

EFECTO DE LA GEOMETRÍA DE VIGAS CON CAPAS VISCOELÁSTICAS EN LA DISIPACIÓN DE ENERGÍA

Jhon J. Gil y Luis E. Suárez

Departamento de Ingeniería Civil y Agrimensura, Universidad de Puerto Rico, Recinto Universitario de Mayagüez, P.O. BOX 9041, Mayagüez, Puerto Rico 00681-9041 , <http://civil.uprm.edu>

Palabras Clave: Tratamiento superficial, materiales amortiguadores, disipación de energía, vigas emparedado.

Resumen. Un método que ha sido usado con mucho éxito en la industria aeroespacial y automotriz para disminuir las vibraciones consiste en agregar a la estructura capas de materiales viscoelásticos. Aunque hay varias maneras de instalar las capas, la más común y efectiva es adherir el material amortiguador entre dos capas elásticas. De esta manera, al vibrar el elemento estructural, este material es sometido a deformaciones por cortante. En este trabajo se parte de la formulación propuesta por Rao y se estudia el efecto de los distintos parámetros que afectan el factor de pérdida. En varios casos se usa un modelo de elementos finitos desarrollado en el programa ABAQUS para verificar los resultados y conclusiones. Los resultados encontrados muestran que la efectividad del tratamiento tiene una fuerte dependencia de las características geométricas del elemento base. Se estudian diferentes combinaciones de espesores y se muestra que aumentar el espesor de la capa viscoelástica no necesariamente implica un aumento en la disipación de energía. Para poder lograr valores favorables de amortiguamiento en una viga con una sección transversal determinada se requiere una longitud específica. De acuerdo a los resultados hallados, la técnica propuesta es más eficiente en secciones simétricas formadas con canales o angulares.

1 INTRODUCCION

1.1 Introducción

Los materiales viscoelásticos, debido a sus características de amortiguamiento, son muy usados en ingeniería aeroespacial y mecánica para controlar las vibraciones en estructuras y máquinas y en ingeniería acústica para reducir el ruido. Los materiales viscoelásticos son aquellos que cuando son sometidos a una deformación, una parte del trabajo aportado por la fuente de excitación se almacena y puede ser recuperado como energía elástica de deformación mientras que la otra parte se disipa sin deformaciones inelásticas (Christensen 1971). Los polímeros (como la goma) que son materiales constituidos por cadenas moleculares grandes tienen esta capacidad de proveer amortiguamiento viscoelástico. Para obtener una medida del amortiguamiento que es capaz de proveer un material se suele considerar su capacidad de disipar energía bajo cargas cíclicas. La razón entre la energía disipada a la energía almacenada en un ciclo se conoce como factor de pérdida η y da una indicación de la efectividad del tratamiento de amortiguamiento.

Los materiales amortiguadores se han usado mucho en ingeniería mecánica como un método para reducir las vibraciones inducidas por irregularidades del terreno en un vehículo, o aquellas transmitidas por el motor, etc. En ingeniería aeronáutica y aeroespacial también se han usado para disminuir las oscilaciones inducidas por la turbulencia, las vibraciones transmitidas desde turbinas, o por los motores de cohetes, etc. En cuanto a sus aplicaciones en ingeniería civil, una posible aplicación sería la reducción de los efectos de los terremotos o del viento sobre las estructuras tanto de edificios como de puentes. Una manera de reducir estos efectos consiste en incrementar el amortiguamiento natural de la estructura, lo cual, podría lograrse al usar el tratamiento de amortiguamiento de tipo pasivo, que consiste básicamente en adherir al cuerpo vibrante una o más capas delgadas de material viscoelástico.

El tipo de configuración más simple se conoce como tratamiento de amortiguamiento “de capa libre” o “no restringida” o “extensional”, y es el más fácil de aplicar y el más económico. En este tipo de tratamiento la disipación de energía surge de la deformación extensional que se presenta en la viga cuando es sometida a una carga cíclica. Otro tipo de tratamiento de amortiguamiento se conoce como “por cortante” o “de capa restringida”. Éste consiste en usar una capa delgada de metal sobre el material viscoelástico como se muestra en la Figura 1. Cuando las dos capas externas experimentan flexión cíclica deforman por cortante la capa viscoelástica. La deformación por cortante es un mecanismo por el cual se disipa más energía que si la capa sólo tuviera deformaciones extensionales, lo cual permite que las oscilaciones estructurales se atenúen más rápido. Ross et al. (1959) demostraron que el tratamiento de amortiguamiento por cortante es más eficiente que el tratamiento de amortiguamiento de capa libre. La mayor ventaja de los tratamientos de amortiguamiento es la reducción en la respuesta dinámica lograda sin alterar significativamente la masa y rigidez de la estructura.

El tratamiento consistente en una capa de material viscoelástico adherida a la superficie de una estructura sometida a una carga cíclica fue estudiado primero por Oberts (1952) usando una viga con una capa viscoelástica en una y en dos caras. La eficiencia del tratamiento no fue alta, debido a que el material viscoelástico estaba sometido a deformaciones por tensión/compresión a lo largo del eje de la viga, siendo las deformaciones por cortante muy bajas. Con este tratamiento de capa libre, las deformaciones por cortante en el material viscoelástico y la estructura son del mismo orden, Plunkett y Lee (1969). Esta configuración también ha sido estudiada por otros autores como Lunden (1980), Lumsdaine y Scott (1995) y Roy y Ganesan (1996).

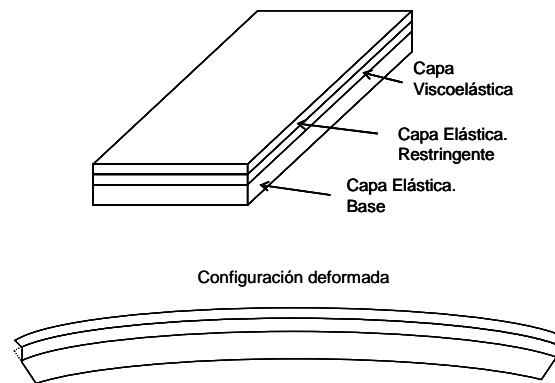


Figura 1: Viga laminada de tres capas. Tratamiento de capa restringida.

El trabajo fundamental en el campo de tratamientos de amortiguamiento fue realizado por Ross et al. (1959) quienes desarrollaron la primera teoría para vigas tipo emparedado amortiguadas de tres capas y con material viscoelástico en el núcleo. La teoría fue desarrollada basada en la ecuación diferencial de cuarto orden para vibraciones por flexión de una viga uniforme, pero usando una rigidez de flexión compleja equivalente. DiTaranto (1965) también hizo una contribución importante estudiando las vigas laminadas de tres capas con material viscoelástico entre las dos capas elásticas y con condiciones de frontera arbitrarias. Este investigador derivó una ecuación diferencial de movimiento de sexto orden para vibraciones libres, en términos de los desplazamientos longitudinales en la viga. Su aporte contribuyó a hallar una solución al problema de encontrar las frecuencias naturales y el factor de pérdida de la viga. Mead y Markus (1969) derivaron una ecuación diferencial de movimiento de sexto orden en términos del desplazamiento transversal para una viga compuesta de tres capas con núcleo en material viscoelástico. Estos autores también estudiaron las vibraciones forzadas bajo carga armónica. Rao (1978) derivó las ecuaciones de movimiento y condiciones de frontera que gobiernan las vibraciones de vigas de tres capas usando el principio de Hamilton. Obtuvo unas expresiones para calcular el factor de pérdida y la frecuencia natural para vigas con diferentes condiciones de frontera. A través de ejemplos se mostró la aplicación de las gráficas y fórmulas derivadas a problemas típicos. Soni y Bogner (1982) estudiaron el tratamiento por cortante y desarrollaron un programa computacional usando elementos finitos para analizar estructuras de naturaleza tridimensional y cáscaras. La efectividad del programa se verificó con tres ejemplos de interés práctico: una viga compuesta en voladizo, un tubo de escape de un motor jet y un panel cilíndrico. Johnson y Kienholz (1982) usaron el método de la energía modal implementado en NASTRAN aplicándolo a vigas, aros y placas simples con tres capas. Para las tres estructuras modeladas se encontró una buena coincidencia en los valores de la frecuencia natural y los factores de pérdida modal con las soluciones disponibles.

