

IMPOSICION DE RESTRICCIONES MULTIPUNTO EN LA MODELIZACION CON ELEMENTOS SIN GRADOS DE LIBERTAD ROTACIONALES

Fernando G. Flores

*Departamento de Estructuras, Universidad Nacional de Córdoba, Casilla de Correo 916,
5000 Córdoba-Argentina, y CONICET, fflores@efn.uncor.edu, <http://www.efn.unc.edu>*

Palabras clave:

Láminas delgadas, sin rotaciones, restricciones multipunto, acoplamiento sólido-lámina

Resumen. En la modelización de sólidos en general y de estructuras en particular es muchas veces necesario incluir relaciones de restricción entre distintos grados de libertad. Estas surgen habitualmente cuando se combinan elementos estructurales (viga o lámina) con elementos de sólido, o cuando se combinan elementos estructurales con superficies medias (láminas) o ejes (vigas) no coincidentes. En general estas restricciones conducen a describir la evolución de algunos de los grados de libertad (GdL), a los que se denomina *esclavos* en función de otros GdL a los que se denomina *maestros*. Si los problemas a abordar son geoméricamente no lineales las restricciones también lo serán, lo cual requiere una actualización acorde de la geometría y de la relación tangente (incremental) entre GdL esclavos y maestros. En los elementos estructurales estándar, que incluyen sistemas nodales locales asociados en su evolución a GdL rotacionales, estas restricciones se introducen directamente como una relación entre nudos y en general independientes de los elementos. En el caso de utilizar elementos que no incluyen sistemas nodales locales (rotation-free) no es posible introducir este tipo de restricción directamente entre nudos y resulta necesario incluir información sobre la geometría de los elementos involucrados. En este trabajo se presentan algunos desarrollos cuyo objetivo es poder: a) unir elementos de lámina con elementos de sólido y b) adosar (solapar) parcialmente elementos de lámina entre sí. El primer tipo de restricción es muy utilizado en modelos que responden globalmente al comportamiento de láminas cuando se pretende realizar un análisis local detallado con elementos de sólido a los fines de captar comportamientos tridimensionales. El segundo tipo de restricción es muy importante en distintas tipologías estructurales, en particular en el análisis de piezas aeronáuticas donde diferentes láminas (típicamente de materiales compuestos) van pegadas y/o remachadas entre sí. Los desarrollos están orientados a su implementación en un código con integración explícita de las ecuaciones de movimiento con capacidad para el tratamiento de no-linealidades muy fuertes ya sea geométricas, de material y contacto. Se presentan varios ejemplos que muestran el buen comportamiento de las aproximaciones utilizadas.

1. INTRODUCCIÓN

En la modelización de sólidos en general y de estructuras en particular es muchas veces necesario incluir relaciones de restricción entre distintos grados de libertad. Estas surgen habitualmente en simulaciones diversas cuando se combinan elementos estructurales (viga o lámina) con elementos de sólido, o cuando se combinan elementos estructurales con superficies medias (láminas) o ejes (vigas) no coincidentes. En general estas restricciones conducen a describir la evolución de algunos de los grados de libertad (GdL) del modelo, a los que se denomina *esclavos* en función de otros GdL del modelo a los que se denomina *maestros*. Si los problemas a abordar son geoméricamente no lineales las restricciones también lo serán, lo cual requiere una actualización acorde de la geometría y de la relación tangente (incremental) entre GdL esclavos y maestros. En los elementos estructurales estándar (vigas, láminas, conectores diversos), que incluyen sistemas nodales locales asociados en su evolución a GdL rotacionales, estas restricciones se introducen directamente como una relación entre nudos y en general en forma independiente de los elementos. En el caso de utilizar elementos que no incluyen sistemas nodales locales (rotation-free) no es posible introducir este tipo de restricción directamente entre nudos y resulta necesario incluir información sobre la geometría de los elementos involucrados. En este trabajo se presentan algunos desarrollos cuyo objetivo es poder: a) unir elementos de lámina con elementos de sólido y b) adosar (solapar) parcialmente elementos de lámina entre sí. El primer tipo de restricción es muy utilizado en modelos que responden globalmente al comportamiento de láminas cuando se pretende realizar un análisis local detallado con elementos de sólido a los fines de captar comportamientos tridimensionales. El segundo tipo de restricción es muy importante en distintas tipologías estructurales, en particular en el análisis de piezas aeronáuticas donde diferentes láminas (típicamente de materiales composites) van pegadas y/o remachadas entre sí. Los desarrollos que se presentan abajo están orientados a su implementación en un código con integración explícita de las ecuaciones de movimiento con capacidad para el tratamiento de no-linealidades muy fuertes ya sea geométricas, de material y contacto.

2. UNIÓN DE ELEMENTOS DE LÁMINA SIN ROTACIONES CON ELEMENTOS DE SÓLIDOS

Antes de ver como relacionar un borde de una lámina con una superficie de un sólido, veamos los detalles de cómo fijar un nudo sobre una línea en el caso de que el elemento de lámina incluya GdL rotacionales

2.1. Nudo sobre una arista

Cuando se intenta unir elementos de sólido con elementos basados en teorías técnicas de láminas resulta necesario relacionar los desplazamientos y giros de los nudos de la lámina con los desplazamientos de los nudos del sólido. Para ello en la discretización es posible colocar un nudo de un elemento de viga o lámina sobre la arista de un elemento de sólido. Esto genera una dependencia donde los GDL esclavos son los del elemento de lámina y los GDL maestros son los desplazamientos del sólido.

Se exige que el nudo esclavo \mathbf{x}^S se mantenga sobre una línea definida por los dos nudos maestros \mathbf{x}^1 , \mathbf{x}^2 de tal forma que las distancias del nudo esclavo a los nudos maestro se mantengan proporcionales y que la dirección \mathbf{t}_3^S de la terna local (normal a la lámina) del nudo esclavo se mantenga paralela a la arista, esto es:

$$\mathbf{x}^S = b_1 \mathbf{x}^1 + b_2 \mathbf{x}^2 \quad (1a)$$

$$b_1 = \frac{(\mathbf{x}_0^S - \mathbf{x}_0^1) \cdot (\mathbf{x}_0^2 - \mathbf{x}_0^1)}{\|\mathbf{x}_0^2 - \mathbf{x}_0^1\|} \quad b_2 = 1 - b_1 \quad (1b)$$

$$\mathbf{t}_3^S = \frac{(\mathbf{x}^2 - \mathbf{x}^1)}{\|\mathbf{x}^2 - \mathbf{x}^1\|} \quad (1c)$$

Las relaciones que ligan las velocidades admisibles (desplazamientos virtuales) de los grados de libertad esclavos son:

$$\delta \mathbf{v}^S = b_1 \delta \mathbf{v}^1 + b_2 \delta \mathbf{v}^2 \quad (2a)$$

$$\delta \Omega^S = \frac{1}{\|\mathbf{x}^2 - \mathbf{x}^1\|} (\bar{\mathbf{\Lambda}}^S)^T [\delta \mathbf{v}^2 - \delta \mathbf{v}^1] \quad (2b)$$

donde $\bar{\mathbf{\Lambda}}^S = [\mathbf{t}_1^S, \mathbf{t}_2^S]$ son las dos primeras columnas de la terna local. Notar que la relación que liga $\delta \Omega^S$ con los $\delta \mathbf{v}^i$ es dependiente de la configuración, por lo cual va cambiando durante el proceso, lo cual implica también una actualización de la matriz de masa.

