

MODELO COMPUTACIONAL PARA EL ESTUDIO DE ESTRUCTURAS DE HORMIGÓN ARMADO

Giuliana F. Franca y Américo Campos Filho

*Programa de Posgraduación en Ingeniería Civil, Centro de Mecánica Aplicada y Computacional,
Universidad Federal de Rio Grande do Sul, Av. Osvaldo Aranha 99, 3° andar, 90035-190
Porto Alegre, Brasil, gfranca@ufrgs.br, americo@ufrgs.br, <http://www.ppgec.ufrgs.br/cemacom>*

Palabras clave: Hormigón Armado, Elementos Finitos, Modelos Constitutivos, Fisuración.

Resumen. Este trabajo presenta un modelo numérico para el análisis tridimensional de estructuras de hormigón armado, utilizando el método de los elementos finitos. El modelo propuesto para el hormigón es un modelo ortotrópico y utiliza el concepto de deformación uniaxial equivalente. De acuerdo con Kwon (2000), la relación tensión-deformación uniaxial equivalente es generalizada para llevar en consideración las condiciones triaxiales de tensión. Los parámetros usados en la curva tensión-deformación uniaxial equivalente son definidos a partir de la superficie de falla definida en el espacio de tensiones principales. Esta superficie es una modificación de la superficie de 5 parámetros de Willam-Warnke (1975), como fue presentado en Franca (2006). La implementación en elementos finitos considera el concepto de fisuras distribuidas rotando según las direcciones de tensiones principales. Se implementó el modelo de armadura incorporada propuesto por Elwi y Hruday (1989) para representar las barras de armadura. Finalmente, se presentan resultados comparativos con ensayos experimentales y analíticos para demostrar la validez del modelo numérico.

1 INTRODUCCIÓN

La modelaje de estructuras de hormigón armado viene siendo un desafío para muchos investigadores. Determinar precisamente la respuesta del material cuando sometido a estados multiaxiales de tensión ha sido objetivo de muchas investigaciones, considerando estudios analíticos y experimentales. Sin embargo, refinados modelos no lineales para el análisis de estructuras de concreto se pueden tornar extremadamente complicados. La complejidad para determinar la respuesta estructural es originada por diversos comportamientos característicos de este material, entre los cuales se pueden citar:

- El hormigón presenta un comportamiento tensión-deformación no lineal;
- Se forman fisuras cuando el hormigón es sometido a tensiones de tracción;
- El hormigón presenta deformaciones por fluencia y retracción a lo largo del tiempo;
- El comportamiento del hormigón es dependiente de la historia de carga;
- El hormigón presenta dilatación en las proximidades de la rotura.

En las últimas décadas, numerosos modelos constitutivos fueron desarrollados para el análisis de estructuras de hormigón armado. Las formulaciones de estos modelos algunas veces son simples y en otras bastante elaboradas. Algunos modelos tienen la capacidad de describir solamente ciertos aspectos del comportamiento del hormigón, quedando sus aplicaciones limitadas a pocas situaciones. Entre las más importantes características que un modelo computacional debe tener están:

- Representación general y precisa del real comportamiento mecánico del material;
- Clareza en las formulaciones empleadas;
- Un algoritmo robusto y al mismo tiempo estable para la determinación del comportamiento no lineal.

Siendo así, el objetivo de este trabajo es el desarrollo y implementación numérica de un eficiente modelo constitutivo para la determinación del comportamiento del hormigón armado solicitado por situaciones multiaxiales de tensiones. El modelo propuesto para el hormigón es un modelo ortotrópico que sigue la línea de investigación del modelo presentado por Kwon (2000), teniendo la capacidad de capturar la respuesta del hormigón cuando solicitado por estados multiaxiales de tensiones. Para simular el comportamiento de las barras de armadura se implementó el modelo incorporado propuesto por Elwi y Hruday (1989), modificado para el caso tridimensional. Los modelos constitutivos fueron implementados en un programa computacional que utiliza el Método de los Elementos Finitos para estructuras de hormigón armado, inicialmente desarrollado por Hinton (1988).

2 LEY CONSTITUTIVA TRIDIMENSIONAL PARA EL HORMIGÓN

De forma general el hormigón puede ser tratado como un material inicialmente isotrópico y que presenta deformaciones anisotrópicas inducidas durante el cargamento, como presentado en Darwin y Pecknold (1977), Elwi y Murray (1979), y Chen y Han (1988).

En este trabajo, la ley constitutiva tridimensional es considerada en la forma ortotrópica, con los ejes de ortotropía paralelos a los ejes de tensiones principales corrientes. Siendo así, la ecuación constitutiva es escrita con relación a los ejes de ortotropía de la siguiente manera:

$$\{\sigma\} = [C_0] \{\varepsilon\} \quad (1)$$

donde, $\{\sigma\}$ y $\{\varepsilon\}$ son los vectores de tensiones y deformaciones, respectivamente. $[C_0]$ es la matriz constitutiva del material con relación a los ejes de ortotropía (1,2,3).

La matriz constitutiva del material $[C_0]$ es presentada por la siguiente expresión:

$$[C_0] = \begin{bmatrix} E_1(1-\nu_{23}\nu_{32}) & E_1(\nu_{21}+\nu_{23}\nu_{31}) & E_1(\nu_{31}+\nu_{21}\nu_{32}) & 0 & 0 & 0 \\ E_2(\nu_{12}+\nu_{13}\nu_{32}) & E_2(1-\nu_{13}\nu_{31}) & E_2(\nu_{32}+\nu_{12}\nu_{31}) & 0 & 0 & 0 \\ E_3(\nu_{13}+\nu_{12}\nu_{23}) & E_3(\nu_{23}+\nu_{13}\nu_{21}) & E_3(1-\nu_{12}\nu_{21}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{12}\Omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{23}\Omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{31}\Omega \end{bmatrix} \quad (2)$$

donde, $\Omega = 1 - \nu_{21}\nu_{12} - \nu_{31}\nu_{13} - \nu_{32}\nu_{23} - \nu_{12}\nu_{23}\nu_{31} - \nu_{21}\nu_{32}\nu_{13}$; ν_{ij} es la relación entre las deformaciones transversales; E_i es el módulo de elasticidad secante del material en la dirección de ortotropía i (con $i = 1, 2, 3$); G_{ij} es el módulo de corte en el plano $i - j$ (con $i, j = 1, 2, 3$), siendo expresado por la siguiente ecuación:

$$G_{ij} = \frac{E_i E_j}{E_i(1+\nu_{ij}) + E_j(1+\nu_{ji})} \quad (3)$$

3 DEFORMACIÓN UNIAXIAL EQUIVALENTE

En un estado multiaxial de tensiones, la deformación específica real en una determinada dirección no es función solamente de la tensión en aquella dirección, siendo dependiente también de las tensiones actuantes en las otras direcciones ortogonales. Esto torna compleja la simulación de la respuesta tridimensional del hormigón. Para simplificar este análisis tridimensional, se puede utilizar el concepto de deformación uniaxial equivalente, inicialmente propuesto por Darwin y Pecknold (1977) para las situaciones bidimensionales.

