sistema de coordenadas global, respectivamente. O incremento de deslocamentos devido à deformação pura pode ser obtido a partir da seguinte expressão:

$$\Delta \mathbf{u}^{\text{rot}} = \Delta \mathbf{u} - \mathbf{R}_{n+1/2}^t (\hat{\mathbf{x}}_{n+1} - \hat{\mathbf{x}}_n) \quad (23)$$

sendo $\mathbf{R}_{n+1/2}^t$ a transposta da matriz de transformação ortogonal $\mathbf{R}_{n+1/2}$, a qual rotaciona o sistema de referência de global para corotacional. Esta matriz refere-se ao ponto médio no intervalo de tempo $[t_n, t_{n+1}]$ e é definida a partir da configuração geométrica neste ponto. $\hat{\mathbf{x}}_n$ e $\hat{\mathbf{x}}_{n+1}$ são, respectivamente, as configurações geométricas em $t = t_n$ e $t = t_{n+1}$, definidas no sistema de coordenadas corotacional e obtidas a partir das seguintes transformações:

$$\hat{\mathbf{x}}_n = \mathbf{R}_n \mathbf{x}_n \quad ; \quad \hat{\mathbf{x}}_{n+1} = \mathbf{R}_{n+1} \mathbf{x}_{n+1} \quad (24)$$

onde \mathbf{R}_n e \mathbf{R}_{n+1} são as matrizes de transformação definidas em $t = t_n$ e $t = t_{n+1}$, respectivamente. \mathbf{x}_n e \mathbf{x}_{n+1} são as configurações geométricas em $t = t_n$ e $t = t_{n+1}$, definidas no sistema de coordenadas global, respectivamente. O incremento de deslocamentos devido à deformação, no sistema corotacional, é finalmente obtido pela seguinte expressão:

$$\Delta \hat{\mathbf{u}}^{\text{def}} = \mathbf{R}_{n+1/2} \Delta \mathbf{u}^{\text{def}} = \hat{\mathbf{x}}_{n+1} - \hat{\mathbf{x}}_n \quad (25)$$

As componentes da matriz de transformação são dadas a partir das expressões abaixo:

$$\mathbf{R}_{1j} = \frac{\mathbf{r}_{1j}}{\mathbf{r}_1^t \mathbf{r}_1} \quad ; \quad \mathbf{R}_{2j} = \frac{(\mathbf{r}_{2j} + \mathbf{r}_{cj})}{(\mathbf{r}_{2j} + \mathbf{r}_{cj})^t (\mathbf{r}_{2j} + \mathbf{r}_{cj})} \quad ; \quad \mathbf{R}_{3j} = \frac{\mathbf{r}_{3j}}{\mathbf{r}_3^t \mathbf{r}_3} \quad (j=1,2,3) \quad (26)$$

com:

$$\mathbf{r}_{1j} = \xi^t \mathbf{x}_j \quad ; \quad \mathbf{r}_{2j} = \eta^t \mathbf{x}_j \quad ; \quad \mathbf{r}_{cj} = -\frac{\mathbf{r}_{1j}^t \mathbf{r}_{2j}}{\mathbf{r}_{1j}^t \mathbf{r}_{1j}} \mathbf{r}_{1j} \quad ; \quad \mathbf{r}_{3j} = \mathbf{r}_{1j} \times (\mathbf{r}_{2j} + \mathbf{r}_{cj}) \quad (27)$$

sendo \mathbf{x}_j o vetor de coordenadas globais dos nós de um elemento qualquer.

O incremento de deformações é dado pela integração, no ponto intermediário $n + 1/2$, do tensor taxa de deformação, obtendo-se:

$$\Delta \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \Delta \hat{\mathbf{u}}^{\text{def}}}{\partial \hat{\mathbf{x}}_{n+1/2}} + \left(\frac{\partial \Delta \hat{\mathbf{u}}^{\text{def}}}{\partial \hat{\mathbf{x}}_{n+1/2}} \right)^t \right] \quad (28)$$

Embora o tensor de tensões de Cauchy corotacional seja um tensor objetivo, a sua medida de taxa de tensões não é objetivo. Por isso, emprega-se, neste trabalho, a taxa de Truesdell, dada por:

$$\Delta \sigma_{ij} = \left(C_{ijkl} + \hat{C}_{ijkl} \right) \Delta \varepsilon_{kl} + W_{ijkl} \Delta \omega_{kl} \quad (i, j, k, l = 1, 2, 3) \quad (29)$$

onde:

$$\hat{C}_{ijkl} = -\sigma_{ij} \delta_{kl} + \frac{1}{2} \left(\sigma_{il} \delta_{jk} + \sigma_{jl} \delta_{ik} + \sigma_{ik} \delta_{jl} + \sigma_{jk} \delta_{il} \right) \quad (30)$$

e:

$$W_{ijkl} = \frac{1}{2} \left(\sigma_{il} \delta_{jk} + \sigma_{jl} \delta_{ik} - \sigma_{ik} \delta_{jl} - \sigma_{jk} \delta_{il} \right) \quad (31)$$