El objetivo de este trabajo es estudiar con la formulación desarrollada por Rao y mediante simulaciones numéricas con elementos finitos, las combinaciones geométricas de una viga y el tratamiento a cortante con el fin de optimizar la disipación de energía. También se pretende establecer conclusiones en cuanto a la viabilidad del tratamiento en una viga con características geométricas definidas. La idea es que este estudio sirva de base a la hora de realizar un diseño de capa restringida en una estructura real.

1.2 Modelamiento del comportamiento viscoelástico

Todos los materiales de ingeniería disipan alguna cantidad de energía durante una carga cíclica; sin embargo, los materiales viscoelásticos, tales como la goma, disipan mucha más

energía por ciclo de deformación. Estos materiales tienen la capacidad de liberar energía vía relajación y recuperación de las cadenas moleculares sometidas a deformación. Si se restringe el estudio a materiales con comportamiento lineal, la componente viscosa de un material viscoelástico puede ser modelada con un amortiguador viscoso con ecuación constitutiva $\sigma = F d\varepsilon/dt$, y la componente elástica con un resorte lineal con $\sigma = E \varepsilon$ (Flugge 1967). El comportamiento viscoelástico de los materiales se puede representar mejor cuando se consideran derivadas de los esfuerzos y deformaciones de orden mayor en la ecuación constitutiva de los materiales. Cuando se considera una excitación y respuesta armónica, de la forma $\sigma = \sigma_o \cdot e^{i\omega t}$ y $\varepsilon = \varepsilon_o \cdot e^{i\omega t}$ la ecuación constitutiva se puede expresar como:

$$\sigma_o = [E'(\omega) + i \cdot E''(\omega)] \cdot \varepsilon_o = E^*(\omega) \cdot \varepsilon_o \quad (1)$$

donde $E'(\omega)$ y $E''(\omega)$ son los módulos de almacenamiento y de pérdida, respectivamente, y $E^*(\omega)$ se conoce como el módulo complejo. $E'(\omega)$ es una medida de la energía almacenada y recuperada por ciclo y $E''(\omega)$ es una medida de la energía disipada por ciclo. De manera análoga a como se definió el módulo $E^*(\omega)$ puede definirse un módulo de cortante complejo, $G^*(\omega)$:

$$G^*(\omega) = G'(\omega) + i \cdot G''(\omega) \quad (2)$$

donde $G'(\omega)$ y $G''(\omega)$ son los módulos de corte de almacenamiento y pérdida, respectivamente, asociados a $G^*(\omega)$. Otra manera de expresar el módulo complejo es la siguiente:

$$G^*(\omega) = G'(\omega) \cdot (1 + i \cdot \eta_G) \quad (3)$$

donde η_G es el factor de pérdida asociado con $G^*(\omega)$:

$$\eta_G = \frac{G''(\omega)}{G'(\omega)} \quad (4)$$

Este parámetro puede usarse para medir la capacidad de disipación de energía del material y se obtienen experimentalmente, de gráficas provistas por el fabricante del material o de gráficas disponibles en la literatura especializada, como Nashif et al. (1985) y Sun y Lu (1995). La Figura 2 muestra la gráfica utilizada para obtener las propiedades viscoelásticas, el factor de pérdida y el módulo de almacenamiento, en función de la temperatura y la frecuencia para algunos de los modelos realizados en este trabajo.

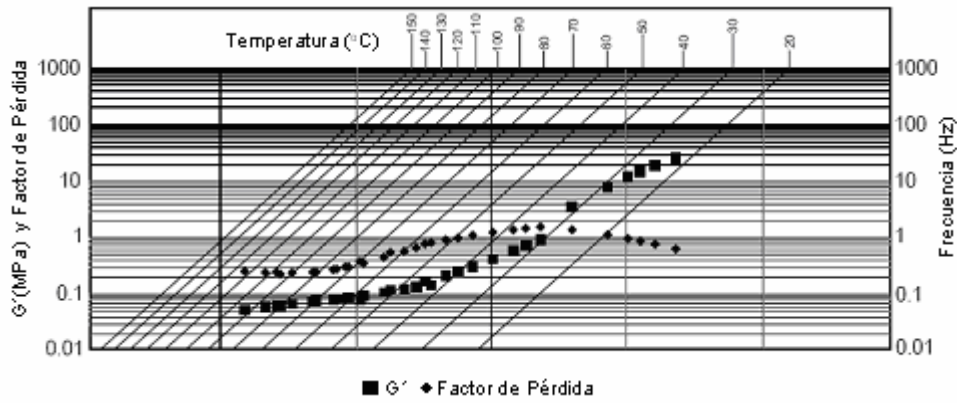


Figura 2: Nomograma del polímero viscoelástico 3M™ 110. (Adaptado de la gráfica suministrada por el fabricante).

2 VALIDACIÓN DEL MODELO DE ELEMENTOS FINITOS.

2.1 Solución Numérica de una Viga con Tratamiento de Amortiguamiento a Cortante

La ecuación del movimiento para una viga con tratamiento viscoelástico ha sido derivada por DiTaranto (1965), Mead y Markus (1969) y Rao (1978), entre otros. La ecuación diferencial obtenida es de sexto orden con coeficientes complejos y sólo en 1978 se publicó una solución para diferentes condiciones de frontera debida a Rao. Las expresiones obtenidas para estimar las frecuencias naturales amortiguadas y los factores de pérdida modal se expresan en términos del llamado *parámetro de cortante g*, definido por la siguiente expresión:

$$g = \frac{G_2 A_2 L^2 (E_1 A_1 + E_3 A_3)}{4h_2^2 E_1 A_1 E_3 A_3} \quad (5)$$

y por otro parámetro denominado *factor geométrico Y* definido como:

$$Y = \frac{c^2}{D} \frac{E_1 A_1 E_3 A_3}{E_1 A_1 + E_3 A_3} \quad (6)$$

donde A_1 , A_2 y A_3 son las áreas de la sección transversal de las capas elástica restringente, viscoelástica y elástica base, respectivamente; E_1 y E_3 son los módulos de elasticidad de las dos capas elásticas, restringente y base, respectivamente; $2h_2$ es el espesor de la capa viscoelástica; L es la longitud de la viga; c es la distancia entre los planos medios de las capas elásticas, y $D = E_1 I_1 + E_3 I_3$ es la rigidez flexional combinada de las dos capas elásticas.

La Tabla 1 resume las fórmulas encontradas por Rao (1978) para computar el factor de pérdida modal η y otro parámetro denominado factor de frecuencia Ω para una viga emparedado en voladizo vibrando en el primer modo. La precisión de estas fórmulas está dentro de un rango de 5% del valor exacto. Las expresiones para η y Ω para otras condiciones de frontera están disponibles en el artículo de Rao.

El factor de frecuencia es un parámetro adimensional que permite calcular la frecuencia natural amortiguada como:

$$f = \frac{\Omega}{2\pi t_0} \quad (7)$$

donde $t_o = \sqrt{mL^4 / D}$ siendo m la masa por unidad de longitud de la viga emparedado.

Modo	Fórmula
I	$\eta = 0.142675 \cdot 1.76507^x \cdot 0.381063^{x^2} \cdot 0.958039^{x^3} \cdot 1.06549^{x^4}$ $\cdot 5.78986^y \cdot 0.539055^{xy} \cdot 1.08780^{x^2y} \cdot 1.08745^{x^3y} \cdot 0.976757^{x^4y}$ $\cdot 0.586965^{y^2} \cdot 1.02241^{xy^2} \cdot 1.1505^{x^2y^2} \cdot 0.97021^{x^3y^2} \cdot 0.983707^{x^4y^2} \cdot \eta_2$ $\Omega = 3.9772 + 0.593861x + 0.593861x^2 - 0.061331x^3 - 0.022252x^4$ $+ y(0.154016 + 0.553244x + 0.144153x^2 - 0.075502x^3 - 0.014758x^4)$ $+ y^2(2.425840 + 2.142460x + 0.294401x^2 - 0.194389x^3 - 0.048345x^4)$

Tabla 1: Fórmulas del factor de frecuencia y de pérdida para una viga en voladizo. $x = \log g$ y $y = \log Y$

2.2 Validación - Modelamiento de una Viga con Tratamiento de Amortiguamiento

Para realizar la validación del programa ABAQUS se modeló una viga en voladizo de tres capas con un núcleo de material viscoelástico como se muestra en la Figura 3. Las propiedades de los materiales que la componen se resumen en la Tabla 2. En este modelo, de manera similar a como lo hicieron otros investigadores, como Soni y Bogner (1982), Sun et al. (1990) y Macé (1994), se considera una viga emparedado con una longitud de 177.8 mm, un ancho de 25.4 mm y con un material viscoelástico hipotético en el cual el módulo de almacenamiento G_2 y el factor de pérdida η_2 se consideran constantes, (o sea independientes de la frecuencia).