Darwin y Pecknold (1977) consideraron este procedimiento como un artificio para desacoplar la respuesta bidimensional del hormigón en dos curvas uniaxiales, facilitando la simulación de su comportamiento. Esta técnica sirve para separar el efecto del coeficiente de Poisson de las deformaciones, permitiendo una buena aproximación con los resultados experimentales. Para comprender mejor la definición de la deformación uniaxial equivalente, se puede analizar el comportamiento de un material elástico lineal, como es ilustrado en la Figura 1. Una de las curvas representa el gráfico tensión-deformación para una situación de compresión uniaxial. La otra curva presenta la relación tensión-deformación según la dirección más comprimida, para un determinado estado de tensiones de compresión biaxial, donde $\sigma_1 = \alpha \sigma_2$.

Se observa que la curva con compresión biaxial se presenta mucho más rígida que la curva uniaxial, debido a que la compresión transversal en el material aumenta la rigidez del mismo. Para un determinado valor de tensión principal σ_i , la correspondiente deformación real ε_i , para el caso de compresión biaxial es dependiente de la relación entre las tensiones principales α , existiendo diversas curvas tensión-deformación reales para diferentes valores de α . En contrapartida, la deformación uniaxial equivalente ε_{ui} es la deformación correspondiente a la tensión principal σ_i en la curva uniaxial, existiendo una única curva para representar esta situación. Las deformaciones uniaxiales equivalentes pueden ser determinadas por:

$$\varepsilon_{ui} = \frac{\sigma_i}{E_i} \quad (4)$$

donde, σ_i es la tensión principal corriente en la dirección de ortotropía i ; E_i es el módulo de elasticidad secante en la dirección de ortotropía i , con $i = 1,2,3$ para el análisis tridimensionales.

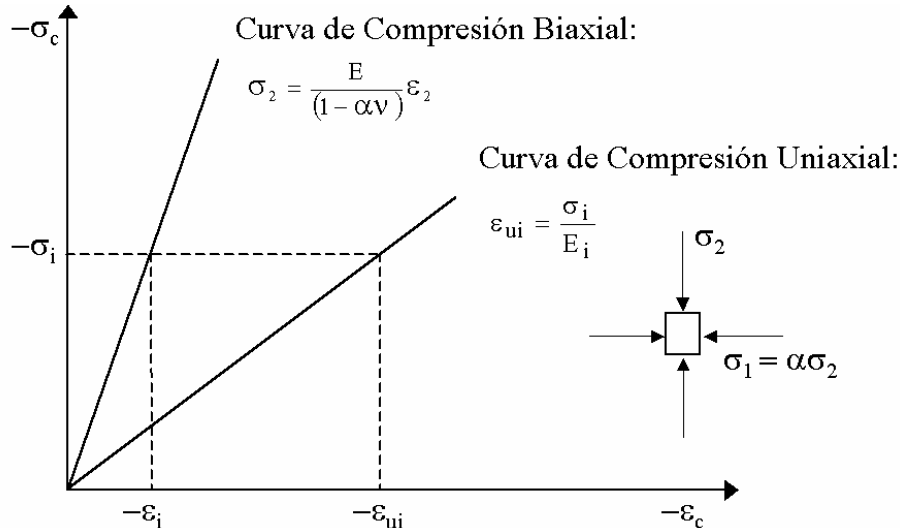


Figura 1 – Deformación uniaxial equivalente para un material elástico lineal (Darwin y Pecknold (1977)).

La introducción de estas deformaciones equivalentes permite representar el comportamiento del hormigón a través de curvas tensión-deformación uniaxiales equivalentes separadas. Se debe resaltar que estas deformaciones uniaxiales equivalentes son deformaciones ficticias definidas en las direcciones de las tensiones principales corrientes. Estas son utilizadas para la determinación de las propiedades del hormigón, o sea, de los módulos de elasticidad y de los coeficientes de Poisson, usados en la ecuación (2). Sin embargo, se percibe por la ecuación (4) que para obtenerse las deformaciones uniaxiales equivalentes en un material no lineal se precisa conocer los módulos de elasticidad secantes E_i en las tres direcciones de las tensiones principales. Por lo tanto, se hace necesario utilizar un proceso iterativo para la determinación de estas variables.

4 CURVAS TENSIÓN-DEFORMACIÓN UNIAxIAL EQUIVALENTE PARA EL HORMIGÓN

El modelo propuesto para el hormigón sigue el trabajo de Darwin y Pecknold (1977), admitiendo que la ley constitutiva tridimensional pueda ser decompuesta en tres relaciones uniaxiales con las tensiones reales siendo funciones de las deformaciones uniaxiales equivalentes. Como fue propuesto por Kwon (2000), para evitar cualquier limitación en la definición de la curva uniaxial equivalente, dos curvas son usadas para describir la respuesta a la compresión del hormigón: la curva propuesta por Popovics (1973) describe el ramo ascendente hasta el punto de pico y la curva de Saenz (1964) es usada en la respuesta pól pico. La combinación de los modelos de Popovics (1973) y Saenz (1964) es expresada por la siguiente relación:

$$\sigma_i = f_{ci} \frac{K_i \left(\frac{\varepsilon_{ui}}{\varepsilon_{ci}} \right)}{1 + A_i \left(\frac{\varepsilon_{ui}}{\varepsilon_{ci}} \right) + B_i \left(\frac{\varepsilon_{ui}}{\varepsilon_{ci}} \right)^2 + C_i \left(\frac{\varepsilon_{ui}}{\varepsilon_{ci}} \right)^3 + D_i \left(\frac{\varepsilon_{ui}}{\varepsilon_{ci}} \right)^{R_i}} \quad \text{con } i=1,2,3 \quad (5)$$

– Ramo ascendente: Si $\left(\frac{\varepsilon_{ui}}{\varepsilon_{ci}} \right) \leq 1$: $A_i = B_i = C_i = 0$; $D_i = (K_i - 1)$;

– Ramo descendente: Si $\left(\frac{\varepsilon_{ui}}{\varepsilon_{ci}} \right) > 1$: $A_i = C_i + K_i - 2$; $B_i = 1 - 2C_i$; $C_i = K_i \frac{(K_{\sigma_i} - 1)}{(K_{\varepsilon_i} - 1)^2} - \frac{1}{K_{\varepsilon_i}}$;

$$D_i = 0.$$

donde, $K_i = E_o \frac{\varepsilon_{ci}}{\sigma_{ci}}$; $K_{\varepsilon_i} = \frac{\varepsilon_{fi}}{\varepsilon_{ci}}$; $K_{\sigma_i} = \frac{\sigma_{ci}}{\sigma_{fi}}$; E_o es el módulo de elasticidad inicial; ε_{ui} es la deformación uniaxial equivalente en la dirección de ortotropía i ; σ_{ci} es la resistencia del hormigón en la dirección i , también llamada de tensión de pico; ε_{ci} es la deformación específica correspondiente a la resistencia σ_{ci} , o sea, la deformación de pico; σ_{fi} y ε_{fi} son las tensiones y deformaciones específicas del punto de control en el ramo descendente de la curva.