En el caso de que no se incluyan los sistemas locales la restricción se limita a 1.a y 2.a Esta restricción permite unir elementos de sólido con diferente orden de interpolación. Además es un primer paso para unir elementos de lámina sin grados de libertad de rotación con elementos de sólido, que permite transferir los esfuerzos membranales de la lámina al sólido.

2.2. Lado sobre una cara

Para la unión de un elemento de lámina con uno de sólido es necesario que los dos nudos que definen el lado de un elemento de lámina (J y K en la Figura 1) se hayan definidos como nudos esclavos de los nudos que definen la cara (1 – 4 en la figura) del sólido. Es decir que el nudo J se mantendrá a distancias relativas invariantes de los nudos 1 y 2, en tanto que el nudo K se mantendrá a distancias relativas invariantes de los nudos 4 y 3. Lo natural es que los nudos del sólido estén ubicados en la dirección normal al elemento de lámina $\mathbf{t}^{(M)}$ a una distancia igual a la mitad del espesor. La formulación no impone esta condición pero es deseable. Por otro lado en general es necesario utilizar 2 o más elementos de sólido en el espesor de la lámina a los fines de captar correctamente la flexión. El desarrollo que sigue supone que la relación se establece con los nudos extremos del sólido es decir aquellos que están sobre las superficie inferior y superior de la lámina y que los nudos intermedios del sólido se relacionan con los extremos a través de restricciones tipo *nudo sobre una arista*.

Hay tres aspectos que es necesario considerar en el elemento de lámina sobre el lado $J - K$:

1. La evaluación de las deformaciones membranales (primera forma fundamental) en el elemento dependen de la aproximación utilizada. Si se considera el triángulo de deformación constante Flores y Oñate (2001) basta utilizar la geometría del triángulo. En cambio si se utiliza la aproximación en deformaciones impuestas similar al triángulo de deformación lineal Flores y Oñate (2005, 2007) las deformaciones membranales se evalúan a partir de la parcela de 4 elementos, y en este caso se actúa como si fuese un contorno. Las fuerzas nodales equivalentes resultantes asociadas a los nudos J y K pasan en forma estándar a los nudos 1 – 4 a través de las restricciones impuestas por la condición de nudo sobre una arista (usando 2.a).

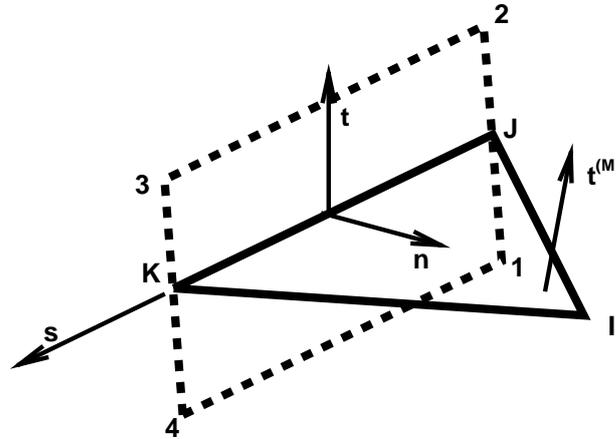


Figura 1: Unión de un elemento de lámina triangular y un elemento de sólido

2. La evaluación de la curvatura se realiza como si el lado estuviera empotrado, donde la normal \mathbf{n} al plano de empotramiento se actualiza paso a paso en función de las coordenadas de los nudos 1 – 4. El cómputo de \mathbf{n} resulta de:

a) el vector \mathbf{s} a lo largo del lado

$$\mathbf{s} = \mathbf{x}^K - \mathbf{x}^J$$

b) un vector no colineal con \mathbf{s} sobre el plano tangente a la cara del sólido en el punto medio del lado, por ejemplo:

$$\mathbf{x}'_\xi = \frac{1}{4} (-\mathbf{x}^1 + \mathbf{x}^2 + \mathbf{x}^3 - \mathbf{x}^4)$$

c) de donde la normal saliente al sólido es

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{x}'_\xi \times \mathbf{s}}{\|\mathbf{x}'_\xi \times \mathbf{s}\|}$$

3. La evaluación de fuerzas residuales debidas a flexión que se realiza de alguna de las dos maneras indicadas a continuación:

2.3. Transferencia de fuerzas equivalentes a los momentos

A partir de los esfuerzos flexionales (m_{ij}) se calculan las fuerzas nodales equivalentes (\mathbf{r}^J) usando las expresiones habituales de la formulación del elemento de lámina, como si el lado estuviese empotrado, y luego se procede de la siguiente manera:

a) A partir del tensor de momentos en el elemento, se calculan las componentes de momento flector y torsor en las direcciones locales al borde

$$\begin{aligned} m_n &= m_{11}n_1^2 + m_{22}n_2^2 + 2m_{12}n_1n_2 \\ m_s &= (m_{22} - m_{11})n_1n_2 + m_{12}(n_1^2 - n_2^2) \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} m_n \\ m_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_1^2 & n_2^2 & 2n_1n_2 \\ -n_1n_2 & n_1n_2 & n_1^2 - n_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{11} \\ m_{22} \\ m_{12} \end{bmatrix}$$

donde (n_1, n_2) son las componentes cartesianas locales de la normal al lado

- b)** De las fuerzas nodales equivalentes previamente calculadas \mathbf{r} , se eliminan las asociadas al momento torsor. Estas fuerzas son un par aplicado en los nudos J y K en la dirección normal al elemento $\mathbf{t}^{(M)}$ de valor igual al momento m_s

$$\bar{\mathbf{r}}^J = \mathbf{r}^J - m_s \mathbf{t}^{(M)}$$

$$\bar{\mathbf{r}}^K = \mathbf{r}^K + m_s \mathbf{t}^{(M)}$$

El objetivo es reemplazar las fuerzas normales al plano de la lámina que aparecen en la teoría de Kirchhoff (asociadas a una parte del corte efectivo) por fuerzas paralelas al plano de la lámina que coincidan con la dirección de las tensiones que producen el momento torsor