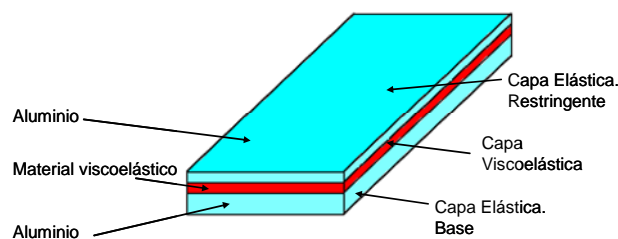


Figura 3: Viga en voladizo con tratamiento de capa viscoelástica.

	Capas elásticas	Capa viscoelástica
Espesor, mm	1.524	0.127
Módulo de elasticidad, kN/m ²	69 x 10 ⁶	2.1 x 10 ³
Relación de Poisson	0.3	0.499
Factor de pérdida	0	1
Densidad de masa, kg/m ³	2800	970

Tabla 2: Propiedades de los materiales de la viga emparedado.

Se creó en ABAQUS un modelo en 3D en donde se representan tanto las capas elásticas como la viscoelástica con elementos tipo C3D20: estos son elementos sólidos (tipo “ladrillo”) de orden cuadrático con 20 nodos. Luego de varias pruebas numéricas se comprobó que un modelo de 3D con 20 elementos en cada capa produce resultados que no varían significativamente con respecto a los valores que se obtienen cuando se incrementa el número de elementos utilizados para representar la viga de validación.

Con el fin de obtener las frecuencias naturales amortiguadas y los factores de pérdida a través del *método de media potencia*, (Craig Jr. 1981), se realizó en ABAQUS un análisis de vibración forzada para una excitación armónica en un rango de frecuencias que captura los

tres primeros modos de vibración de la viga. Además, para la misma viga emparedado en voladizo se encontraron las frecuencias naturales amortiguadas y los factores de pérdida modal utilizando la solución numérica propuesta por Rao. La Tabla 3 muestra los resultados encontrados al aplicar el método de media potencia a los dos modelos creados, en el mismo orden que los resultados obtenidos con ABAQUS para su comparación.

Modo	ABAQUS 2D				ABAQUS 3D				Fórmula de Rao	
	ω_a	ω_b	ω_i	η_i	ω_a	ω_b	ω_i	η_i	ω_i	η_i
1	59.789	73.343	67	0.202	61.896	76.563	69.5	0.211	61.52	0.285
2	275.605	336.74	304	0.201	288.876	351.544	318.5	0.197	292.65	0.243
3	703.21	808.306	749.5	0.140	744.646	850.434	791.5	0.134	736.69	0.153

Tabla 3: Propiedades modales para una viga emparedado en voladizo con diferentes modelos.

La Tabla 4 resume los valores encontrados por otros autores, como Soni y Bogner (1982), Johnson y Kienholz (1982), Sun et al. (1990) y Macé (1994), para el factor de pérdida y la frecuencia natural para el mismo modelo.

Modo	Soni y Bogner		Johnson y Kienholz		Sun et al		Mace	
	ω_i	η_i	ω_i	η_i	ω_i	η_i	ω_i	η_i
1	67.4	0.2019	64.5	0.285	67.5	0.1997	64.3	0.2646
2	307	0.218	301.9	0.245	298.1	0.2117	296.7	0.2172
3	762	0.15	719.9	0.148	752.8	0.1452	744.3	0.1328

Tabla 4: Comparación de los factores de pérdida y frecuencias naturales obtenidos por otros autores.

Los resultados que se muestran en la Tabla 4 comparados con los de la Tabla 3 evidencian que existe una buena correspondencia con los logrados por otros autores. De este modo, se logró la validación del modelo creado usando el programa ABAQUS para el propósito a desarrollar en esta investigación.

3 ESPESOR ÓPTIMO PARA LA DISIPACIÓN DE ENERGÍA

Es importante conocer, para una viga de geometría determinada y con condiciones de borde específicas, si es posible o no disipar una cantidad de energía razonable mediante el uso de un material viscoelástico, y de ser posible, con cuál combinación de áreas, inercia, longitud y material se puede lograr la mayor disipación.

3.1 Estudio de la Solución Numérica Propuesta por Rao.

El estudio de las expresiones derivadas por Rao (1978) para calcular el factor de pérdida η y la frecuencia natural ω de una viga emparedado puede ayudar a comprender mejor el mecanismo del fenómeno de disipación de energía en vigas con este tratamiento. Las expresiones para el factor de frecuencia Ω y el factor de pérdida η dependen de dos parámetros: el factor geométrico, Y , y el parámetro de cortante, g , los cuales a su vez dependen de las propiedades geométricas y de los materiales que componen la viga emparedado. La

Figura 4 muestra cómo varía el factor de pérdida η con respecto al factor de cortante g para una viga en voladizo vibrando en el primer modo y con un valor de $\eta_2 = 1$. Rao mostró que el valor de g para lograr una mayor disipación de energía depende de las condiciones de frontera de la viga y del modo de vibración que se considere. Curvas similares a la de la Figura 4 se pueden obtener para vigas con otras condiciones de apoyo.

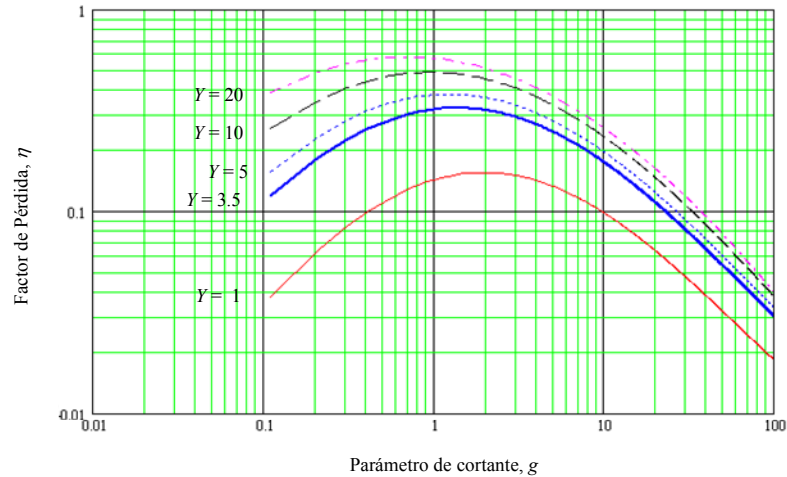


Figura 4: Variación del factor de pérdida con el parámetro de cortante para varios valores de Y .

Si bien las expresiones derivadas por Rao están asociadas a una viga de sección rectangular, es posible definir unos factores iguales para g y Y para una sección más general de ancho b como la que se muestra en la Figura 5.

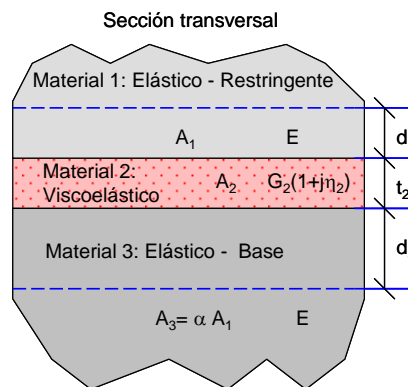


Figura 5: Sección transversal arbitraria de una viga con tratamiento a cortante.

Para simplificar el problema reduciendo la cantidad de variables se propone considerar que los dos materiales elásticos son iguales: $E_1 = E_3 = E$ y por conveniencia se relacionan las áreas de las dos capas elásticas a través de un factor α como: $A_3 = \alpha A_1$, con $\alpha \geq 1$. Reemplazando estas dos suposiciones junto con $A_2 = b t_2$ en la ecuación del parámetro de cortante (5), éste se reduce a:

$$g = \frac{G_2 b L^2 (1 + \alpha)}{t_2 E A_3} \quad (8)$$

De manera similar, se pueden reemplazar los parámetros que se definieron anteriormente en la ecuación (6) y encontrar una expresión para calcular el factor geométrico Y . Ésta resulta ser:

$$Y = \frac{(d_1 + t_2 + d_3)^2}{I_1 + I_3} \frac{A_3}{1 + \alpha} \quad (9)$$

Las dimensiones d_1 , t_2 y d_3 se muestran en la Figura 5.