La respuesta a la tracción del hormigón es descrita a través de las ecuaciones que siguen: Cuando $\varepsilon_{ui} \leq \varepsilon_{ci}$ se tiene:

$$\sigma_i = E_o \varepsilon_{ui} \quad \text{con } i=1,2,3 \quad (6)$$

Pero, cuando $\varepsilon_{ui} > \varepsilon_{ci}$, vale la ecuación:

$$\sigma_i = 0,4 \sigma_{ci} \left(1 - \frac{\varepsilon_{ui}}{0,01} \right) \quad \text{con } i=1,2,3 \quad (7)$$

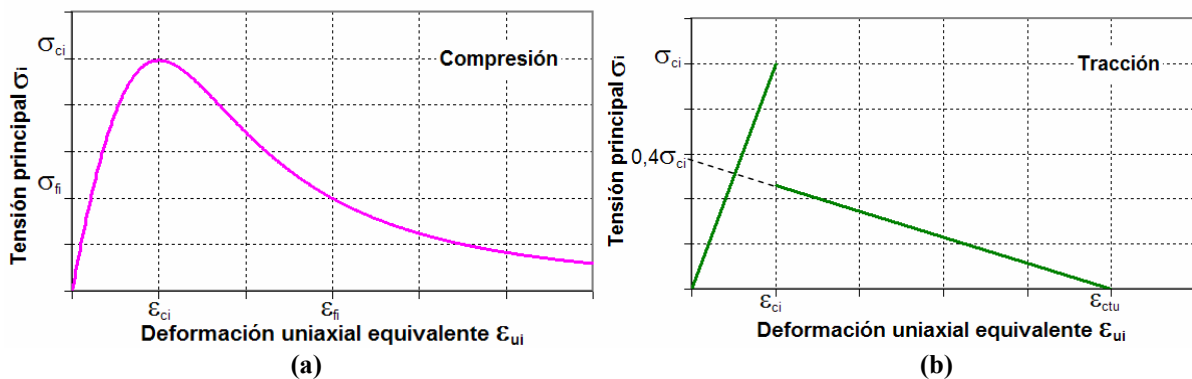


Figura 2 – Curvas tensión-deformación para el hormigón: (a) respuesta a la compresión; (b) respuesta a la tracción.

A través de las ecuaciones (5), (6) y (7) se puede definir los módulos de elasticidad secantes, usados en la ecuación (2), considerando $E_i = \frac{\sigma_i}{\varepsilon_{ui}}$, con $i=1,2,3$.

5 SUPERFICIE DE ROTURA Y RESISTENCIA DEL HORMIGÓN

Las curvas tensión-deformación uniaxiales equivalentes dependen de las tensiones y deformaciones de pico. Siendo así, antes de calcularse las tensiones principales y los módulos de elasticidad del hormigón, se necesita definir las tensiones y deformaciones de pico ε_{ci} a través de la superficie última en el espacio de tensiones principales corrientes. En este trabajo se utilizó una modificación de la superficie de cinco parámetros de Willam y Warnke (1975), como presentado en Franca (2006). Willam y Warnke (1975) presentan curvas parabólicas para los meridianos de compresión y de tracción dadas por:

$$\begin{aligned}\sigma_m &= a_0 + a_1\rho_t + a_2\rho_t^2 \quad \text{meridiano de tracción} \\ \sigma_m &= b_0 + b_1\rho_c + b_2\rho_c^2 \quad \text{meridiano de compresión}\end{aligned}\quad (8)$$

donde, $\sigma_m = \frac{I_1}{3}$ es la tensión media; I_1 es el primer invariante del tensor de tensiones; ρ_t y ρ_c son las componentes de tensión perpendicular al eje hidrostático para $\theta = 0^\circ$ y $\theta = 60^\circ$, respectivamente; y $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2$ son constantes del material. Como los dos meridianos deben interceptar el eje hidrostático en el mismo punto, se debe tener: $a_0 = b_0$. Por medio de ensayos experimentales, los cinco parámetros de la superficie de Willam-Warnke (1975) son determinados a partir de los siguientes estados de rotura (Chen y Han, 1988): f_c – resistencia a la compresión uniaxial; $f_t = 0,1f_c$ – resistencia a la tracción uniaxial; $f_{cc} = 1,15f_c$ – resistencia a la compresión biaxial; $(\sigma_{mc}, \rho_c) = (-1,95f_c; 2,770f_c)$ – resistencia a la compresión biaxial confinada con $\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3$ y $(\sigma_{mt}, \rho_t) = (-3,90f_c; 3,461f_c)$ – resistencia a la compresión biaxial confinada con $\sigma_1 = \sigma_2 > \sigma_3$. A partir de estos estados de rotura, se pueden determinar los cinco parámetros usados en los meridianos de compresión (ρ_c) y de tracción (ρ_t) de la superficie de Willam-Warnke (1975): $a_0 = b_0 = 0,1025$; $a_1 = -0,8403$; $a_2 = -0,0910$; $b_1 = -0,4507$ y $b_2 = -0,1018$. Para el modelo propuesto en este trabajo, fueron considerados los valores de f_t y f_{cc} recomendados por el Código Modelo CEB-FIP 1990 (1993). A partir de los estados de rotura mencionados anteriormente, fueran determinadas expresiones para a_0, a_1, a_2, b_0, b_1 y b_2 , funciones de $\alpha_u = \frac{f_t}{f_c}$. Estas expresiones son dadas por (Franca, 2006):

$$\begin{aligned}a_0 &= -\frac{11,36\alpha_u + 1,05\alpha_u^2}{-12,62 + 13,49\alpha_u - 2,48\alpha_u^2} \\ a_1 &= \frac{0,88 + 0,55\alpha_u + 0,31\alpha_u^2}{-1,26 + 1,35\alpha_u - 0,25\alpha_u^2} \\ a_2 &= \frac{-1,58 + 5,04\alpha_u}{-12,62 + 13,49\alpha_u - 2,48\alpha_u^2}\end{aligned}\quad (9)$$

$$b_0 = -\frac{11,36\alpha_u + 1,05\alpha_u^2}{-12,62 + 13,49\alpha_u - 2,48\alpha_u^2}$$

$$b_1 = \frac{0,36 + 1,41\alpha_u + 0,24\alpha_u^2}{-1,26 + 1,35\alpha_u - 0,25\alpha_u^2}$$

$$b_2 = -\frac{-16,49 + 62,14\alpha_u + 0,10\alpha_u^2}{-12,62 + 13,49\alpha_u - 2,48\alpha_u^2}$$