5 ALGORITMO DE ANÁLISE USANDO O MÉTODO IMPLÍCITO DE NEWMARK

A equação de equilíbrio dinâmico, Eq. 7, pode ser apresentada na sua forma incremental da seguinte maneira:

$$\mathbf{M} \Delta \ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{D} \Delta \dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}^t \Delta \mathbf{U} = \mathbf{P}^{t+\Delta t} - \left[\mathbf{M} \ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{D} \dot{\mathbf{U}} + \mathbf{f}^{\text{int}}(\mathbf{U}) \right]^t \quad (32)$$

onde todos os termos já foram previamente definidos na seção 2. O método implícito de Newmark é aplicado na discretização temporal da Eq. (32). Informações adicionais sobre o método podem ser encontrados em Bathe (1996)¹⁰.

O algoritmo empregado para a análise dinâmica não linear, usando o método implícito de Newmark, pode ser resumido nos passos apresentados abaixo:

1. Resolver $\Delta \mathbf{U} = \left[\bar{\mathbf{K}}^{-1} \right]^t \bar{\mathbf{P}}^{t+\Delta t}$, sendo $\bar{\mathbf{K}}^t = \mathbf{K}^t + a_0 \mathbf{M} + a_1 \mathbf{C}$ e $\bar{\mathbf{P}}^{t+\Delta t} = \mathbf{P}^{t+\Delta t} - \left[\mathbf{M} \ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{D} \dot{\mathbf{U}} + \mathbf{f}^{\text{int}}(\mathbf{U}) \right]^t + \mathbf{M}(a_2 \dot{\mathbf{U}} + a_3 \ddot{\mathbf{U}})^t + \mathbf{D}(a_4 \dot{\mathbf{U}} + a_5 \ddot{\mathbf{U}})^t$
2. Atualizar os vetores de deslocamento, velocidade e aceleração.
3. Determinar o vetor de carga residual $\mathbf{Q}^{t+\Delta t} = \mathbf{P}^{t+\Delta t} - \left[\mathbf{M} \ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{D} \dot{\mathbf{U}} + \mathbf{f}^{\text{int}}(\mathbf{U}) \right]^{t+\Delta t}$
4. Checar a convergência: se $\left\| \mathbf{Q}^{t+\Delta t} \right\| / \left\| \mathbf{P}^{t+\Delta t} \right\| \leq \text{TOL}$ segue para o próximo passo de tempo (1), caso contrário segue para (5).
5. Calcular $\delta \mathbf{U} = \left[\bar{\mathbf{K}}^{-1} \right]^t \mathbf{Q}^{t+\Delta t}$
6. Atualizar os vetores de deslocamento, velocidade e aceleração usando (5).
7. Determinar o vetor de carga residual (3) com os novos campos.

8. Checar a convergência: se $\|\mathbf{Q}^{t+\Delta t}\|/\|\mathbf{P}^{t+\Delta t}\| \leq \text{TOL}$ segue para o próximo passo de tempo (1), caso contrário segue para (5).

Nas expressões acima, a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 e a_5 são constantes do método de Newmark, sendo obtidos a partir dos parâmetros α e δ , que assumem, neste trabalho, os seguintes valores: $\alpha = 0.25$ e $\delta = 0.5$. TOL representa um critério de tolerância.

6 EXEMPLOS NUMÉRICOS

Nesta seção são apresentados alguns exemplos numéricos mostrando a capacidade da formulação proposta para a análise dinâmica de estruturas com não linearidade geométrica. Diferentes tipos estruturais são abordados, sendo os resultados apresentados nas sub-seções a seguir.

6.1 Análise de viga e arco bi-engastados

As configurações geométricas utilizadas nas análises são apresentadas na Fig. 1. Como pode ser observado, trata-se de uma viga engastada em ambos os extremos com uma carga concentrada constante em seu ponto central, aplicada de forma impulsiva, sendo $P = 640$ N. A viga é discretizada usando $20 \times 4 \times 1$ elementos, segundo as direções x_1, x_2 e x_3 , respectivamente. O arco é também vinculado em ambos os extremos por engastes, sendo aplicada uma carga concentrada constante de forma impulsiva, onde $P = 7500$ N. As propriedades físicas e os valores de incremento de tempo empregados nas análises são dados na Tab. 1. Condições de contorno de simetria são aplicadas na direção normal do plano $x_1 - x_2$.