Se nota que la expresión encontrada para Y depende exclusivamente de las características geométricas de la sección transversal de cada una de las partes que componen la viga emparedado. Dependiendo de la variable que se considere conocida, se pueden implementar dos procedimientos para obtener la magnitud del espesor de la capa viscoelástica t_2 , a partir del cual es posible determinar el factor de pérdida. En un procedimiento se supone conocido el valor de g y en el otro se considera conocido el valor de Y .

3.1.1 Factor de pérdida escogiendo un valor para g .

Despejando t_2 de la ecuación (8) se puede obtener una expresión para calcular el espesor de la capa viscoelástica de la siguiente manera:

$$t_2 = \frac{G_2}{Eg} \frac{b(1+\alpha)}{A_3} L^2 \quad (10)$$

En la práctica, uno conoce las características geométricas y del material de la viga base. Para hacer uso de la formulación de Rao y comprender lo que podría ocurrir en un caso más general, se supone a manera de ejemplo que se tiene una viga rectangular con las características geométricas y de los materiales conocidos. Inicialmente se puede definir un valor razonable para el factor $\alpha = A_3/A_1$. De la ecuación (10) se nota que el espesor de la capa viscoelástica es directamente proporcional al factor α . Asumiendo que el material viscoelástico tiene un módulo G_2 constante y basado en las expresiones de Rao representadas en forma gráfica, se puede determinar un valor aproximado del parámetro de cortante g que maximiza el factor de pérdida η de la viga emparedado para unas condiciones de apoyo dadas. Llamando g_r a este valor del parámetro de cortante y reemplazando las demás variables en la ecuación (10) se puede calcular el valor del espesor requerido, t_{2r} , para una longitud determinada. Ahora bien, al especificar estos factores queda completamente definida la geometría de la viga emparedado, con lo cual se puede calcular el factor geométrico Y y consecutivamente el factor de pérdida η .

A manera de ejemplo se estudia la misma viga en voladizo discutida en la sección anterior cuyas propiedades están resumidas en la Tabla 2. Esta configuración tiene un espesor de la capa viscoelástica $t_2 = 0.127$ mm con el cual se obtuvieron valores de $Y = 3.521$, $g = 3.267$ y $\eta = 0.285$ en el primer modo. En la Figura 6 se muestra la variación del factor de pérdida para el valor de $Y = 3.521$ asociado a la viga emparedado de la Tabla 2 y se indica el punto de coordenadas $g = 3.267$, $\eta = 0.285$. En esta gráfica se puede notar que el valor de g que produce un mayor amortiguamiento es aproximadamente igual a 1.5. Entonces, sustituyendo en la ecuación (10) un valor de g igual a 1.5 y manteniendo los mismos valores de las demás variables se puede encontrar un espesor de la capa viscoelástica que aumenta la disipación de energía. Los nuevos valores encontrados son los siguientes: $t_2 = 0.2765$ mm, $Y = 4.187$ y $\eta = 0.3486$. Es importante notar que se ha tomado un valor de $g = 1.5$ como un valor aproximado, pues cada curva de Y tiene su propio punto máximo. Como se puede observar en la Figura 6, el valor g asociado al punto máximo de la curva para $Y = 4.187$ es ligeramente menor que $g = 1.5$.

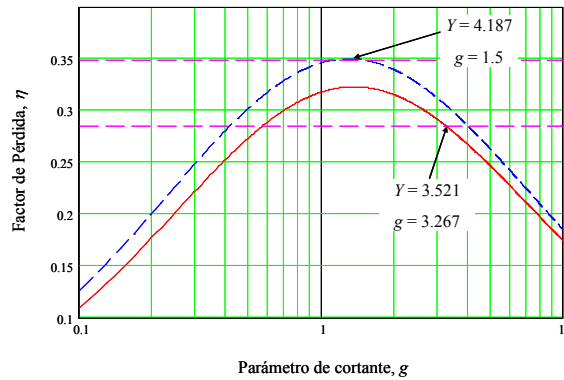


Figura 6: Factor de pérdida máximo.

Al escoger un valor de g , el valor de Y queda condicionado al espesor t_2 calculado y es posible que este Y sea muy bajo, con lo cual, no se lograría una disipación de energía favorable. Rao sugiere usar valores de Y mayores o iguales a 15. Para poder incrementar el valor de Y manteniendo tanto las secciones transversales de las partes elásticas como las propiedades de los materiales, se puede concluir de la ecuación (9) que esto sólo es posible aumentando el valor del espesor t_2 . Para esto uno tiene dos opciones: se puede incrementar directamente el espesor t_2 y recalculer el valor de g con la ecuación (8), o la otra opción es tomar un valor de g fijo pero aumentar la longitud de la viga y calcular el valor de t_2 con la ecuación (10).

3.1.2 Factor de pérdida escogiendo un valor para Y .

Se puede obtener otro procedimiento para definir la configuración de la viga emparedado si se supone conocido el valor del factor geométrico Y . Partiendo de la ecuación (9) se puede despejar el espesor de la capa viscoelástica asociado a un valor dado de Y . Si se llama Y_o a este valor del factor geométrico, se tiene la siguiente expresión:

$$t_2 \geq \sqrt{\frac{Y_o (I_1 + I_3)(1 + \alpha)}{A_3}} - (d_1 + d_3) \quad (11)$$

Ahora bien, puesto que los valores de t_2 deben ser mayores que cero, de la ecuación (11) se puede demostrar que el valor de Y_o debe satisfacer la siguiente inecuación:

$$Y_o \geq \frac{A_3 (d_1 + d_3)^2}{(I_1 + I_3)(1 + \alpha)} \quad (12)$$

Para efectos de comparación se aplica este procedimiento a la viga en voladizo estudiada en la sección anterior. Reemplazando los datos en la ecuación (12) se encuentra un valor mínimo para Y_o igual a 3. Se propone entonces usar un valor de $Y_o = 15$, como sugiere Rao. Usando la ecuación (11) se obtiene un valor de $t_2 = 1.883$ mm, con el cual $g = 0.22$ y $\eta = 0.437$. La Figura 7 muestra los resultados encontrados en el gráfico de η versus g en la curva superior. En esta figura también se muestran para ser comparados el punto inicial ($Y = 3.521$, $g = 3.267$ y $\eta = 0.285$) y el punto logrado al mantener el valor de g constante ($Y = 4.187$, $g = 1.5$ y $\eta = 0.3486$). Si bien se ha logrado incrementar el factor de pérdida, se puede notar de la gráfica que el punto no corresponde al valor máximo de la curva $Y = 15$. La razón se debe a que sólo se permitió variar el espesor de la capa viscoelástica.

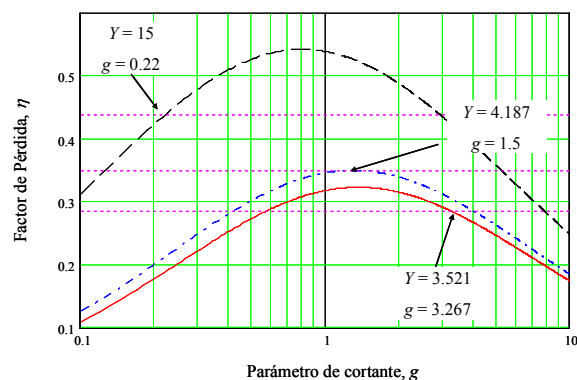


Figura 7: Comparación del factor de pérdida.

3.1.3 Aplicación a una viga con sección estándar.

Hasta el momento se consideró una viga de sección rectangular; sin embargo, en aplicaciones de ingeniería civil, las secciones de acero típicamente usadas tienen forma de I (Perfiles W), C (Canales) y L (Angulares). De este modo, a continuación se estudia una viga W 14X109 con una longitud $L = 2.7432$ m (9 pies) en voladizo. De nuevo, el objetivo es estimar el espesor de la capa viscoelástica que se requiere para un tratamiento a cortante en la superficie exterior de una ala. Se procede a suponer un valor de $Y = 15$ y un espesor de la capa restringente igual al espesor del ala, 21.844 mm (con el cual $\alpha = 2.526$). Usando la ecuación (11) con las propiedades de la sección, se obtiene que el espesor requerido es de 956.22 mm, el cual por supuesto es irreal. Aún si se admitiera este espesor tampoco se lograría un factor de pérdida favorable debido a que el valor del parámetro de cortante asociado a esta configuración es muy bajo: $g = 0.000581$. Definiendo el valor de $Y = 5$ con $\alpha = 1$, el nuevo valor para t_2 es 292.48 mm con el cual el parámetro de cortante g sigue tomando un valor bajo, esta vez igual a 0.001078.