- c)** Se definen cuatro puntos ficticios ubicados a una distancia $\pm \frac{h}{2} \mathbf{t}^{(M)}$ sobre y bajo los puntos J y K del lado en los cuales se ubican las siguientes fuerzas (estáticamente equivalentes a los momentos flector y torsor):

Punto	Posición	Fuerza \mathbf{f}^i
1'	$\mathbf{x}^J - \frac{h}{2} \mathbf{t}^{(M)}$	$-\frac{\sigma_l}{2h} (m_n \mathbf{n} + m_s \mathbf{s})$
2'	$\mathbf{x}^J + \frac{h}{2} \mathbf{t}^{(M)}$	$+\frac{\sigma_l}{2h} (m_n \mathbf{n} + m_s \mathbf{s})$
3'	$\mathbf{x}^K + \frac{h}{2} \mathbf{t}^{(M)}$	$+\frac{\sigma_l}{2h} (m_n \mathbf{n} + m_s \mathbf{s})$
4'	$\mathbf{x}^K - \frac{h}{2} \mathbf{t}^{(M)}$	$-\frac{\sigma_l}{2h} (m_n \mathbf{n} + m_s \mathbf{s})$

- d)** Estos cuatro puntos ficticios en principio debieran corresponderse con los puntos 1 – 4. Sin embargo a los fines de una mayor generalidad, no se supone esto último y se proyecta cada punto I' sobre el cuadrilátero definido por 1 – 4, dando lugar a posiciones (ξ_I, η_I) con lo cual se transfieren la fuerza asociada mediante

$$\mathbf{r}_I^N = N^N(\xi_I, \eta_I) \mathbf{f}^I$$

donde las $N^N(\xi, \eta)$ son las habituales funciones de interpolación bilineal y \mathbf{r}_I^N indica la contribución del nodo ficticio I' al nudo de sólido N

2.4. Modificación del cálculo de la curvatura

La segunda opción es no solo escribir las curvaturas en función de la normal al lado \mathbf{n} sino también evaluar las fuerzas nodales equivalentes en función de la variación de dicha normal. La “desventaja” es que requiere realizar modificaciones en las rutinas que evalúan la matriz \mathbf{B}_b tangente, y hace más compleja la programación del elemento. En general las curvaturas en estos elementos sin rotaciones resultan de una suma

$$\begin{bmatrix} \kappa_{11} \\ \kappa_{22} \\ 2\kappa_{12} \end{bmatrix} = \frac{-1}{A} \sum_{i=1}^3 l_i \begin{bmatrix} n_1^2 \\ n_2^2 \\ -n_1n_2 \end{bmatrix} (\mathbf{t}_3 \cdot \mathbf{n}^i) = - \sum_{i=1}^3 h_i \begin{bmatrix} (L_1^i)^2 \\ (L_2^i)^2 \\ -2L_2^i L_1^i \end{bmatrix} (\mathbf{t}_3 \cdot \mathbf{n}^i) \quad (3)$$

donde \mathbf{n}^i es la normal al contorno evaluada en cada elemento adyacente. El producto punto $(\mathbf{t}_3 \cdot \mathbf{n}^i)$ puede ser reemplazado por una aproximación diferente de acuerdo al elemento. Se obtienen valores con mayor precisión Flores y Oñate (2007) si:

- se utiliza el ángulo $\Delta\phi = \sin^{-1}(\mathbf{t}_3 \cdot \mathbf{n}^i)$
- el ángulo $\Delta\phi$ se distribuye proporcionalmente a la rigidez relativa entre elementos adyacentes

Para superficies homogéneas lo segundo implica distribuir $\Delta\phi$ proporcionalmente a la inversa de las alturas de los triángulos $\frac{1}{h_i}$. La expresión de las curvaturas puede entonces escribirse

$$\begin{bmatrix} \kappa_{11} \\ \kappa_{22} \\ 2\kappa_{12} \end{bmatrix} = - \sum_{i=1}^3 h_i \begin{bmatrix} (L_1^i)^2 \\ (L_2^i)^2 \\ -2L_2^i L_1^i \end{bmatrix} 2\gamma_i \quad (4)$$

que para el caso del lado empotrado en el sólido

$$\gamma_i = \sin^{-1}(-\mathbf{t}_3 \cdot \mathbf{n})$$

La variación de las curvaturas resulta

$$\delta \begin{bmatrix} \kappa_{11} \\ \kappa_{22} \\ 2\kappa_{12} \end{bmatrix} = - \sum_{i=1}^3 h_i \begin{bmatrix} (L_1^i)^2 \\ (L_2^i)^2 \\ -2L_2^i L_1^i \end{bmatrix} 2\delta\gamma_i \quad (5)$$

Para el lado unido al sólido

$$\delta\gamma_i = -(\mathbf{t}_3 \cdot \delta\mathbf{n} + \mathbf{n} \cdot \delta\mathbf{t}_3) \quad (6)$$

donde

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{n} &= \frac{1}{\|\mathbf{x}'_\xi \times l_s \mathbf{s}\|} (\mathbf{1} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) [\mathbf{x}'_\xi \times \delta(l_s \mathbf{s}) - l_s \mathbf{s} \times \delta\mathbf{x}'_\xi] \\ \delta(l_s \mathbf{s}) &= \delta\mathbf{u}^K - \delta\mathbf{u}^J \\ \delta\mathbf{x}'_\xi &= \frac{1}{4} (-\delta\mathbf{x}^1 + \delta\mathbf{x}^2 + \delta\mathbf{x}^3 - \delta\mathbf{x}^4) \\ \delta\mathbf{t}_3 &= \sum_{I=1}^3 \frac{1}{h_i} (\mathbf{n}_i \otimes \mathbf{t}_3) \delta\mathbf{u}^I \\ \mathbf{n} \cdot \delta\mathbf{t}_3 &= \mathbf{n} \cdot \sum_{I=1}^3 \frac{1}{h_i} (\mathbf{n}_i \otimes \mathbf{t}_3) \delta\mathbf{u}^I = \sum_{I=1}^3 \frac{1}{h_i} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_i) (\mathbf{t}_3 \cdot \delta\mathbf{u}^I) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_3 \cdot \delta\mathbf{n} &= \mathbf{t}_3 \cdot \frac{1}{\|\mathbf{x}'_\xi \times l_s \mathbf{s}\|} (\mathbf{1} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) [\hat{\mathbf{x}}'_\xi \delta(l_s \mathbf{s}) - l_s \hat{\mathbf{s}} \delta\mathbf{x}'_\xi] \\ &= \frac{1}{\|\mathbf{x}'_\xi \times l_s \mathbf{s}\|} \mathbf{t}_3^T \left\{ (\mathbf{1} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \left[\hat{\mathbf{x}}'_\xi (\delta\mathbf{u}^K - \delta\mathbf{u}^J) - \frac{l_s}{4} \hat{\mathbf{s}} (-\delta\mathbf{x}^1 + \delta\mathbf{x}^2 + \delta\mathbf{x}^3 - \delta\mathbf{x}^4) \right] \right\} \end{aligned}$$

Puede notarse que en el lado de interés $\delta\gamma$ depende de los 3 nudos del triángulo y de los cuatro nudos del sólido, es decir de 21 GdL. En el caso de utilizar una técnica implícita esta es la aproximación más conveniente.