Tabela 1. Propriedades físicas para as análises de viga e arco

Constante	Exemplo	
	Viga	Arco
Módulo de Elasticidade – E [N/m ²]	3×10^8	1×10^7
Coefficiente de Poisson – ν	0.0	0.25
Massa Específica – ρ [Kg/m ³]	2.54×10^{-4}	2.54×10^{-4}
Coefficiente de Amortecimento – ϕ	0.0	0.0
Passo de Tempo – Δt [s]	2.5×10^{-5}	1×10^{-4}

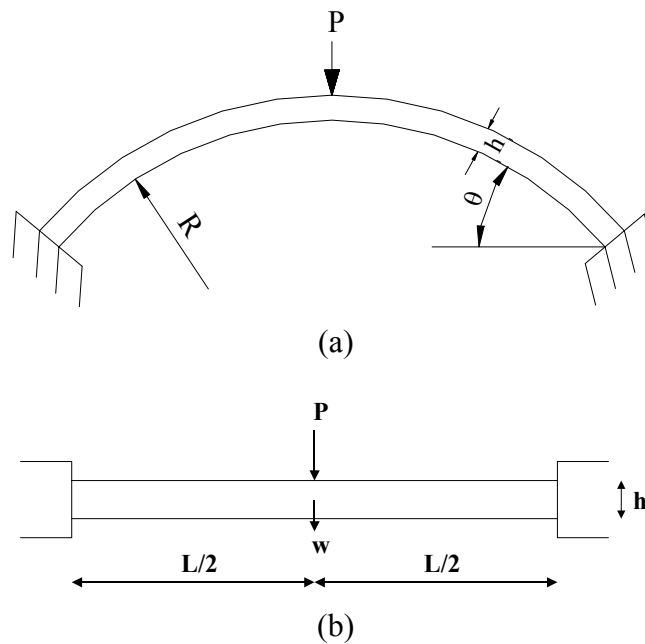


Figura 1. Características geométricas das análises; (a) arco bi-engastado: $R = 100$ m, $h = 2$ m, $\theta = 0.707$ rad e $P = 7500$; (b) viga bi-engastada: $L = 20$ m, $h = 0.125$ m e $P = 640$.

Na Fig. 2 são apresentados os resultados obtidos nas análises em termos dos deslocamentos obtidos ao longo do tempo, os quais são medidos nos respectivos pontos de aplicação e na direção das cargas. Os resultados aqui obtidos são comparados com os trabalhos de Mondkar e Powell (1977)¹¹, no caso da viga, e com Liao e Reddy (1987)¹², no caso do arco. Como pode-se verificar, há uma boa concordância entre os resultados.

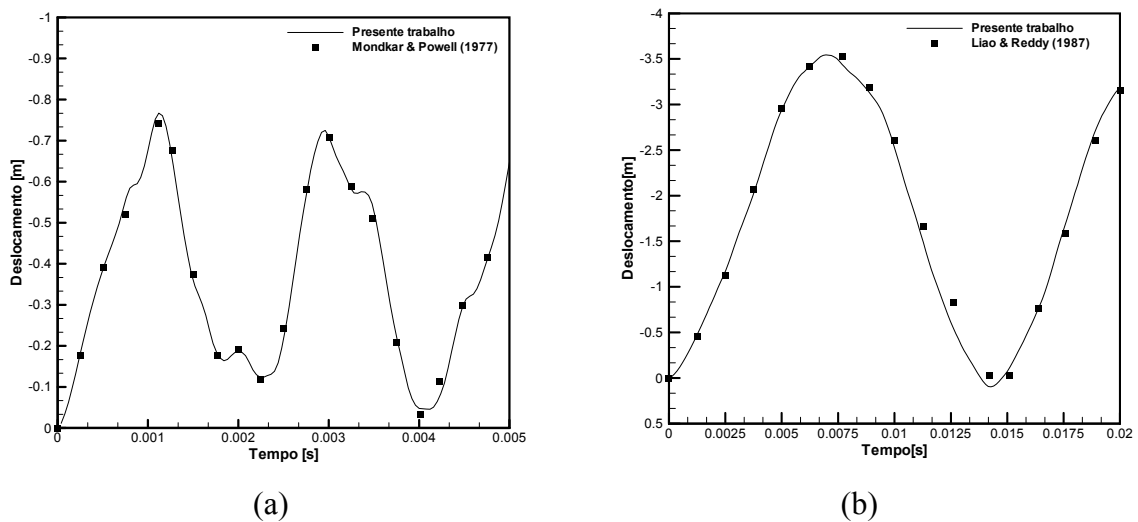


Figura 2. Históricos de deslocamentos: (a) viga e (b) arco.