Una representación general de la superficie última para el hormigón puede ser expresada por la siguiente ecuación:

$$f(\rho, \sigma_m, \theta) = \rho - \rho_f(\sigma_m, \theta) = 0 \quad |\theta| \leq 60^\circ \quad (10)$$

donde, $\rho = \sqrt{2J_2}$ es la componente de la tensión perpendicular al eje hidrostático; J_2 es el segundo invariante del tensor desviador de tensiones; $\rho_f(\sigma_m, \theta)$ es la superficie de falla en los planos desviadores, siendo dado por diferentes expresiones para diferentes modelos de rotura. La expresión $\rho_f(\sigma_m, \theta)$ para el modelo de 5 parámetros de Willam y Warnke (1975) puede ser expresada por:

$$\rho_f(\sigma_m, \theta) = \frac{s+t}{v} \quad (11)$$

donde, $s = s(\sigma_m, \theta) = 2 \rho_c (\rho_c^2 - \rho_t^2) \cos \theta$;

$$t = t(\sigma_m, \theta) = \rho_c (2\rho_t - \rho_c) u^{1/2};$$

$$u = u(\sigma_m, \theta) = 4 (\rho_c^2 - \rho_t^2) \cos^2 \theta + 5 \rho_t^2 - 4 \rho_t \rho_c;$$

$$v = v(\sigma_m, \theta) = 4 (\rho_c^2 - \rho_t^2) \cos^2 \theta + (\rho_c - 2 \rho_t)^2.$$

A partir de la ecuación (8), ρ_c y ρ_t pueden ser expresados como función de σ_m :

$$\begin{aligned} \rho_t &= -\frac{1}{2} \frac{1}{a_2} \left[a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_2(a_0 - \sigma_m)} \right] \text{ meridiano de tracción} \\ \rho_c &= -\frac{1}{2} \frac{1}{b_2} \left[b_1 + \sqrt{b_1^2 - 4b_2(b_0 - \sigma_m)} \right] \text{ meridiano de compresión} \end{aligned} \quad (12)$$

La superficie de rotura define los valores de tensiones últimas σ_{c1} , σ_{c2} , σ_{c3} para una determinada relación de tensiones principales corrientes $\sigma_1/\sigma_2/\sigma_3$. Como presentado en Franca (2006), la determinación de los valores de resistencias corrientes del hormigón σ_{c1} , σ_{c2} , σ_{c3} es basada en la superficie de rotura dada por la ecuación (10), y definida como sigue: Si un punto $M_c(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ en la trayectoria de carga en el espacio de tensión principal representa el estado de tensión corriente del material, entonces una línea que sale del origen, pasando por ese punto $M_c(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, intercepta la superficie de rotura en el punto

$M_r(\sigma_{c1}, \sigma_{c2}, \sigma_{c3})$, según Figura 3. Con las tensiones de pico, se emplean las ecuaciones adoptadas por Bouzaiene y Massicotte (1997) para la especificación de las deformaciones específicas de pico ($\varepsilon_{c1}, \varepsilon_{c2}, \varepsilon_{c3}$). Estas son dadas por:

$$\varepsilon_{ci} = \varepsilon_c \left[-1,6 \left(\frac{\sigma_{ci}}{f_c} \right)^3 + 2,25 \left(\frac{\sigma_{ci}}{f_c} \right)^2 + 0,35 \left(\frac{\sigma_{ci}}{f_c} \right) \right], \text{ para } 0,90 \leq \left(\frac{\sigma_{ci}}{f_c} \right) \leq 1 \quad (13)$$

$$\varepsilon_{ci} = \varepsilon_c \left[3,0 \left(\frac{\sigma_{ci}}{f_c} \right) - 2,0 \right], \text{ para } 1 < \left(\frac{\sigma_{ci}}{f_c} \right) \leq 1,27 \quad (14)$$

$$\varepsilon_{ci} = \varepsilon_c \left[5,312 \left(\frac{\sigma_{ci}}{f_c} \right) - 4,936 \right], \text{ para } \left(\frac{\sigma_{ci}}{f_c} \right) > 1,27 \quad (15)$$

donde, $i=1,2,3$; f_c es la resistencia a la compresión uniaxial del hormigón; ε_c es la deformación específica correspondiente a la f_c . Para las direcciones traccionadas se considera $\varepsilon_{ci} = \varepsilon_t$, siendo ε_t la deformación específica correspondiente a la resistencia a la tracción uniaxial f_t .

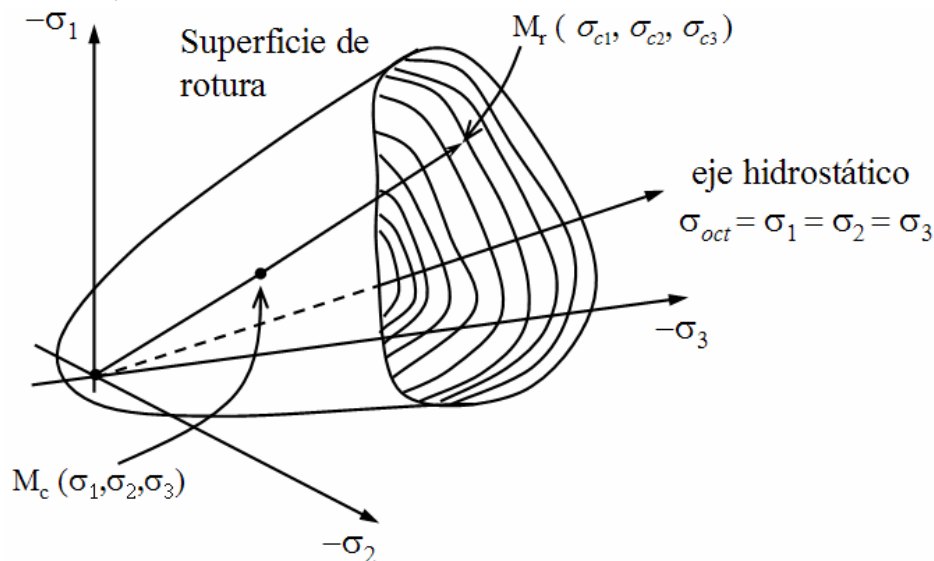


Figura 3 – Determinación de las tensiones de pico ($\sigma_{c1}, \sigma_{c2}, \sigma_{c3}$) del hormigón.