Los resultados presentados más abajo utilizan no ésta si no la primera aproximación para la evaluación de las fuerzas residuales.

3. UNIÓN RÍGIDA DE UN NUDO CON UN ELEMENTO SIN ROTACIONES

Cuando se dispone de sistemas locales esta tipo de restricción se realiza nudo a nudo. Es decir se exige que el nudo esclavo ocupe una posición relativa constante respecto al nudo maestro y su sistema local. En este caso debido a que no se tienen sistemas locales es necesario disponer de una superficie sobre la cual quede unívocamente definida una terna, para ello el nudo esclavo se liga con un elemento de superficie que puede ser plano o curvo. En problemas 2D la unión se realiza con un segmento de 2 nudos (segmento plano) o uno de 3 nudos (segmento curvo). En tanto que para problemas 3D se utiliza un triángulo de 3 nudos para una aproximación plana y un elemento de 6 nudos para las aproximaciones curvas. La aproximación plana es adecuada para superficies rígidas o con una discretización similar en la superficie esclava y la maestra. A los efectos de captar correctamente la flexión de la superficie maestra resulta mejor utilizar una aproximación curva.

Para las aproximaciones curvas se utilizan las habituales interpolaciones isoparamétricas. Es también factible utilizar la definición de las curvaturas propias de cada elemento, pero esto es más costoso computacionalmente.

3.1. Problema en dos dimensiones

Posición original del nudo esclavo

La geometría de la superficie maestra está definido por las coordenadas de tres nudos, que localmente denominaremos por 1 - 3. Se define una interpolación isoparamétrica

$$\mathbf{X}(\xi) = \sum_{I=1}^3 N^I \mathbf{X}^I \quad (7)$$

con las habituales funciones de forma cuadrática

$$N^1 = -\frac{\xi}{2}(1 - \xi) \quad N^2 = (1 - \xi^2) \quad N^3 = \frac{\xi}{2}(1 + \xi) \quad (8)$$

En cada punto de la superficie (ξ) es posible definir un vector tangente \mathbf{t}^0 y un vector normal al mismo \mathbf{n}^0 :

$$\begin{aligned} \mathbf{t}^0 &= \frac{\mathbf{X}'_{\xi}}{\|\mathbf{X}'_{\xi}\|} = \frac{1}{\|\mathbf{X}'_{\xi}\|} \left[\left(\xi - \frac{1}{2} \right) \mathbf{X}^1 - 2\xi \mathbf{X}^2 + \left(\xi + \frac{1}{2} \right) \mathbf{X}^3 \right] \\ &= \frac{1}{\|\mathbf{X}'_{\xi}\|} \left[\frac{1}{2} (\mathbf{X}^3 - \mathbf{X}^1) + \xi (\mathbf{X}^1 - 2\mathbf{X}^2 + \mathbf{X}^3) \right] \\ \mathbf{n}^0 &= \begin{bmatrix} -t_2^0 \\ t_1^0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Es necesario determinar la posición relativa ($\xi \in [-1 : 1]$) del nudo esclavo sobre la superficie curva, esto se hace a partir de una proyección inicial:

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_0^0 &= \frac{(\mathbf{X}^3 - \mathbf{X}^1)}{\|\mathbf{X}^3 - \mathbf{X}^1\|} \\ \xi_0^S &= + \frac{2}{\|\mathbf{X}^3 - \mathbf{X}^1\|} (\mathbf{X}^S - \mathbf{X}^1) \cdot \mathbf{t}_0^0 - 1 \end{aligned}$$

y luego en forma iterativa

$$\begin{aligned}\mathbf{X}_K^P &= \sum_{I=1}^3 N^I (\xi_{K-1}^S) \mathbf{X}^I = \left(-\frac{\xi}{2} + \frac{\xi^2}{2} \right) \mathbf{X}^1 + (1 - \xi^2) \mathbf{X}^2 + \left(\frac{\xi}{2} + \frac{\xi^2}{2} \right) \mathbf{X}^3 \\ &= \mathbf{X}^2 + \xi \frac{1}{2} (\mathbf{X}^3 - \mathbf{X}^1) + \frac{\xi^2}{2} (\mathbf{X}^1 - 2\mathbf{X}^2 + \mathbf{X}^3) \\ \mathbf{t}_K^0 &= \frac{1}{\|\mathbf{X}'_{\xi}\|} \left[\frac{1}{2} (\mathbf{X}^3 - \mathbf{X}^1) + \xi_{K-1}^S (\mathbf{X}^1 - 2\mathbf{X}^2 + \mathbf{X}^3) \right] \\ \xi_K^S &= \xi_{K-1}^S + \frac{1}{\|\mathbf{X}'_{\xi}\|} (\mathbf{X}^S - \mathbf{X}_K^P) \cdot \mathbf{t}_K^0\end{aligned}$$

hasta lograr convergencia en la coordenada ξ^S . Finalmente

$$\begin{aligned}\mathbf{n}^0 &= \mathbf{e}_3 \times \mathbf{t}^0 \\ d &= (\mathbf{X}^S - \mathbf{X}^P) \cdot \mathbf{n}^0\end{aligned}$$

Posición actual del nudo esclavo

Para fijar la posición actual del nudo esclavo es necesario disponer de:

- Las posiciones de los nudos en el elemento maestro $\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^3$
- El estiramiento en la dirección transversal λ si estuviera disponible que permite actualizar la distancia d . En general esto no es así y se considera que la distancia d es fija como en los aproximaciones con rotaciones.