Hasta este punto, se puede concluir que a pesar de que se están tomando una placa restringente y una capa viscoelástica de espesores prácticamente irrealistas no es posible lograr una disipación de energía favorable. Revisando la ecuación (8) se puede concluir que para una sección transversal dada de la viga emparedado, un aumento del parámetro de cortante va a ser posible sólo si se continúa disminuyendo el espesor de la capa viscoelástica o si se aumenta la longitud de la viga. La primera opción se descarta porque al disminuir el espesor de la capa viscoelástica, también se disminuye el factor geométrico Y lo cual conlleva a una menor disipación de energía. Por lo tanto, para un espesor fijo de la capa viscoelástica, asociado a un valor adecuado de Y , sólo se podrá alcanzar la mayor disipación de energía si la viga tiene una longitud apropiada.

Considerando una longitud de 27.432 m, un valor de $\alpha = 1$ y un $Y = 5$ (que equivale a $t_2 = 292.48$ mm), el valor del parámetro de cortante g toma un valor de 0.107807, el cual está asociado a valores del factor de pérdida con interés práctico. Por supuesto, en la práctica se espera tener un espesor de la capa viscoelástica mucho menor que el presentado hasta ahora. De este modo, se puede continuar disminuyendo el valor del factor geométrico. Por ejemplo, si se toma $Y = 1$ ($t_2 = 15$ mm), el valor del parámetro de cortante es $g = 2.102150$, el cual es un valor aceptable. Inicialmente uno tendería a pensar que al usar un espesor de la capa viscoelástica mayor se logra una mayor disipación de energía, lo cual no es cierto, como se ha mostrado en la discusión anterior. De otro lado, los estudios presentados muestran que tampoco es necesario un valor del factor geométrico mayor o igual a 15, como sugirió Rao.

A continuación se estudian dos aplicaciones más de vigas con secciones estándar y una capa viscoelástica. Ambos casos se analizan usando las fórmulas de Rao y también se modelan las vigas con ABAQUS en 3D. Se considera en los dos casos que las vigas vibran en la dirección vertical (perpendicular a la capa viscoelástica). Primero se considera una viga en voladizo con una longitud de 2.7432 m, formada por dos perfiles en C, MC 10X8.4, separados entre sí por un material viscoelástico de espesor $t_2 = 2.8$ mm, ($Y = 0.8197$, $g = 1$). La sección transversal de la viga compuesta se muestra en la Figura 8. Los resultados logrados con la fórmula y con el modelo de elementos finitos se presentan en la Tabla 5 y muestran buena correspondencia. Para el caso donde se toma $Y = 15$ se encuentra un espesor $t_2 = 64.17$ mm y un valor de $g = 0.043672$, con los cuales, se obtiene un factor de pérdida η de 0.1868 en el primer modo de vibración.

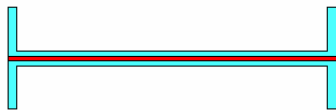


Figura 8: Sección transversal de una viga formada por dos canales con material viscoelástico intermedio.

Modo	Fórmula de Rao		ABAQUS	
	ω_i	η_i	ω_i	η_i
1	4.33	0.1221	4.48	0.1100
2	24.83	0.0368	25.65	0.0341
3	68.08	0.0149	70.12	0.0134

Tabla 5: Propiedades dinámicas para una viga doble canal, 2C MC10X8.4, con tratamiento viscoelástico.

Como otra aplicación se tiene una viga también en voladizo con una longitud de 2.7432 m, formada por dos perfiles angulares, 2L 4X4X3/4, con un material viscoelástico intermedio. La Figura 9 muestra la sección transversal de la viga emparedado. Para estimar el espesor se puede inicialmente suponer un $Y = 15$ con lo cual se obtiene un espesor $t_2 = 169$ mm; no obstante, este valor hace que el parámetro de cortante g tome un valor muy bajo igual a 0.002982 ocasionando así un factor de pérdida también bajo igual a 0.01392. Sin embargo, si se toma $g = 1$ se obtiene $t_2 = 0.504$ mm, con lo cual se logra un valor de $Y = 1.164$. Si bien este valor de Y es bajo comparado con 15, el factor de pérdida logrado en este caso es 0.159912, siendo éste un valor aceptable para aplicaciones prácticas. De nuevo se puede notar que el aumento en el espesor de la capa viscoelástica no garantiza un incremento en la disipación de energía y tampoco es estrictamente necesario que el valor del factor geométrico Y tome valores mayores o iguales a 15. La Tabla 6 resume los resultados encontrados con la fórmula de Rao y con un modelo 3D en ABAQUS al usar una capa viscoelástica con un espesor $t_2 = 0.79375$ mm, ($Y = 1.175$). También aquí se observa que el modelo de ABAQUS entrega resultados similares a los obtenidos con la fórmula numérica propuesta por Rao.

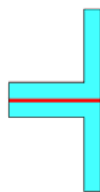


Figura 9: Sección transversal de una viga formada por dos angulares con material viscoelástico intermedio.

Modo	Fórmula de Rao		ABAQUS	
	ω_i	η_i	ω_i	η_i
1	12.48	0.1399	13.17	0.1278
2	71.76	0.0377	74.91	0.0343
3	198.75	0.0143	202.33	0.0125

Tabla 6: Propiedades dinámicas para una viga formada por 2L 4X4X3/4 con tratamiento viscoelástico.

3.2 Factor geométrico Y en términos de α y g .

Una de las preguntas que surge en el proceso de diseñar una viga emparedado es determinar con cuál combinación se puede lograr una mayor disipación de energía. Para responder a esta pregunta se propone graficar la expresión del factor de pérdida para el primer modo en términos del parámetro de cortante g y del factor geométrico Y derivada por Rao. Se considera que la viga está en voladizo. Un estudio similar podría hacerse para otras condiciones de apoyo. La Figura 10 muestra la superficie obtenida. En esta superficie se nota que valores de Y altos con valores de g bajos están asociados a factores de pérdida favorables.

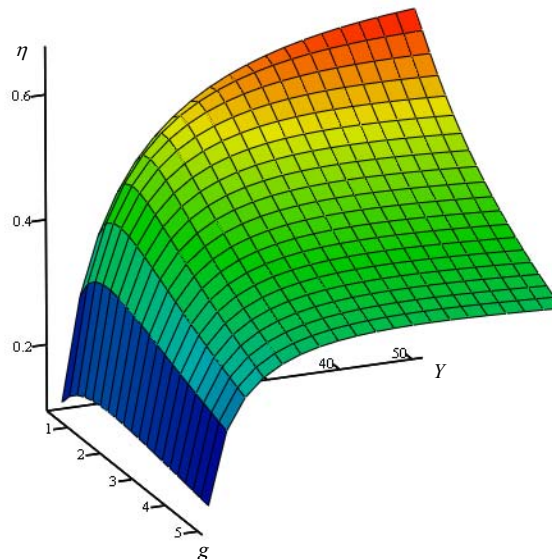


Figura 10: Variación del factor de pérdida η en una viga emparedado en voladizo vibrando en el primer modo.

Con la intención de aclarar mejor el comportamiento del factor de pérdida se muestra en la Figura 11 la variación de η versus g para varios valores de Y . Se nota que valores de g cercanos a 1 son adecuados para conseguir valores altos de η .

En la Figura 12 se muestra la variación de η versus Y para varios valores del parámetro de cortante. De esta gráfica se nota la conveniencia de usar valores bajos para g . Por ejemplo, valores de g entre 0.5 y 1.0 podrían usarse para iniciar un proceso de iteración. También se observa que tampoco es conveniente tomar valores muy altos de Y , pues en esta zona el factor de pérdida o se mantiene aproximadamente constante o empieza a disminuir. Valores de Y mayores o iguales a 2, están asociados a factores de pérdida mayores o aproximadamente iguales a 0.2. Nótese además que si el valor de Y es bajo, por ejemplo $Y \leq 4$, se nota que todas las curvas de η para distintos g son prácticamente coincidentes, por lo que en este caso sería razonable tomar un valor de $g = 3$ por ejemplo.