Na Fig. 3 são mostradas as configurações geométricas deformadas em diferentes instantes de tempo para as duas análises realizadas, onde pode-se observar nitidamente os efeitos da não linearidade geométrica.

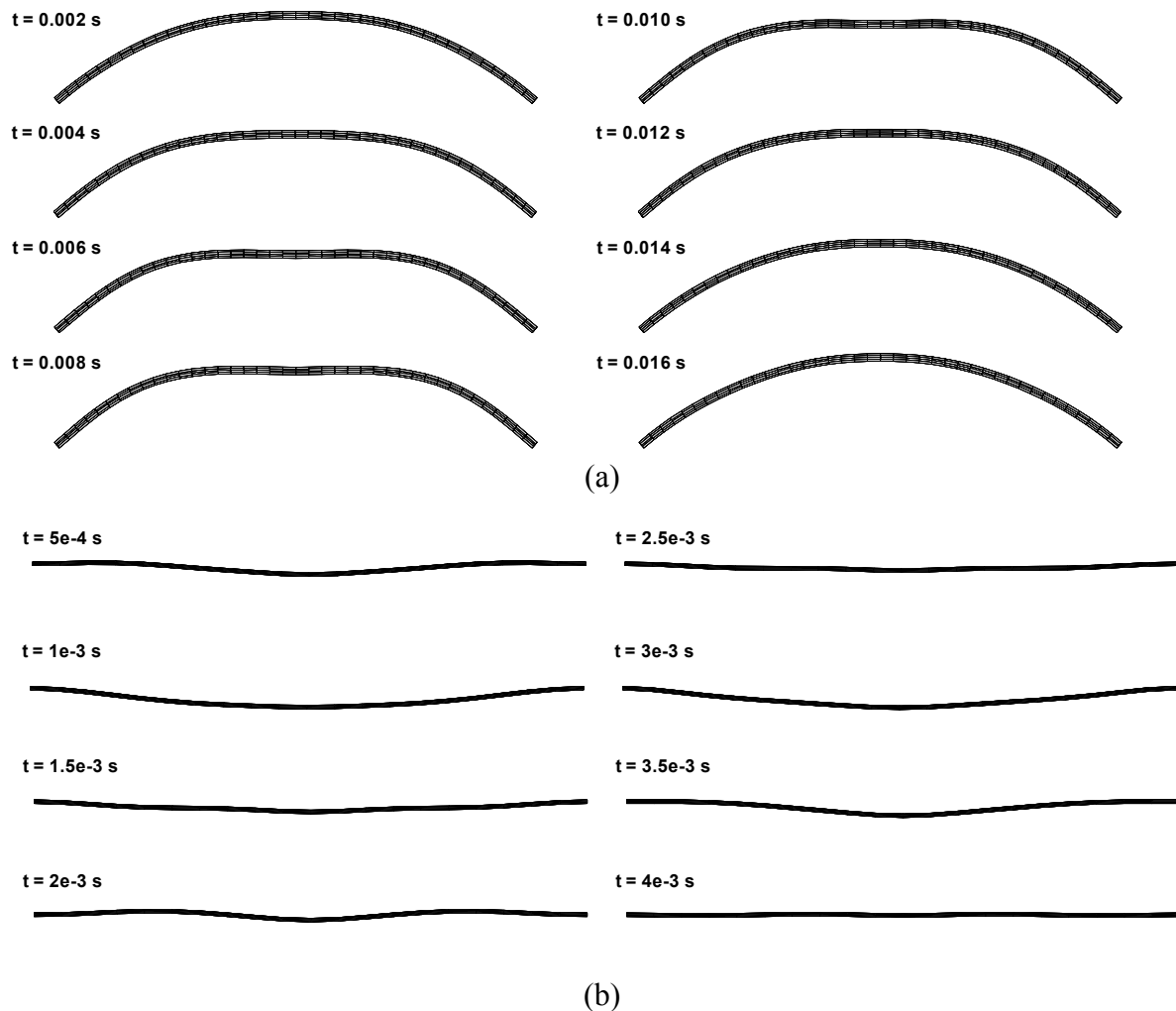


Figura 3. Configurações deformadas em diferentes instantes de tempo: (a) arco e (b) viga.