Con ello se obtiene

$$\begin{aligned}\mathbf{x}^P(\xi^S) &= \sum_{I=1}^3 N^I(\xi^S) \mathbf{x}^I = \sum_{I=1}^3 N^{IS} \mathbf{x}^I \\ \mathbf{t} &= \frac{\mathbf{x}'_x(\xi^S)}{\|\mathbf{x}'_x(\xi^S)\|} \quad \mathbf{n} = \mathbf{e}_3 \times \mathbf{t} \\ \mathbf{x}^S &= \mathbf{x}^P + d\mathbf{n}\end{aligned}$$

Repartición de las fuerzas residuales

La distribución de fuerzas residuales debe hacerse en forma consistente en función de la variación de las coordenadas del nudo esclavo:

$$\delta \mathbf{x}^S = \sum_{I=1}^3 N^{IS} \delta \mathbf{x}^I + d \delta \mathbf{n}$$

Donde

$$\delta \mathbf{x}^i = \delta \mathbf{u}^i$$

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{n} &= \mathbf{e}_3 \times \delta \mathbf{t} = \mathbf{e}_3 \times \left[\frac{1}{\|\mathbf{x}'_\xi\|} (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \sum_{I=1}^3 N_{I\xi}^{IS} \delta \mathbf{u}^I \right] \\ &= -\frac{1}{\|\mathbf{x}'_\xi\|} \mathbf{t} \sum_{I=1}^3 N_{I\xi}^{IS} (\mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{u}^I) = -\frac{1}{\|\mathbf{x}'_\xi\|} (\mathbf{t} \otimes \mathbf{n}) \sum_{I=1}^3 N_{I\xi}^{IS} (\delta \mathbf{u}^I) \end{aligned}$$

Reemplazando

$$\delta \mathbf{x}^S = \sum_{I=1}^3 \left(N^{IS} \mathbf{1} - \frac{d}{\|\mathbf{x}'_\xi\|} (\mathbf{t} \otimes \mathbf{n}) N_{I\xi}^{IS} \right) \delta \mathbf{u}^I$$

Simplificación

Si se utilizan sólo dos nudos para la definición de la superficie maestra (se desprecia la influencia de la curvatura). En la configuración original

$$\mathbf{t}^0 = \frac{(\mathbf{X}^2 - \mathbf{X}^1)}{[(\mathbf{X}^2 - \mathbf{X}^1) \cdot (\mathbf{X}^2 - \mathbf{X}^1)]^{\frac{1}{2}}} = \frac{(\mathbf{X}^2 - \mathbf{X}^1)}{L^0}$$

$$\begin{aligned} N^{2S} &= \frac{1}{L^0} (\mathbf{X}^S - \mathbf{X}^1) \cdot \mathbf{t}^0 & N^{1S} &= 1 - N^{2S} \\ d &= (\mathbf{X}^S - \mathbf{X}^1) \cdot \mathbf{n}^0 \end{aligned}$$

Y en la configuración deformada

$$\begin{aligned} \mathbf{t} &= \frac{(\mathbf{x}^2 - \mathbf{x}^1)}{L} \\ \mathbf{x}^S &= N^{1S} \mathbf{x}^1 + N^{2S} \mathbf{x}^2 + d \mathbf{n} \end{aligned}$$

y la repartición de fuerzas residuales se escribe en forma explícita:

$$\delta \mathbf{x}^S = \begin{bmatrix} N^{1S} - dt_1 t_2 & dt_1 t_1 & N^{2S} + dt_1 t_2 & -dt_1 t_1 \\ -dt_2 t_2 & N^{1S} + dt_1 t_2 & +dt_2 t_2 & N^{2S} - dt_1 t_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \mathbf{u}^1 \\ \delta \mathbf{u}^2 \end{bmatrix}$$

3.2. Problema en tres dimensiones

Definición de la geometría cuadrática del elemento triangular de 6 nudos (maestro)

La geometría de la superficie maestra está definido por las coordenadas de seis nudos, que localmente denominaremos por 1–6, empezando por los 3 nudos centrales $[(0, 0), (1, 0), (0, 1)]$ y siguiendo por los nudos opuestos a cada nudo $[(1, 1), (-1, 1), (1, -1)]$.

$$\mathbf{X}(\xi, \eta) = \sum_{I=1}^6 N^I(\xi, \eta) \mathbf{X}^I \quad (9)$$

$$\begin{aligned} N^1 &= \zeta + \xi \eta & N^2 &= \xi + \eta \zeta & N^3 &= \eta + \zeta \xi \\ N^4 &= \frac{\zeta}{2} (\zeta - 1) & N^5 &= \frac{\xi}{2} (\xi - 1) & N^6 &= \frac{\eta}{2} (\eta - 1) \end{aligned} \quad (10)$$

Posición original del nudo esclavo

Inicialmente hay que determinar las coordenadas del punto de proyección del nudo maestro. Una posibilidad es partir del centro del triángulo ($\xi_0 = \eta_0 = \frac{1}{3}$) y evaluar en forma iterativa la posición de referencia y las bases convectivas

$$\mathbf{X}_K^P = \sum_{I=1}^N N^I(\xi_K, \eta_K) \mathbf{X}^I$$

$$\mathbf{X}_{\xi K} = \sum_{I=1}^6 N_{\xi}^I(\xi_K, \eta_K) \mathbf{X}^I \quad \mathbf{X}_{\eta K} = \sum_{I=1}^6 N_{\eta}^I(\xi_K, \eta_K) \mathbf{X}^I$$

$$\mathbf{t}_K^0 = \frac{\mathbf{X}_{\xi K} \times \mathbf{X}_{\eta K}}{\|\mathbf{X}_{\xi K} \times \mathbf{X}_{\eta K}\|}$$

$$\hat{\mathbf{X}}_{\xi K} = \frac{\mathbf{X}_{\eta K} \times \mathbf{t}_K^0}{\|\mathbf{X}_{\xi K} \times \mathbf{X}_{\eta K}\|} \quad \hat{\mathbf{X}}_{\eta K} = -\frac{\mathbf{X}_{\xi K} \times \mathbf{t}_K^0}{\|\mathbf{X}_{\xi K} \times \mathbf{X}_{\eta K}\|}$$

Y una nueva aproximación a la proyección:

$$\xi_{K+1} = \xi_K + (\mathbf{X}^S - \mathbf{X}^P) \cdot \hat{\mathbf{X}}_{\xi K}$$

$$\eta_{K+1} = \eta_K + (\mathbf{X}^S - \mathbf{X}^P) \cdot \hat{\mathbf{X}}_{\eta K}$$

Finalmente se determina la distancia del punto a la superficie

$$d = (\mathbf{X}^S - \mathbf{X}^P) \cdot \mathbf{t}^0$$

Posición actual del nudo esclavo

Para fijar la posición actual del nudo esclavo es necesario disponer de:

- De las nuevas posiciones de los nudos \mathbf{x}^I
- El estiramiento en la dirección transversal λ para actualizar la distancia d (normalmente no disponible)

Con ellos se calcula

$$\text{la proyección sobre la superficie } \mathbf{x}^P = \sum_{I=1}^6 N^{IS} \mathbf{x}^I$$

$$\text{vector tangente a la superficie } (\xi) \mathbf{x}_{\xi}^S = \sum_{I=1}^6 N_{\xi}^{IS} \mathbf{x}^I$$

$$\text{vector tangente a la superficie } (\eta) \mathbf{x}_{\eta}^S = \sum_{I=1}^6 N_{\eta}^{IS} \mathbf{x}^I$$

$$\text{vector normal a la superficie } \mathbf{t} = \frac{\mathbf{x}_{\xi}^S \times \mathbf{x}_{\eta}^S}{\|\mathbf{x}_{\xi}^S \times \mathbf{x}_{\eta}^S\|}$$

Y la posición actual del nudo esclavo

$$\mathbf{x}^S = \mathbf{x}^P + d\mathbf{t}$$

Repartición de las fuerzas residuales

La distribución de fuerzas residuales debe hacerse en forma consistente en función de la variación de las coordenadas del nudo esclavo, que puede simplificarse a lo siguiente:

$$\delta \mathbf{x}^S = \sum_{I=1}^6 N^{IS} \delta \mathbf{x}^I + d \delta \mathbf{t}$$

donde ($\delta \mathbf{x}^I = \delta \mathbf{u}^I$)

$$\delta \mathbf{t} = \frac{1}{\|\mathbf{x}'_{\xi} \times \mathbf{x}'_{\eta}\|} (\mathbf{1} - \mathbf{t} \otimes \mathbf{t}) (\mathbf{x}'_{\xi} \times \delta \mathbf{x}'_{\eta} - \mathbf{x}'_{\eta} \times \delta \mathbf{x}'_{\xi})$$

con

$$\mathbf{P} = \frac{d}{\|\mathbf{x}'_{\xi} \times \mathbf{x}'_{\eta}\|} (\mathbf{1} - \mathbf{t} \otimes \mathbf{t})$$

$$\mathbf{P}_{\alpha} = \mathbf{P} \langle \mathbf{x}'_{\alpha} \rangle$$

donde $\langle \mathbf{v} \rangle$ es la matriz antisimétrica asociada al vector axial \mathbf{v} y

$$\delta \mathbf{x}'_{\alpha} = \sum_{I=1}^6 N'_{\alpha}{}^{IS} \delta \mathbf{u}^I$$

Reemplazando:

$$\delta \mathbf{x}^S = \sum_{I=1}^6 \{ N^{IS} \mathbf{1} + \mathbf{P}_{\xi} N'_{\eta}{}^{IS} - \mathbf{P}_{\eta} N'_{\xi}{}^{IS} \} \delta \mathbf{u}^I$$

Notar entonces que cada uno de los tres grados de libertad del nudo esclavo dependen de los 18 grados de libertad del triángulo de 6 nudos. La expresión anterior se modifica a medida que cambia la configuración.

Simplificación

Si se desprecia la influencia de la curvaturas, es decir se proyecta sobre el triángulo de 3 nudos. En la configuración inicial se tendrá

$$\mathbf{X}^S = \sum_{I=1}^3 L^I \mathbf{X}^I + dt^0$$

donde las L^I son las coordenadas de área del punto más cercano al nudo esclavo y d la distancia al mismo. Para la configuración deformada se tiene

$$\mathbf{x}^S = \sum_{I=1}^3 L^I \mathbf{x}^I + dt$$

$$\delta \mathbf{x}^S = \sum_{I=1}^3 L^I \delta \mathbf{x}^I + d \delta \mathbf{t} = \sum_{I=1}^3 \left[\mathbf{1} L^I + d \frac{1}{h_I} \mathbf{n}_I \otimes \mathbf{t} \right] \delta \mathbf{u}^I$$

Esta importante simplificación desprecia totalmente la influencia de la curvatura, no sólo en la posición de la superficie media sino principalmente en la orientación de la normal, lo cual tiene importantes consecuencias sobre la posición del nudo esclavo (sobre todo lo segundo).

Condiciones de contorno

En el caso de discretizaciones en dos dimensiones es casi siempre posible definir una superficie de 3 nudos. En tres dimensiones no pueden elegirse 6 nudos cuando se está sobre el contorno. Para tal caso resulta conveniente definir un nudo auxiliar en forma sencilla. Supongamos que sobre el lado I (opuesto al nudo local I definido por los nudos J y K) no hay elemento adyacente, entonces el nudo auxiliar $I + 3$ se define por

$$\mathbf{X}^{I+3} = \mathbf{X}^J + \mathbf{X}^K - \mathbf{X}^I$$

y con ellos se procede en la misma forma indicada antes.

4. RESULTADOS NUMERICOS

4.1. Placa empotrada bajo carga uniforme

Una placa cuadrada empotrada en su contorno es sometida a una carga uniformemente distribuida en toda su superficie. La carga aplicada es de tipo escalón y se analiza el comportamiento en el primer ciclo de movimiento no-amortiguado. El lado de la placa es 10 y el espesor es 0,4. El material se considera elástico lineal con propiedades $E = 0,5 \times 10^6$, $\nu = 0,25$ y $\delta = 1,00$. La carga aplicada $q = 0,8$. Se considera cinemática no-lineal. La discretización en el plano de la placa se realiza en forma uniforme con 20 divisiones por lado sobre un cuarto de la geometría total imponiendo las correspondientes condiciones de simetría. Se hicieron tres modelos uno exclusivamente con elementos de lámina, otro sólo con elementos de sólido y un tercer modelo acoplado con aproximadamente la mitad de la superficie modelada con elementos de lámina y la otra mitad con elementos de láminas. Para los modelos de sólido se usaron elementos exahedros de 8 nudos y se utilizaron 3 elementos en el espesor de la lámina. En los modelos con sólidos, en los bordes empotrados se permitió la contracción en la dirección normal a la lámina. En la Figura 2 se muestra la discretización utilizada en el caso acoplado y la deformada (5X) para el instante $t = 0,1$. En la Figura 2 se muestra, para los tres modelos, el desplazamiento vertical del punto central de la placa y del punto correspondiente donde se acoplan los modelos. Puede verse que los tres modelos dan resultados casi coincidentes. El modelo con láminas logra obtener este mismo desplazamiento con menor cantidad de elementos, la fineza de la malla responde a las limitaciones del elemento de sólido para modelar correctamente el comportamiento flexional.