6 PUNTO DE CONTROL DEL RAMO DESCENDIENTE DE LA CURVA POPOVICS-SAENZ

El hormigón exhibe un ablandamiento en la curva tensión-deformación después que se alcanzan las tensiones de pico. Este comportamiento de ablandamiento es un fenómeno que depende de las dimensiones y formas de los cuerpos de prueba, como también de las condiciones de contorno de los ensayos experimentales. Por lo tanto, se hace esencial la definición de un modelo apropiado para la descripción del comportamiento póst pico del material. Una previsión realística es obtenida a través de un punto de control localizado en el

ramo p s pico de la curva tensión-deformación uniaxial equivalente. Entonces, para considerar mejor el comportamiento experimental del hormigón, los valores de las tensiones σ_{fi} del punto de control son definidos como función de las tensiones de pico que dependen de las tensiones de confinamiento aplicadas a la estructura. A partir de ensayos experimentales, Balan et al. (2001) definieron las siguientes expresiones para el punto de control:

$$\sigma_{fi} = \sigma_{ci} \left(5 - \frac{\sigma_{ci}}{f_c} \right) \quad (16)$$

$$\varepsilon_{fi} = 4\varepsilon_{ci}$$

donde, f_c es la resistencia a la compresión uniaxial del hormigón. En este trabajo, se adopta la ecuación (16) para las direcciones comprimidas y para las direcciones traccionadas se considera $f_f = 0,25f_t$ y $\varepsilon_f = 4\varepsilon_t$, siendo ε_t la deformación específica correspondiente a la resistencia a la tracción uniaxial f_t .

7 COEFICIENTE DE POISSON

Para completar la definición de la ley constitutiva representada por la ecuación (2), se debe determinar los valores de los coeficientes de Poisson, ν_{ij} . El volumen del hormigón en un cuerpo de prueba comprimido disminuye y después empieza a aumentar hasta el cuerpo de prueba sufrir rotura. Este fenómeno de dilatación ocurre debido a la abertura (o expansión) de las microfisuras existentes en el material. Para simular esta variación volumétrica, varios trabajos existentes en la literatura sugieren la utilización de una función creciente para el coeficiente de Poisson. En este trabajo, se utiliza la expresión propuesta por Kwon (2000):

$$\nu_{ij} = \sqrt{\nu_{ui}\nu_{uj} \frac{E_i}{E_j}} \quad (17)$$

donde, ν_{ui} es la relación de deformación transversal uniaxial en la dirección i . Para definición de ν_{ui} , se emplea la expresión abajo:

$$\nu_{ui} = \nu_o \left[1 + \frac{1}{K_{vi}} \left\{ A_i \left(\frac{\varepsilon_{ui}}{\varepsilon_{ci}} \right) + B_i \left(\frac{\varepsilon_{ui}}{\varepsilon_{ci}} \right)^2 + C_i \left(\frac{\varepsilon_{ui}}{\varepsilon_{ci}} \right)^3 \right\} \right], \text{ con } i=1,2,3 \quad (18)$$

donde, ν_o es el coeficiente de Poisson inicial; $K_i = \frac{1}{2\nu_o}$; $K_{ei} = \frac{\varepsilon_{fi}}{\varepsilon_{ci}}$; $K_{\sigma i} = \frac{f_{ci}}{f_{fi}}$; $K_{\nu i} = E_o \frac{\varepsilon_{ci}}{f_{ci}}$;

$$A_i = C_i + K_i - 2; B_i = 1 - 2C_i; C_i = K_i \frac{(K_{\sigma i} - 1)}{(K_{ei} - 1)^2} - \frac{1}{K_{ei}}$$

8 TIRANTES DE HORMIGÓN ARMADO

En este trabajo se presenta un estudio comparativo entre los resultados numéricos obtenidos por el modelo propuesto y los valores determinados según el Código Modelo CEB-FIP 1990 (1993) para una serie con cinco tirantes de hormigón armado. En seguida, a partir de los datos experimentales disponibles se realiza un análisis comparativo con una serie de ensayos experimentales realizados por Rizkalla et al. (1983).

8.1 Comportamiento de tirantes de hormigón armado

Las piezas de hormigón armado sometidas a tracción uniaxial presentan un comportamiento típico, con una curva tensión-deformación dividida normalmente en tres regiones (Figura 4). La Región I representa el comportamiento elástico de la pieza traccionada hasta la formación de la primera fisura. La segunda región representa el comportamiento entre el período de formación de la primera fisura y el punto de fisuración final. La Región III representa el comportamiento entre el último punto de fisuración y la fluencia de la armadura. En la simulación del comportamiento en tracción del hormigón armado fisurado, deben ser considerados dos fenómenos: el ablandamiento y el aumento de la rigidez a la tracción. La rigidez de la pieza tendrá contribución de las rigideces de la armadura, del hormigón simple (ablandamiento) y del hormigón entre fisuras.

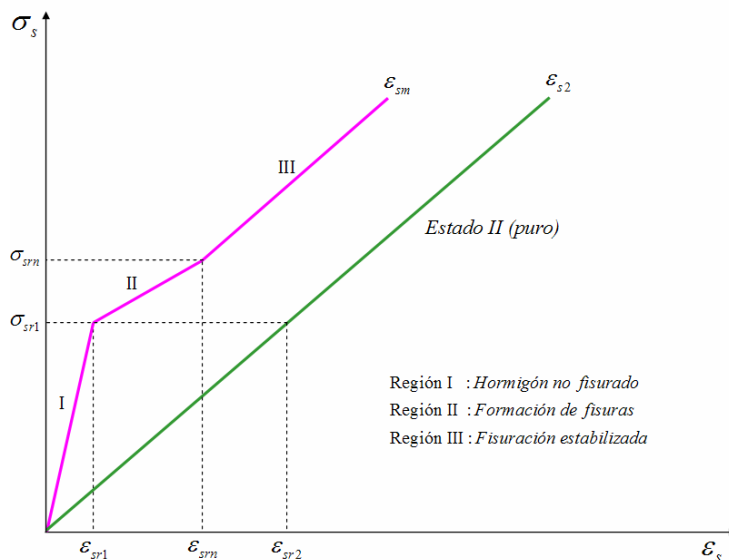


Figura 4 – Curva tensión-deformación media del hormigón armado sometido a la tracción uniaxial.