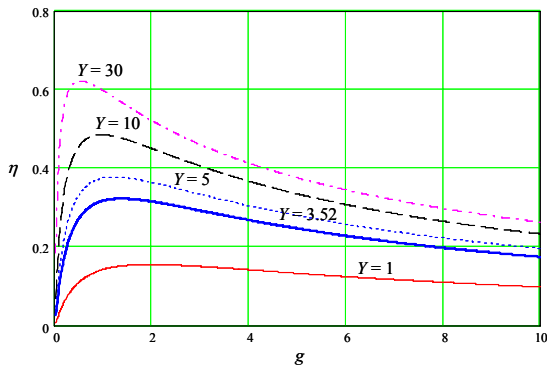


Figura 11: Variación del factor de pérdida η con respecto al parámetro de cortante g .

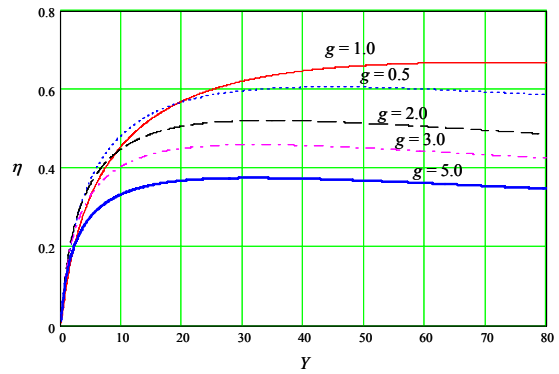


Figura 12: Variación del factor de pérdida η con respecto al factor geométrico Y .

Lo anterior nos da una idea de los valores adecuados que se deben tener para el factor geométrico Y y para el parámetro de cortante g . Ahora bien, surge la pregunta: ¿cómo lograr estos valores? Para esto se propone encontrar una expresión que relacione los dos parámetros estudiados anteriormente, g y Y , y adicionalmente la relación entre las áreas, α . La expresión se puede obtener de la siguiente manera:

Primero se expresa el espesor de la capa restringente, t_1 , en términos de α :

$$t_1 = \frac{A_3}{\alpha b}$$

Con este valor de t_1 se calcula la inercia I_1 y la distancia d_1 como:

$$I_1 = \frac{1}{12} b t_1^3 = \frac{1}{12 b^2} \frac{A_3^3}{\alpha^3}$$

$$d_1 = \frac{t_1}{2}$$

Reemplazando estas dos últimas ecuaciones junto con la expresión para t_2 , ecuación (10), en la ecuación (9) se obtiene:

$$Y = \frac{\left(\frac{A_3}{2\alpha b} + \frac{G_2 b L^2 (1+\alpha)}{g E A_3} + d_3 \right)^2 \frac{A_3}{1+\alpha}}{\frac{1}{12 b^2} \frac{A_3^2}{\alpha^3} + I_3} \quad (13)$$

Debido a que en la práctica se conocen las propiedades de los materiales (G_2 y E) y las dimensiones de la viga (A_3 , I_3 , d_3 , b y L) a la cual se le quiere aplicar el tratamiento a cortante, esta ecuación permite obtener una función para Y en términos de α y g . A manera de ejemplo se usan las propiedades de los materiales y las dimensiones de la viga base presentadas en la Tabla 2 para calcular Y con la ecuación (13). La superficie que se obtiene se muestra en la Figura 13.

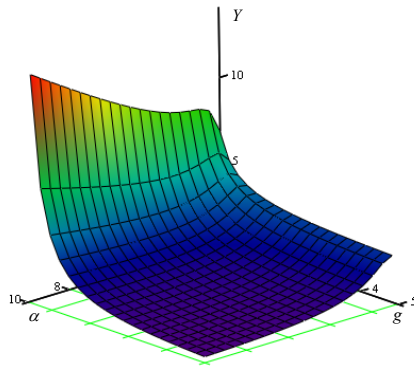


Figura 13: Variación del factor geométrico Y con respecto a la razón entre las áreas elásticas α y al parámetro de cortante g .

Para observar mejor el comportamiento se muestra en la Figura 14 una gráfica de Y versus α para diferentes valores de g . Se puede observar que a medida que α aumenta se presenta inicialmente una disminución del factor geométrico; sin embargo, después de un valor posterior a 5 aproximadamente, Y empieza a incrementar nuevamente. Valores altos de α implican un menor espesor de la capa restringente, lo cual es conveniente debido a que no se desea modificar significativamente la rigidez ni el peso de la estructura cuando se aplica un tratamiento de cortante. Sin embargo, aumentar α implica incrementar el espesor de la capa viscoelástica, lo cual puede llevar a espesores inadecuados. En esta gráfica también se nota que valores de g menores a 1, hacen que aumente más rápidamente el valor de Y a medida que se incrementa el valor de α , lo cual es deseable pues se quieren valores altos para Y .

La Figura 15 muestra la variación del factor geométrico con respecto al parámetro de cortante, para diferentes valores de α . En esta figura se aprecia mejor el efecto de g en el valor de Y : valores menores de 1 están asociados a valores altos de Y .

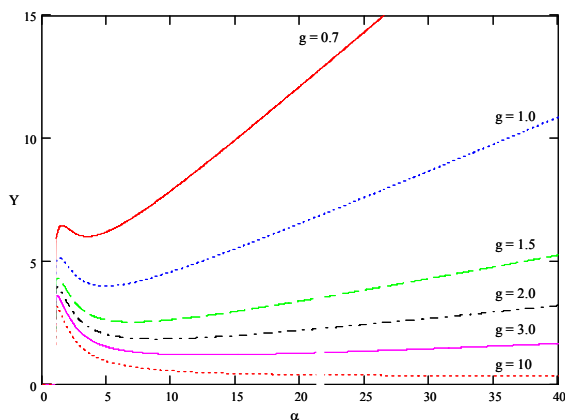


Figura 14: Variación del factor geométrico Y con respecto a la razón entre las áreas elásticas α .

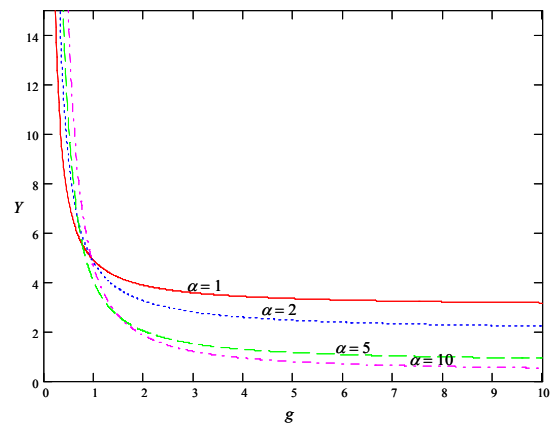


Figura 15: Variación del factor geométrico Y con respecto al parámetro de cortante g .

Retomando la viga W 14X109 con una longitud de 2.7432 m y usando la expresión (13) se procedió a graficar la variación de Y con respecto a g y α . La superficie ha sido generada para valores de g en el intervalo de $[0.5, 2]$ y se muestra en la Figura 16 (a). Se puede notar que no es posible lograr valores altos para el factor geométrico, siendo el más alto aproximadamente igual a 0.87. Para conseguir este valor se requiere un valor de $\alpha = 1$, es decir, usar la misma

área de la viga original en la capa restringente, lo cual evidentemente no es práctico. Se puede decir que para las dimensiones que tiene la viga, no es factible lograr una disipación de energía significativa mediante un tratamiento a cortante. Vale la pena notar que un aumento en α disminuye aún más el factor geométrico y por otro lado, esto implica un mayor espesor de la capa viscoelástica para un valor de g dado. La Figura 16 (b) es similar a la figura anterior pero fue generada usando un intervalo para g de $[0.001, 0.01]$. Esta gráfica muestra que es posible lograr valores altos de Y , pero estos valores de g están asociados a valores de η que no tienen un interés práctico, y por otro lado, para lograrlos, se requieren espesores de la capa viscoelástica exagerados.