6.2 Análise de placas

Duas placas com diferentes geometrias e diferentes condições de contorno, de acordo com a Fig. 4, são estudadas. Na primeira análise, considera-se uma placa retangular com as bordas simplesmente apoiadas e submetida a uma carga concentrada aplicada no ponto central. Inicialmente, a carga é aplicada variando linearmente de zero até o seu valor máximo, $P = 178.16 \text{ N}$, em um intervalo de tempo de 0.006 s , permanecendo constante após este instante. A placa é discretizada usando $16 \times 32 \times 4$ elementos segundo as direções x_1 , x_2 e x_3 , respectivamente. No segundo exemplo estudado, tem-se uma placa quadrada simplesmente

apoiada em suas extremidades e submetida a um carregamento distribuído por toda a sua superfície no valor de $q = 10 \text{ N/cm}^2$. A carga é constante e aplicada impulsivamente. A placa é discretizada usando $16 \times 16 \times 4$ elementos segundo as direções x_1 , x_2 e x_3 , respectivamente. As propriedades físicas e os valores de incremento de tempo utilizados nestas análises encontram-se na Tab. 2.

Tabela 2. Propriedades físicas para as análises de placa.

Constante	Exemplo	
	Placa Retangular	Placa Quadrada
Módulo de Elasticidade – E	$2.095 \times 10^8 \text{ [N/m}^2\text{]}$	$2.1 \times 10^6 \text{ [N/cm}^2\text{]}$
Coefficiente de Poisson – ν	0.25	0.25
Massa Específica – ρ	$3.21 \times 10^3 \text{ [Kg/m}^3\text{]}$	$8.0 \times 10^{-6} \text{ [Ns/cm}^4\text{]}$
Coefficiente de Amortecimento – ϕ	0.0	0.0
Passo de Tempo – Δt [s]	1×10^{-3}	1×10^{-3}

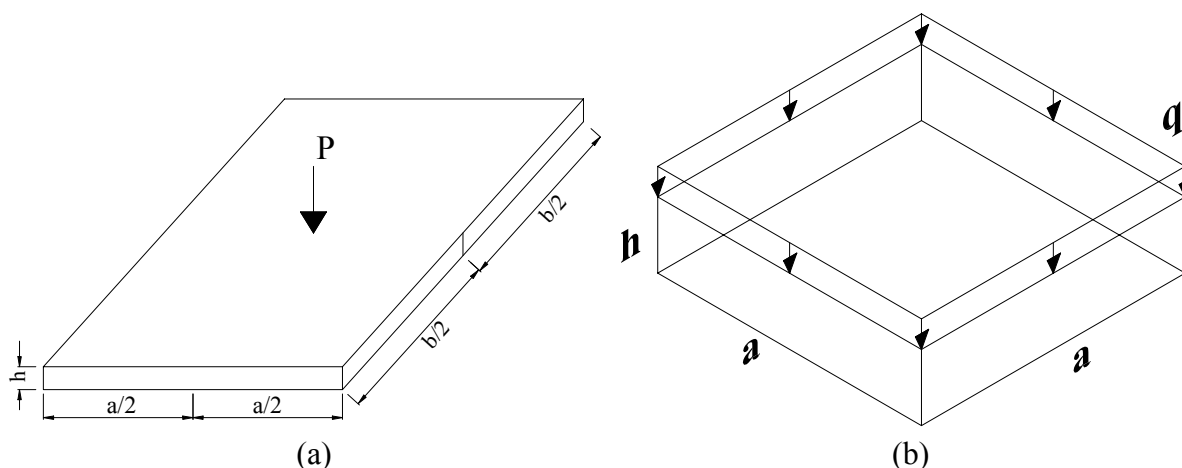


Figura 4. Configurações geométricas para as análises de placa; (a) placa retangular: $a = 1.016 \text{ m}$, $b = 1.524 \text{ m}$, $h = 0.0254 \text{ m}$ e $P = 178.16 \text{ N}$; (b) placa quadrada: $a = 25 \text{ cm}$, $h = 5 \text{ cm}$ e $q = 10 \text{ N/cm}^2$.

Os resultados obtidos em termos de deslocamentos nos respectivos pontos centrais das placas são mostrados na Fig. 5. A deflexão é medida na mesma direção de aplicação das cargas. Comparando os resultados com os trabalhos de referência de Meek e Yang (1998)¹³, para o caso da placa retangular, e de Liao e Reddy (1987)¹², para o caso da placa quadrada, verifica-se uma boa convergência entre as respostas obtidas.