8.2 Estudio Comparativo I

El Código Modelo CEB-FIP 1990 (1993) utiliza un modelo simplificado para representar el comportamiento de tirantes de hormigón armado, presentando una curva tensión-deformación media, como mostrado en la Figura 4. A fin de verificar los resultados numéricos obtenidos por el modelo propuesto, fueron realizados simulaciones con una serie de cinco tirantes de hormigón armado. Los resultados son comparados con los obtenidos a partir de las expresiones presentadas por el Código Modelo CEB-FIP 1990 (1993). Los cinco tirantes analizados tienen las dimensiones mostradas en la Figura 5. Estos tirantes presentan diferentes tasas de armadura con los siguientes valores: 0,50%; 0,75%; 1,00%; 1,50% y 3,00%. Las propiedades de los materiales (hormigón y acero) son presentadas en la Tabla 1.

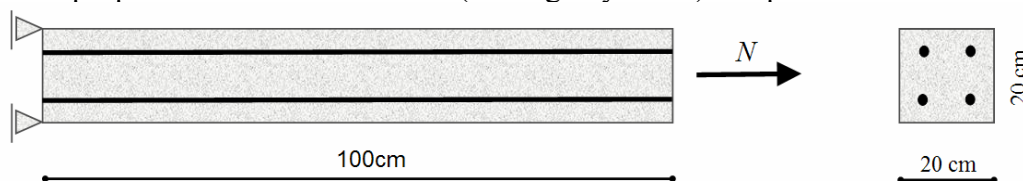
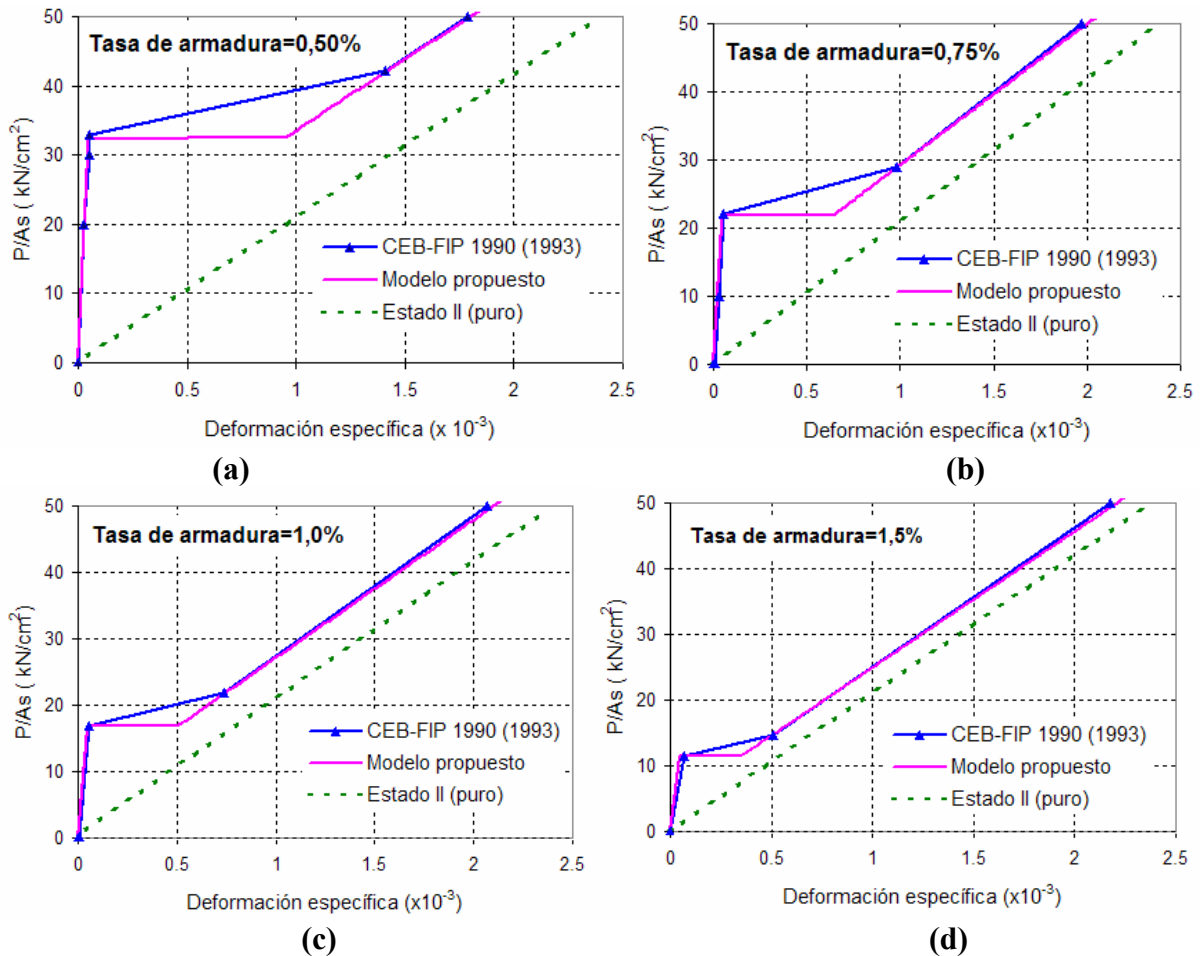


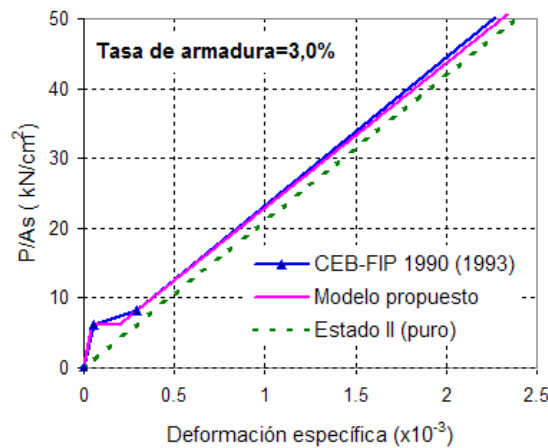
Figura 5 – Tirante de hormigón armado.

Tabela 1 – Propiedades de los materiales (hormigón y acero).

Hormigón	
Resistencia a la compresión uniaxial (kN/cm ²)	2,0
Resistencia a la tracción uniaxial (kN/cm ²)	0,158
Módulo de elasticidad (kN/cm ²)	3224
Coefficiente de Poisson	0,2
Acero	
Tensión de fluencia (kN/cm ²)	50
Módulo de elasticidad (kN/cm ²)	21000

Los resultados numéricos del modelo fueran obtenidos empleando un elemento hexaédrico de 8 nodos. En estas simulaciones se consideró solamente un cuarto del tirante, aplicando condiciones de contorno adecuadas para preservar la simetría del elemento. A través de los gráficos presentados en la Figura 6 se observa una óptima concordancia entre los resultados numéricos obtenidos por el modelo propuesto y aquellos determinados a través de las expresiones del Código Modelo CEB-FIP 1990 (1993). El efecto de “*tension stiffening*” representa la capacidad del hormigón intacto entre las fisuras de continuar soportando tensiones de tracción, contribuyendo así para la rigidez de la pieza traccionada. A través de los gráficos se puede observar que el modelo numérico propuesto en este trabajo consigue simular bien este comportamiento de aumento de la rigidez a la tracción. Se puede comprobar también una formación más rápida de la primera fisura (inicio de la Región II) y por consiguiente una disminución del efecto del aumento de la rigidez a la tracción con el aumento de la tasa de armadura.