4.2. Unión de un tubo y una placa

En este caso se analiza la unión entre un tubo y una placa. El tubo de radio 10 mm y espesor 0.75 mm está unido a una placa cuadrada de 100 mm de lado y 1 mm de espesor. El radio del filete de la intersección es 1 mm. Debido a la simetría del problema se modela sólo la mitad. Tanto el tubo como la placa están hechos de aluminio con $E = 69 \times 10^3$ MPa, $\nu = 0,3$, y $\rho = 2740$ kg/m³.

Se consideraron dos modelos: uno con sólo elementos de lámina donde se utilizó una malla fina en la zona de intersección pero sin considerar el radio del filete; y un segundo modelo donde se acoplaron elementos de lámina y elementos sólidos de 8 nudos. La malla de sólidos, que modela detalladamente el radio del filete, se extiende 10 mm a lo largo del tubo y hasta un radio de 25 mm en el plano de la placa. Se usaron 4 elementos en el espesor lo que permite calcular con buena precisión la concentración de tensiones en el filete.

La Figura 3.a muestra la configuración deformada (magnificada por 20) para el modelo acoplado. La Figura 3.b muestra los contornos de desplazamientos normales a la placa en

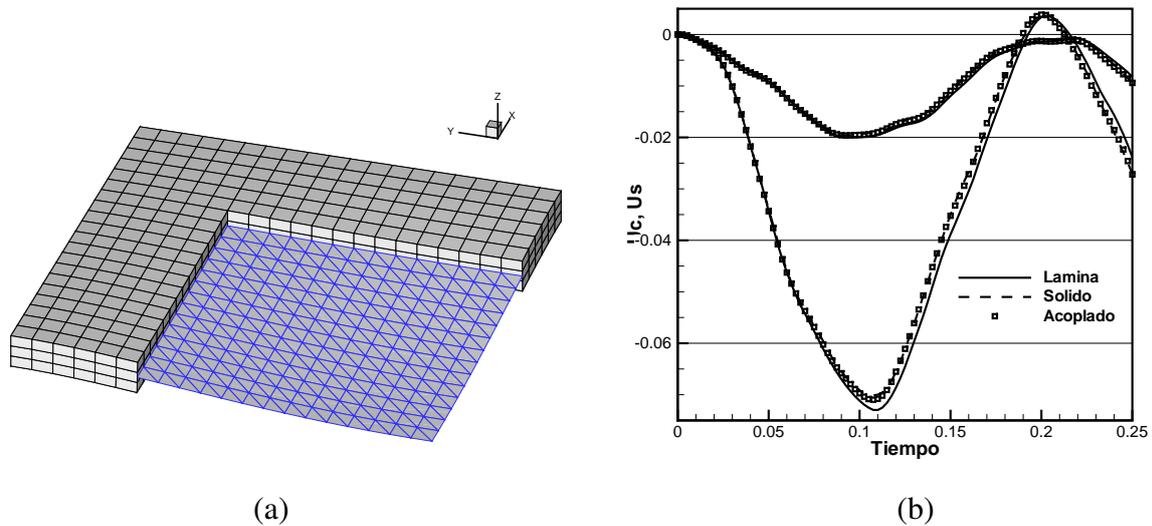


Figura 2: Modelo de la placa acoplando elementos de lámina y sólido.

la zona central (cuadrado de 65 mm) para ambos modelos. El círculo en la figura indica la parte de la placa modelada con elementos de continuo. Los desplazamientos obtenidos con el modelo acoplado son un poco menores debido al comportamiento algo rígido de los elementos de sólido de 8 nudos.

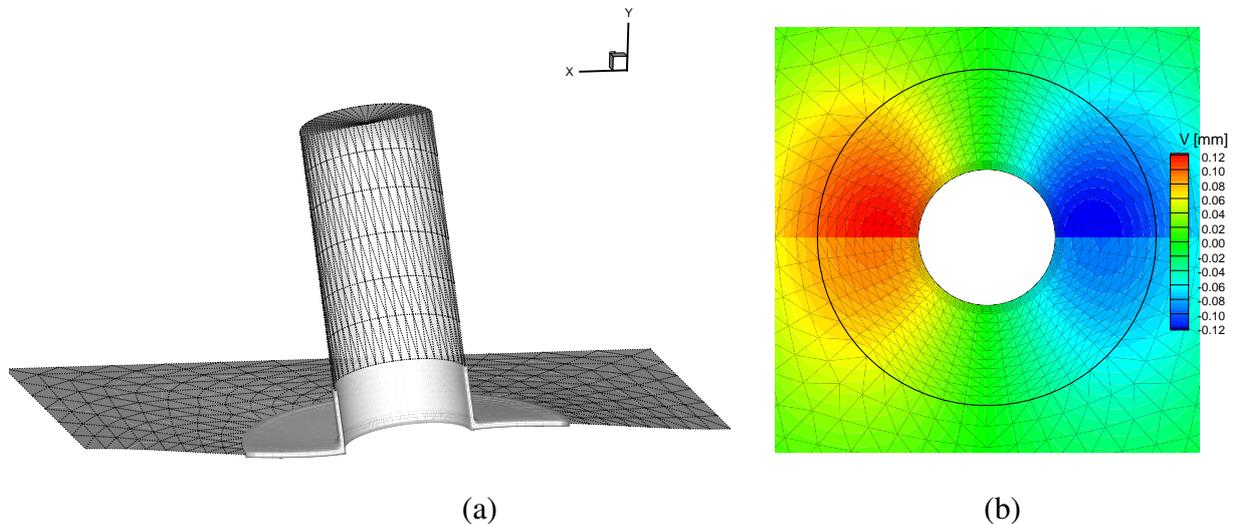


Figura 3: Unión de un tubo con una placa. (a) Configuración deformada (20X) para el modelo acoplado. (b) Contornos de desplazamiento transversal en la superficie media de la placa para ambos modelos: sólo lámina (arriba) y modelo acoplado (abajo)

4.3. Ovalamiento de un codo

Un tubo de radio $r = 19,83$ cm y espesor $t = 1,041$ cm, empotrado en un extremo y formado por un tramo recto de 182,9 cm un codo a 90° de radio 60,95 cm y un segundo tramo recto de 60,96 cm, está sometido a un giro impuesto en su extremo libre. Este giro se impone sobre todos los nudos de la sección extrema de tal forma que esta se mantiene plana y circular.

El tubo puede estar sometido a una presión interna y se consideran entonces dos casos a) $p = 0$ y b) $p = 3,45$ MPa.