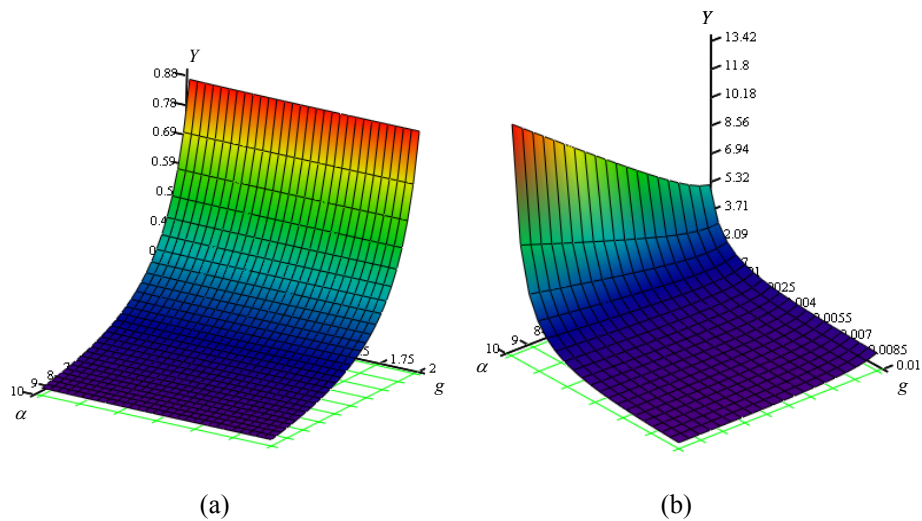


Figura 16: Variación del factor geométrico Y con respecto a α y g para una viga W14X109 con una longitud de 2.7432 m. (a) g entre 0.5 y 2, (b) g entre 0.001 y 0.1.

A continuación se considera el efecto de la longitud en el factor geométrico Y usando distintos valores para el parámetro de cortante g . Se consideraron cuatro valores de g : 0.5, 1.0, 1.5 y 2.0 para construir las curvas. Los resultados se muestran en las siguientes tres gráficas resumidas en la Figura 17. En la Figura 17 (a) que corresponde a una viga con longitud $L = 2.7432$ m las cuatro curvas se superponen en una sola. Como se muestra en la Figura 17 (b) a medida que se aumenta la longitud de la viga, las curvas para diferentes valores de g empiezan a diferenciarse. También se nota que es posible lograr valores mayores para Y , especialmente para valores de g menores de 1, sin embargo, esto implica tener que usar un mayor valor para el espesor de la capa viscoelástica. Se puede afirmar que la longitud de la viga va a limitar la cantidad de energía que se pueda disipar mediante un tratamiento a cortante.

Los resultados muestran que las longitudes requeridas para lograr una disipación de energía razonable en una viga W14x109 son grandes, lo cual implica, espesores de la capa viscoelástica exagerados.

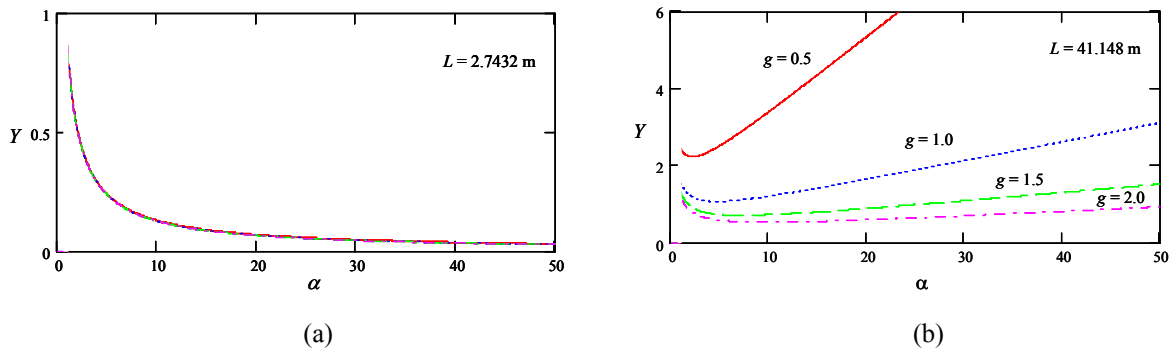


Figura 17: Variación del factor geométrico Y con respecto a α para una viga W14X109 con diferentes longitudes.

3.3 Rango de valores adecuados para el parámetro de cortante g y factor geométrico Y

Basado en los resultados anteriores, se nota que es posible encontrar varias soluciones manteniendo algunos parámetros fijos, siendo unas más eficientes que otras. De este modo, es importante definir un dominio de valores para los cuales la solución lograda confiera valores del factor de pérdida mayores o iguales a un valor deseado. La Figura 18 muestra una región de soluciones favorables. Para definir la región se especifican dos límites para el parámetro de cortante, uno inferior y otro superior, g_a y g_b , respectivamente y se limita el valor del factor geométrico Y a un valor mínimo Y_o . Reemplazando g_a y g_b en las ecuación (10) se obtienen t_a y t_b respectivamente, lo cuales determinan un intervalo de valores $[t_b, t_a]$ para el espesor de la capa viscoelástica. Sustituyendo el valor de Y_o en la ecuación (11) se obtiene un valor t_Y el cual define un segundo intervalo de valores para el espesor de la capa viscoelástica, $[t_Y, \infty]$. Haciendo la intersección de estos dos intervalos se logra establecer un conjunto de posibles valores para t_2 , cuya solución produce valores del factor de pérdida en el rango deseado.

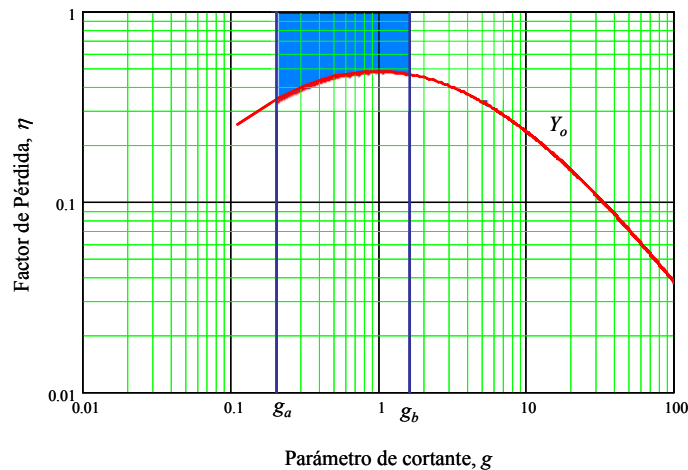


Figura 18: Factor de pérdida η en un rango deseado.

Como ejemplo, de nuevo se usan los datos de la viga en voladizo con las propiedades definidas en la Tabla 2 pero se permite variar el espesor de la capa viscoelástica. Se toma $g_a = 0.1$ y $g_b = 1$, con lo cual resulta un intervalo $[t_b, t_a]$ para el espesor de la capa viscoelástica de $[0.4149, 4.149]$ mm y se escoge $Y_o = 15$ que determina otro intervalo para el espesor de $[1.883, \infty]$ mm. Se realiza la intersección de los dos intervalos encontrados y se obtiene que los valores convenientes para el espesor de la capa viscoelástica están en el intervalo $[1.883,$

4.149] mm. Si se selecciona un valor de $t_2 = 3.5$ mm, los valores obtenidos son los siguientes: $g = 0.118$, $Y = 32.602$ y $\eta = 0.507$. Si bien este valor es más alto que los encontrados previamente, se requiere un espesor de la capa viscoelástica mayor. Ahora bien, si se mantiene este espesor de la capa viscoelástica y se toma un valor de $\alpha = 4$, se obtiene: $g = 0.296$, $Y = 20.165$ y $\eta = 0.532$. Este valor de η es mayor que el anterior, con la ventaja de que ahora se usa un área cuatro veces menor en la capa restringente.

Lograr un diseño óptimo que produzca la mayor disipación de energía puede tornarse en un proceso más o menos complejo, dependiendo de si se dispone o no de un modelo que permita orientar el proceso de iteración para el dimensionamiento de los parámetros o variables que se pueden modificar. Por otro lado, si se tiene en cuenta que la propiedad del material viscoelástico es una función de la frecuencia, el proceso de lograr un diseño óptimo puede ser aún más complicado.