(e)

Figura 6 – Diagrama tensión-deformación específica en la barra:
 (a) Tasa=0,5%; (b) Tasa=0,75%; (c) Tasa=1,0%; (d) Tasa=1,5%; (e) Tasa=3,0%.

8.3 Estudio Comparativo II

Como parte de un programa experimental desarrollado por la Universidad de Manitoba, Canadá, siete cuerpos de prueba sometidos a tracción uniaxial fueron ensayados por Rizkalla et al. (1983). Este estudio presentó un conjunto de datos apropiados para la comparación con el modelo numérico propuesto. Datos relevantes sobre los cuerpos de prueba son presentados en la Tabla 2 y en la Figura 7. En la Figura 8, se muestran las curvas carga-deformación para los diferentes ensayos. Observase una óptima concordancia entre los resultados numérico y experimental. Como ya fue mencionado en el ítem anterior se puede comprobar que el modelo propuesto consigue simular bien el comportamiento de aumento de rigidez a la tracción. Finalmente, se puede decir que el modelo utilizado en este trabajo consigue simular correctamente el comportamiento de estructuras de hormigón armado sometidas a tracción uniaxial pura.

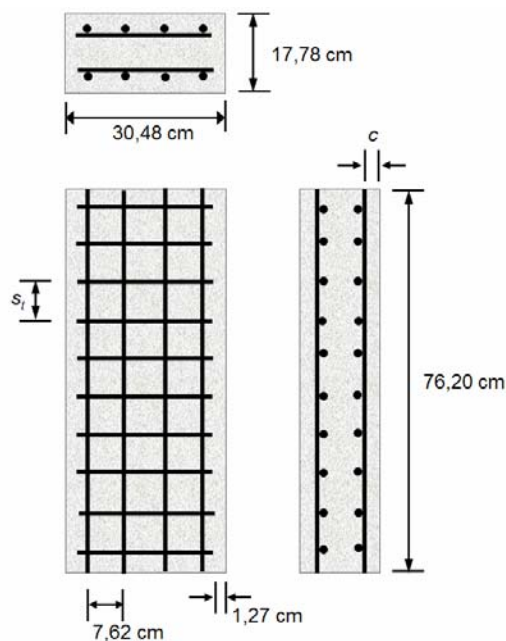
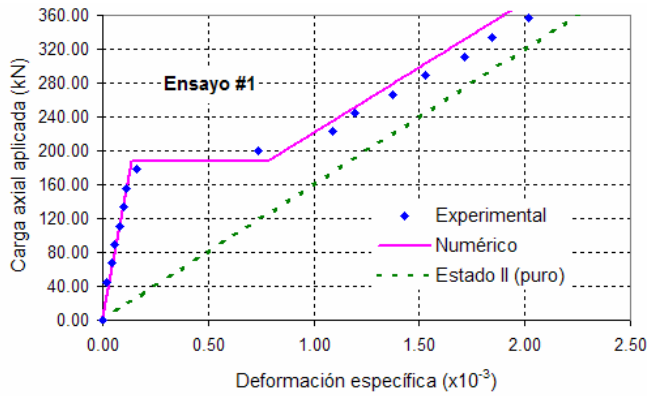


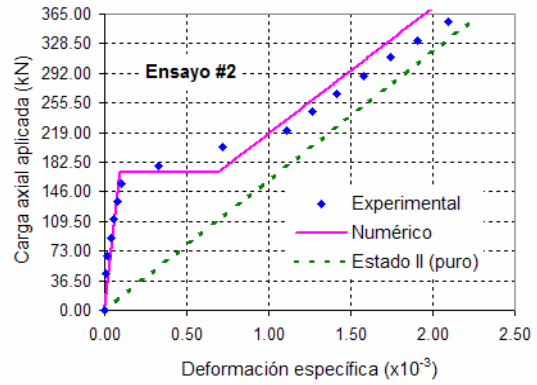
Figura 7 – Tirantes ensayados por Rizkalla et al. (1983).

Tabela 2 – Datos para los ensayos realizados por Rizkalla et al. (1983).

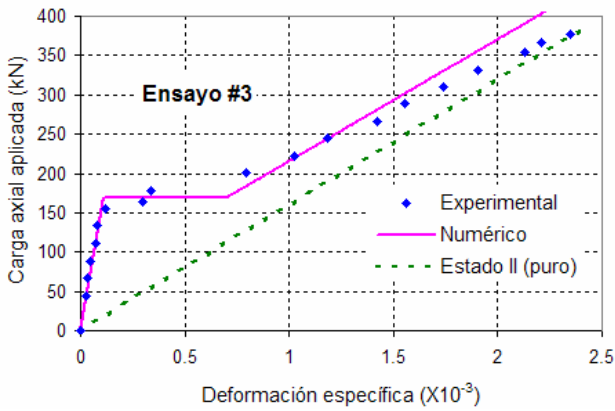
Ensayo	Hormigón				Armadura					
	f_c (kN/cm^2)	f_t (kN/cm^2)	E_c (kN/cm^2)	c (cm)	f_y (kN/cm^2)	E_s (kN/cm^2)	ρ	s_t (cm)	barra	diámetro (cm)
#1	3.01	0.31	2199.37	1.91	44.97	19995.50	1.476%	21.59	10M	1.13
#2	2.78	0.29	3020.15	1.91	45.30	19995.50	1.476%	-	10M	1.13
#3	2.70	0.28	2478.61	3.81	48.07	19995.50	1.476%	5.08	10M	1.13
#4	2.55	0.27	1467.46	3.81	45.69	19995.50	1.476%	10.16	10M	1.13
#5	2.58	0.27	3600.22	3.81	48.40	19995.50	1.476%	15.24	10M	1.13
#6	2.48	0.26	2636.03	3.81	45.52	19995.50	1.476%	26.67	10M	1.13
#7	2.55	0.27	2779.51	3.81	46.91	19995.50	1.476%	-	10M	1.13