Na Fig. 6 é apresentada a configuração deformada da placa retangular em um instante de deslocamento máximo da análise. Quanto à configuração deformada da placa quadrada, ela não será aqui mostrada devido ao fato de que os deslocamentos apresentados são pequenos em comparação às suas dimensões e, portanto, imperceptíveis.

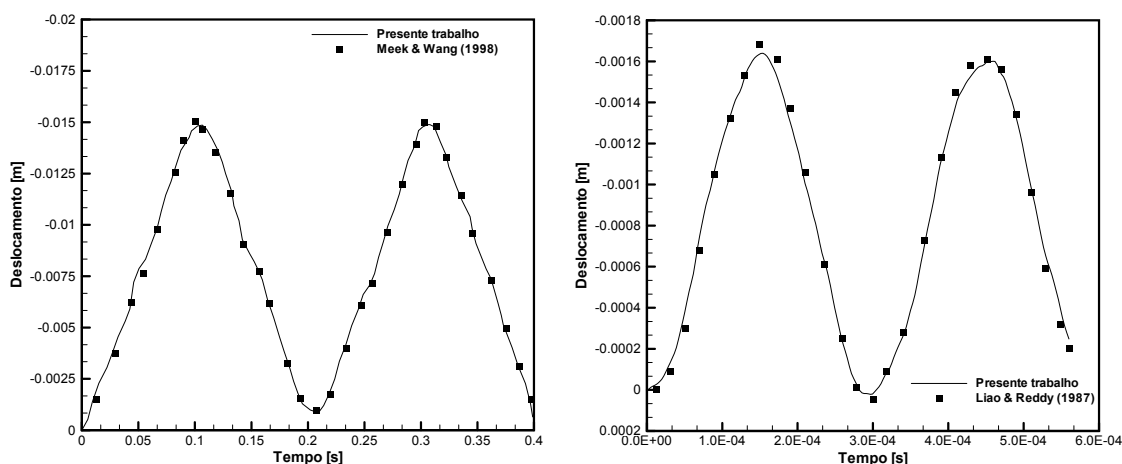


Figura 5. Históricos de deslocamentos: (a) placa retangular e (b) placa quadrada.

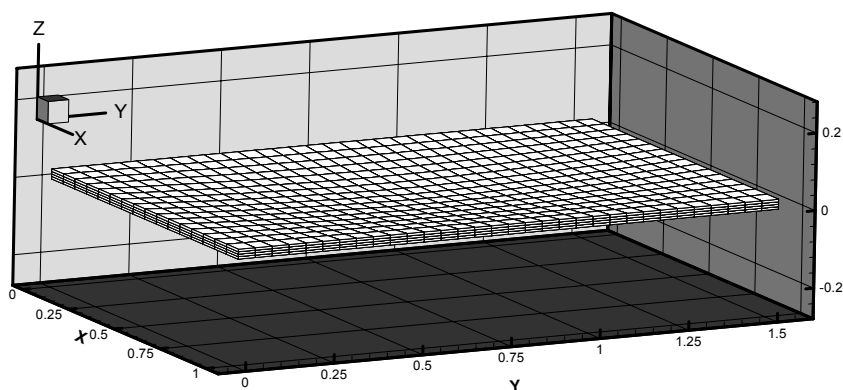


Figura 6. Configuração deformada da placa retangular.

6.3 Análise de uma casca esférica engastada com carga no ápice

Neste último exemplo estudado, é feita a análise de uma casca esférica engastada em suas bordas e submetida a uma carga concentrada e constante, aplicada de forma impulsiva em seu ápice. As características geométricas empregadas neste exemplo são apresentadas na Fig. 7. Devido à existência de simetria, apenas um quarto da casca foi modelada, apresentando o seguinte número de elementos: $35 \times 10 \times 2$, segundo as direções radial, angular e vertical, respectivamente. Condições de simetria são usadas nas bordas internas da casca e apenas um quarto da carga total, $P = 100 \text{ N}$, é aplicada. As seguintes propriedades físicas foram empregadas na análise: módulo de elasticidade, $E = 1 \times 10^7 \text{ N/m}^2$, coeficiente de Poisson, $\nu = 0.3$, coeficiente de amortecimento, $\varphi = 0.0$ e massa específica, $\rho = 2.45 \times 10^{-4}$.