3.4 Modelamiento de una Columna con Tratamiento de Amortiguamiento.

Se considera una columna W 14X109 con tratamiento viscoelástico a cortante en las dos superficies exteriores a sus alas. De la ecuación (10) se puede observar que el espesor de la capa viscoelástica es directamente proporcional a L^2 y a α . De este modo, para poder disipar energía convenientemente en una sección W es lógico esperar grandes valores para el espesor de la capa viscoelástica. Sin embargo, puesto que no es práctico usar valores exagerados ni en la capa viscoelástica ni en la capa restringente, se hace necesario definir unos espesores racionales y evaluar su efectividad en el amortiguamiento estructural. La columna se modela usando ABAQUS y se consideran diferentes espesores de tratamiento. En la Figura 19 (a) se muestra un esquema de la columna a modelar con dos capas viscoelásticas. La columna tiene su extremo inferior empotrado y su extremo superior libre de desplazarse horizontalmente, pero con la rotación restringida, como se muestra en la Figura 19 (b). En este modelo se tiene en cuenta la variación de las propiedades mecánicas del material viscoelástico con respecto a la frecuencia. Estas propiedades se obtienen de la Figura 2.

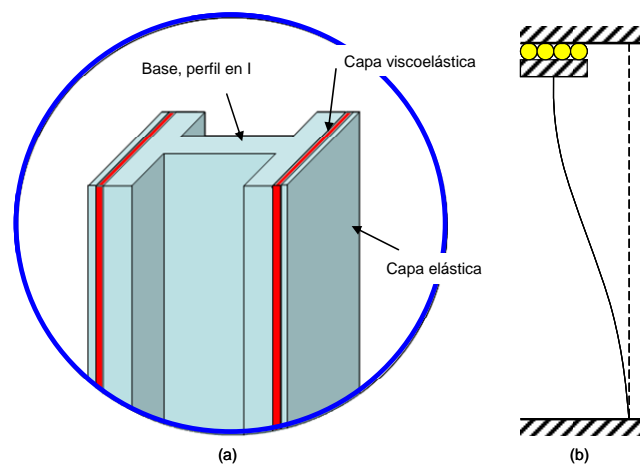


Figura 19: (a) Columna con tratamiento viscoelástico. (b) Condiciones de frontera de la columna a modelar.

Se calcularon las frecuencias naturales amortiguadas y los factores de pérdida para los primeros tres modos de vibración. Se consideraron tres espesores para la capa elástica restringente. Los resultados obtenidos se resumen en la Tabla 7. Cuando se mantiene fijo el espesor t_1 de la capa restringente y se aumenta el espesor t_2 de la capa viscoelástica, los resultados en la tabla muestran que se presenta una disminución tanto de las frecuencias naturales como de los factores de pérdida para los tres primeros modos. Estos resultados

confirman el hecho de que aumentar el espesor de la capa viscoelástica no necesariamente implica un aumento en el factor de pérdida. El modelo con un espesor en la capa restringente $t_1 = 22.225$ mm y un espesor de la capa viscoelástica $t_2 = 3.175$ mm es el que tiene los mayores factores de pérdida. Sin embargo, dichos valores (0.0064, 0.0036, 0.0024) son bajos para aplicaciones de ingeniería civil. Si se considera un solo tratamiento y se calcula el valor de α para los tres casos considerados, ($t_1 = 3.175$ mm - $\alpha = 17.38$; $t_1 = 12.7$ mm - $\alpha = 4.34$; $t_1 = 22.225$ mm - $\alpha = 2.48$), retomando la Figura 17 (a) se puede notar que el modelo con el menor valor de α esta asociado a un valor mayor del factor geométrico Y y por lo tanto, con el valor más alto para el factor de pérdida η como efectivamente ha sido mostrado en la Tabla 7.

Espesor de capa		Propiedades Dinámicas					
Restringente	Viscoelástica						
t_1 (mm)	t_2 (mm)	ω_1 (Hz)	η_1	ω_2 (Hz)	η_2	ω_3 (Hz)	η_3
3.175	3.175	76.3	0.0188	293.1	0.0093	547.8	0.0056
	12.700	74	0.0092	286.1	0.0048	535.3	0.0028
	22.225	72.6	0.0064	280.6	0.0036	524.2	0.0024
12.7	3.175	66.9	0.0310	257.4	0.0159	479.3	0.0085
	12.700	65.1	0.0104	251.1	0.0059	465.1	0.0041
	22.225	64.1	0.0068	246.6	0.0043	452.2	0.0045
22.225	3.175	60.4	0.0336	232.4	0.0181	432.1	0.0098
	12.700	58.9	0.0107	226.6	0.0064	415.7	0.0052
	22.225	58.1	0.0071	222.4	0.0048	400.7	0.0065

Tabla 7: Propiedades dinámicas de una columna W 14X109 con diferentes tratamientos viscoelásticos.

4 CONCLUSIONES

La disipación de energía que se logra al aplicar un tratamiento amortiguador de capa restringida a una viga está fuertemente asociada a las características geométricas de cada una de las partes que forman la viga emparedado. Para cada sección transversal que se adopta, existe una longitud óptima para disipar energía. Para las longitudes típicas que se usan en los pórticos de acero construidos con perfiles en forma de I, la disipación que se logra con un tratamiento de cortante es muy baja y se requieren espesores irrealistas. Se mostró que incrementar el espesor de la capa viscoelástica no necesariamente implica un aumento en la disipación de energía. De acuerdo a los resultados obtenidos, las estructuras formadas mediante vigas con secciones canales o angulares presentan una mejor posibilidad para la aplicación efectiva de un tratamiento de cortante.

REFERENCIAS

- Craig Jr., R. R. *Structural Dynamics an Introduction to Computer methods*, John Wiley & Sons, New York.1981.
- Christensen, R. M. *Theory of Viscoelasticity: an Introduction*, Academic Press, New York.1971.
- DiTaranto, R. A. "Theory of Vibratory Bending for Elastic and Viscoelastic Layered Finite-Length Beams." *Journal of Applied Mechanics*, 32, 881-886. 1965.
- Flugge, W. *Viscoelasticity*, Blaisdell Publishing Company, Waltham, Massachusetts.1967.
- Johnson, C. D., and Kienholz, D. A. "Finite Element Prediction of Damping in Structures with Constrained Viscoelastic Layers." *AIAA Journal*, 20(9), 1284-1290. 1982.

- Lumsdaine, A., and Scott, R. A. "Shape Optimization of Unconstrained Beam and Plate Damping Layers." *Design Engineering Technical conferences*, Vol. 3 - Part C, 15 - 22. 1995.
- Lunden, R. "Optimum Distribution of Additive Damping for Vibrating Frames." *Journal of Sound and Vibration*, Vol 72(3), 391-402. 1980.
- Macé, M. "Damping of Beam Vibrations by Means of a Thin Constrained Viscoelastic Layer: Evaluation of a New Theory." *Journal of Sound and Vibration*, 172(5), 577-591. 1994.
- Mead, D. J., and Markus, S. "The Forced vibration of a Three-layer, Damped Sandwich Beam with Arbitrary Boundary Conditions." *Journal of Sound and Vibration*, 10(2), 163-175. 1969.
- Nashif, A. D., Jones, D. I. G., and Henderson, J. P. *Vibration Damping*, John Wiley & Sons, New York. 1985.
- Oberts, V. H. "Über die Dämpfung der Biegeschwingungen Dünner Bleche durch Fest Haftende Beläge." *Acustica* Vol. 2, 181-194. 1952.
- Plunkett, R., and Lee, C. T. "Length Optimization for Constrained Viscoelastic Layer Damping." *The Journal of the Acoustical Society of America*, Vol 48(1), 150-161. 1969.
- Rao, D. K. "Frequency and Loss Factors of Sandwich Beams Under Various Boundary Conditions." *Journal of Mechanical Engineering Science*, 20(5), 271-282. 1978.
- Ross, D., Ungar, E. E., and Kerwin, E. M. "Damping of Plate Flexural Vibrations by Means of Viscoelastic Laminae." *Structural Damping*, Section 3, ASME Monograph on Structural Damping, New York, 49 - 88. 1959.
- Roy, P. K., and Ganesan. "Dynamic Studies on Beams with Unconstrained layer Damping Treatment." *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 195(3), 417-427. 1996.
- Soni, M. L., and Bogner, F. K. "Finite Element Vibration Analysis of Damped Structures." *AIAA Journal*, 20, 700-707. 1982.
- Sun, C. T., and Lu, Y. P. *Vibration Damping of Structural Elements*, Prentice Hall PTR, Englewood Cliffs, New Jersey. 1995.
- Sun, C. T., Sankar, B. V., and Rao, V. S. "Damping and vibration control of unidirectional composite laminates using add-on viscoelastic materials." *Journal of Sound and Vibration*, 139(2), 277-287. 1990.