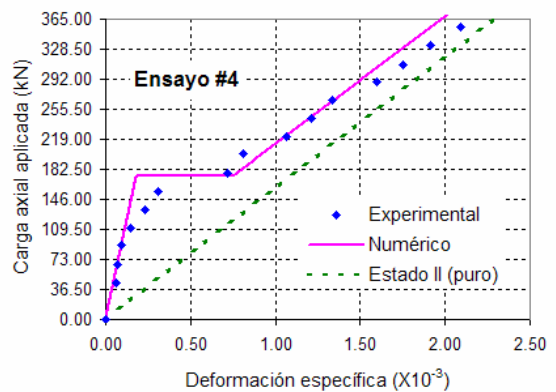
(a)



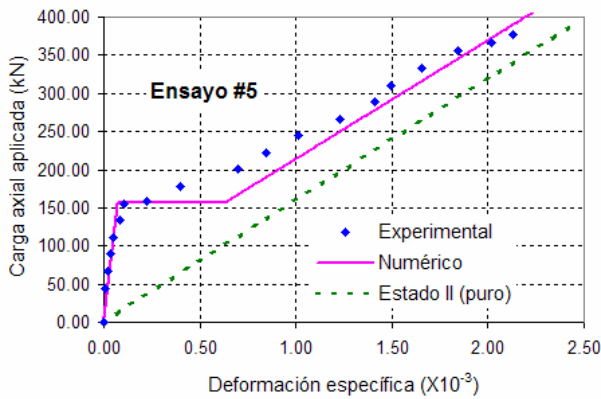
(b)



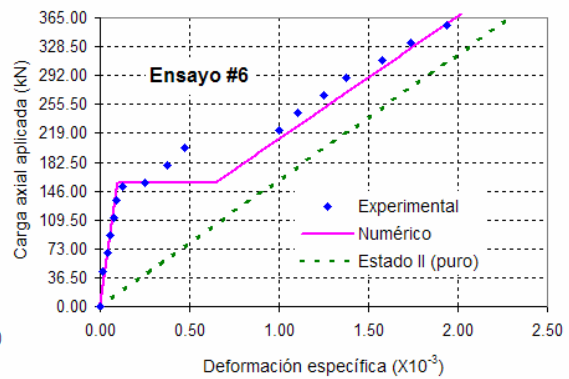
(c)



(d)



(e)



(f)

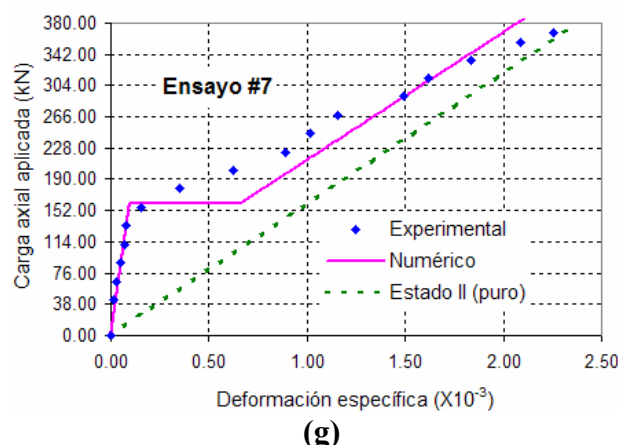


Figura 8 – Estudio comparativo con los ensayos experimentales realizados por Rizkalla et al. (1983): (a) Ensayo #1; (b) Ensayo #2; (c) Ensayo #3; (d) Ensayo #4; (e) Ensayo #5; (f) Ensayo #6; (g) Ensayo #7.

9 CONCLUSIONES

Se presentó en este trabajo una formulación general para el análisis no lineal por elementos finitos de piezas de hormigón armado. La ley constitutiva utilizada en el modelo es una ley ortotrópica con ejes de ortotropía paralelos a los ejes de tensiones principales corrientes. El modelo utiliza también el concepto de deformación uniaxial equivalente, inicialmente presentado por Darwin y Pecknold (1977). Las características del material son determinadas a partir de la superficie de resistencia última. La superficie de rotura usada en el modelo es una modificación de la superficie propuesta por Willam y Warnke (1975), como presentado en Franca (2006). El modelo fue implementado en un programa en elementos finitos desarrollado por Hinton (1988). Las comparaciones entre los resultados obtenidos por el modelo numérico propuesto con los ensayos analíticos y experimentales muestran una óptima concordancia del modelo numérico con los resultados presentados.

REFERENCIAS

- T.A. Balan, E. Spacone y M. Kwon. A 3D hypoplastic model for cyclic analysis of concrete structures. *Engineering Structures*, 23: 333-342, 2001.
- A. Bouzaiene y B. Massicotte. Hypoelastic tridimensional model for nonproportional loading of plain concrete. *Journal of Engineering Mechanics*, 123 (11): 1111-1120, 1997.
- W.F. Chen y D.J. Han. *Plasticity for structural engineers*. Springer-Verlag New York Inc., New York, 1988.
- COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BÉTON. *CEB-FIP Model Code 1990*. Thomas Telford Services Ltda, 1993.
- D. E. Darwin y D.A. Pecknold. Nonlinear biaxial stress-strain law for concrete. *Journal of Engineering Mechanics Division*, 103 (EM2): 229-241, 1977.
- A.E. Elwi y M. Hruday. Finite element model for curved embedded reinforcement. *Journal of Engineering Mechanics*, 115 (4): 740-754, 1989.
- A.A. Elwi y D.W. Murray. A 3D hypoelastic concrete constitutive relationship. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, 105 (EM4): 623-641, 1979.
- G.F. Franca. *Modelos constitutivos para análise de estruturas de concreto armado através do método dos elementos finitos (texto en portugués)*. Examen de Calificación (Doctorado),

- PPGEC/UFRGS, Porto Alegre, 2006.
- E. Hinton. *Numerical methods and software for dynamic analysis of plates and shells*. Swansea: Pineridge Press, 1988.
- M. Kwon. *Three dimensional finite element analysis for reinforced concrete members*. Thesis – Graduate School, University of Colorado, USA, 2000.
- S. Popovics. A numerical approach to the complete stress-strain curve of concrete. *Cement and Concrete Research*, 3 (5): 583-599, 1973.
- L.S. Rizkalla, L.S. Hwang y M. El Shahawi. Transverse reinforcement effect on cracking behaviour of R.C. members. *Canadian Journal of Civil Engineering*, 10 (4): 566-581, 1983.
- L.P. Saenz. Discussion of the paper: Equation for the stress-strain curve of concrete, por P. Desayi y S. Krishman. *American Concrete Institute Journal*, Proceedings, 61 (9): 1229-1235, 1964.
- K.J. William y E.P. Warnke. Constitutive models for the triaxial behavior of concrete. *International Association of Bridge Structures*, Proceeding, 19: 1-30, 1975.