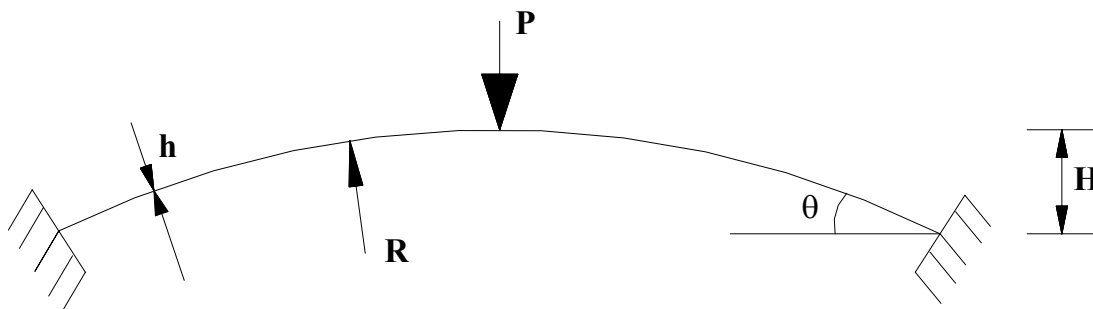


Figura 7. Configurações geométricas para a análise da casca esférica: $R = 4.76$ m, $H = 0.0859$ m, $h = 0.01576$ m, $\theta = 10.9^\circ$ e $P = 100$ N.

Os deslocamentos obtidos pela presente análise são mostrados na Fig. 8. Os resultados são medidos no ponto de aplicação da carga e comparados com o trabalho de Mondkar e Powell (1977)¹¹, observando-se uma boa concordância entre os valores apresentados. A deflexão é medida na direção de incidência da carga.

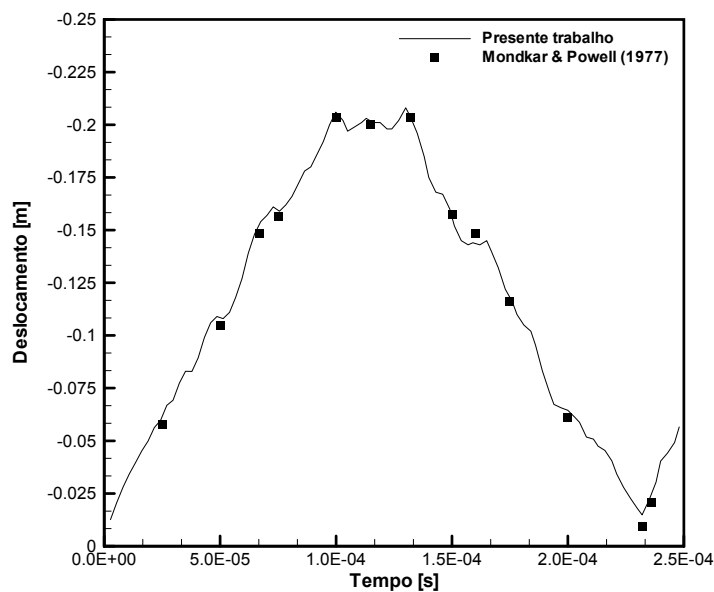


Figura 8. Histórico de deslocamentos para a análise da casca esférica.

Na Fig. 9 são mostradas algumas configurações deformadas da casca em diferentes instantes de tempo. Como pode ser observado, a placa apresenta deslocamentos significativos e um comportamento altamente não linear.

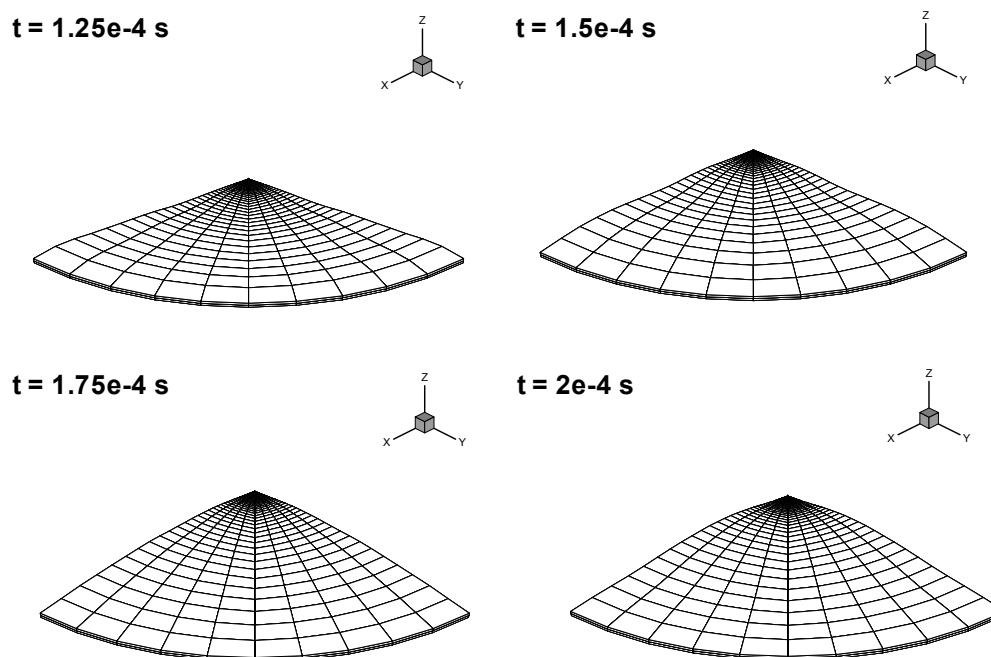


Figura 9. Configurações deformadas da casca em diferentes instantes de tempo.

7 CONCLUSÕES

Neste trabalho foi apresentado um modelo numérico para a análise dinâmica de diferentes tipos de estruturas com não linearidade geométrica. A partir de técnicas de estabilização para o elemento, é possível evitar o surgimento dos travamentos volumétrico e de cisalhamento. Além disso, através de uma técnica de controle de modos espúrios, foi mostrado também o uso de integração reduzida das matrizes em nível de elemento, reduzindo significativamente o esforço computacional, principalmente em exemplos tridimensionais. Com isso, através do modelo implementado no presente trabalho, a análise de diferentes tipos estruturais, tais como vigas, placas e cascas, pode ser empreendido com uma única formulação, como pôde ser verificado através dos resultados apresentados. No entanto, é importante ressaltar que devido ao uso de integração reduzida, a discretização espacial deve ser feita com um número maior de elementos que o usado pelas formulações usuais, a fim de representar adequadamente as distribuições de tensão.

8 REFERÊNCIAS

- [1] Stein, K.; Benney, R.; Tezduyar, T. e Potvin, J., “Fluid-structure interactions of a cross parachute: numerical simulation”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **191**, 673-687 (2001).
- [2] Oñate, E., *Cálculo de Estructuras por el Método de Elementos Finitos – Análisis Estático Lineal*, CIMNE, 2ª edição, Barcelona, (1995).
- [3] Hu, Y.K. e Nagy, L.I., “A one-point quadrature eight-node brick element with hourglass

- control”, *Computers & Structures*”, **65**, 893-902 (1997).
- [4] Zu, Y. e Cescotto, S., “Unified and mixed formulation of the 8-node hexaedral elements by assumed strain method”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **129**, 177-209 (1996).
- [5] Liu, W.K.; Guo, Y.; Tang, S. e Belytschko, T., “A multiple-quadrature eight-node hexaedral finite element for large deformation elastoplastic analysis”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **154**, 69-132 (1998).
- [6] Duarte Filho, L.A. e Awruch, A.M., “Geometrically nonlinear static and dynamic analysis of shells and plates using the eight-node hexahedral element with one-point quadrature”, *Finite Elements in Analysis and Design*, **40**, 1297-1315 (2004).
- [7] Belytschko, T.; Liu, W.K. e Moran, B., *Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures*, John Willey & Sons, West Sussex, England, (2000).
- [8] Hughes, T.J., “Generalization of selective integration procedures to anisotropic and nonlinear media”, *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, **15**, 1413-1418 (1980).
- [9] Flanagan, D.P. e Belytschko, T., “A uniform strain hexahedron and quadrilateral with orthogonal hourglass control”, *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, **17**, 679-706 (1983).
- [10] Bathe, K.J., *Finite Element Procedures*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, (1996).
- [11] Mondkar, D.P. e Powell, G.H., “Finite element analysis of nonlinear static and dynamic response”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **11**, 499-520 (1977).
- [12] Liao, C. e Reddy, J.N., *An incremental total Lagrangean formulation for general anisotropic shell-type structures*, Research Report n° VPII-E-87.22, Dept. of Engineering Science and Mechanics, Virginia Polytechnic Institute, State University, Virginia (USA), (1987).
- [13] Meek, J.L. e Wang, Y., “Nonlinear static and dynamic analysis of shell structures with finite rotation”, *Computational Methods in Applying Mechanics and Engineering*, **162**, 301-315 (1998).