La flexión produce un ovalamiento principalmente en la zona del codo. Las propiedades mecánicas del material constitutivo son: $E = 194$ GPa, $\nu = 0,264$, $\delta = 7800$ kg/m³ y plasticidad asociada (von Mises) con endurecimiento isótropo gobernado por la relación $\sigma_y = 5,71 \times 10^8 (e_p + 0,006)^{0,1}$

Se consideraron dos tipos de modelos uno exclusivamente con elementos de láminas y otro acoplado donde la zona del codo se modeló con elementos de sólido de 8 nudos. Se utilizaron dos discretizaciones para el modelo de láminas, una relativamente gruesa con 672 elementos y una discretización “media” con 2688 elementos. En ambos casos se utilizaron 7 puntos de integración en el espesor de la lámina a los fines de captar detalladamente la flexión elasto-plástica. Para los modelos con sólidos se utilizaron 3 discretizaciones de la superficie, las mismas indicadas para la lámina más una discretización “fina” de la superficie equivalente a 6048 elementos de lámina. Para la malla gruesa se utilizaron 2 elementos en el espesor, para la malla media se hicieron dos modelos con 3 y 6 elementos en el espesor y para la malla fina se utilizaron 3 elementos en el espesor.

La Figura 4 muestra la geometría final del codo con la malla acoplada más fina. Se han graficado los contornos de deformaciones plásticas efectivas sobre el codo. Los valores máximos son del orden de 0,04. Se ha incluido el mismo contorno de deformaciones sobre la malla media con sólo elementos de lámina con fines comparativos. En los modelos sólo se ha discretizado la mitad del tubo debido a la simetría.

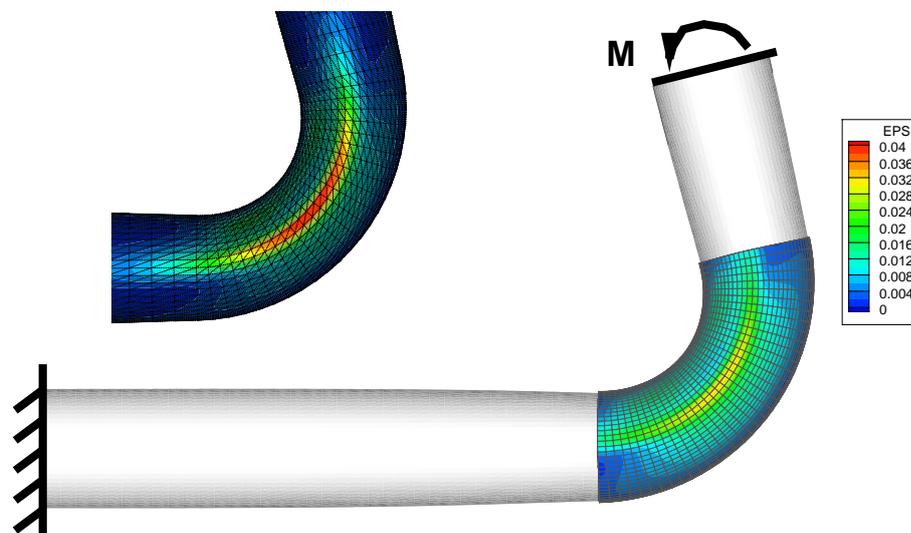


Figura 4: Codo sometido a flexión. Deformada final ($X=1$). Contorno de deformaciones plásticas efectivas sobre la cara externa del codo

En la Figura 5 se ha graficado el momento resistente en función de la rotación impuesta para ambos casos de carga (con y sin presión) y para las distintas mallas consideradas. Puede notarse que no hay diferencias significativas entre malla gruesa y media para los modelos de lámina, esto en parte debido al excelente comportamiento membranar del elemento NBST. El modelo acoplado sobre la malla media dió resultados casi coincidentes al utilizar 3 o 6 elementos en el espesor. Esto indicó que la limitación del elemento de sólido estaba relacionada con el comportamiento en el plano de la membrana y no con los detalles de la flexión debido al ovalamiento, por ello la malla fina también utilizó 3 elementos en el espesor. Puede notarse que

la convergencia con la discretización es mas bien lenta y que esto no permite alcanzar resultados similares con los modelos de láminas y los modelos acoplados sin embargo los resultados cualitativos mostrados en la Figura 4 indican un buen comportamiento de la restricción multipunto propuesta.

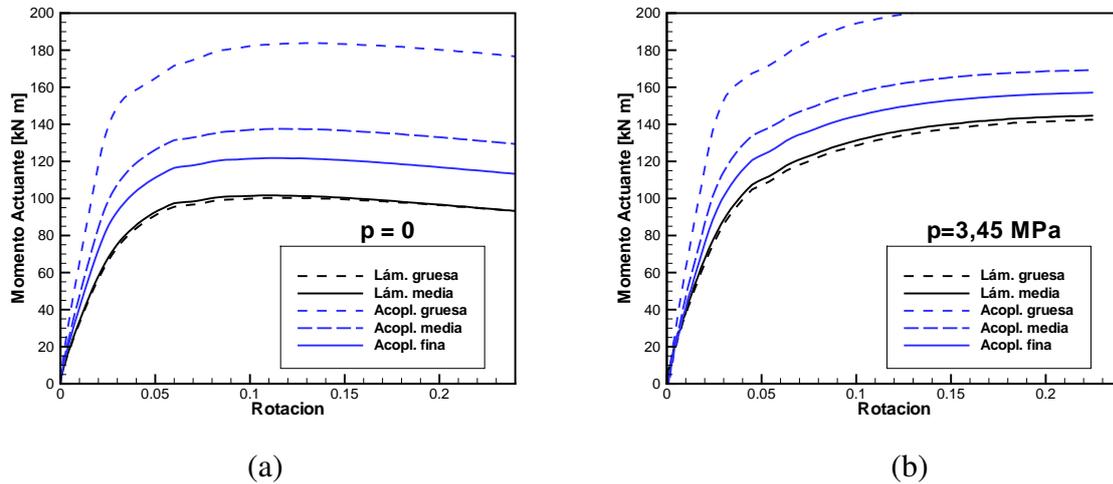


Figura 5: Codo sometido a flexión. Momento resistente en función de la rotación impuesta. (a) sin presión interna. (b) con presión interna

4.4. Panel reforzado

Este ejemplo muestra una aplicación de uniones rígidas entre nudos. Se trata de un panel cilíndrico de 200 mm de radio de 100×100 mm en planta. El panel tiene un refuerzo en forma de “T” a lo largo de la generatriz en la mitad central. Está empotrado en un extremo y sometido a una presión normal $p = 88$ kPa. El espesor del panel y del refuerzo es de 1 mm y el material utilizado es un acero con comportamiento elasto-plástico. En la Figura 6 se puede visualizar la geometría

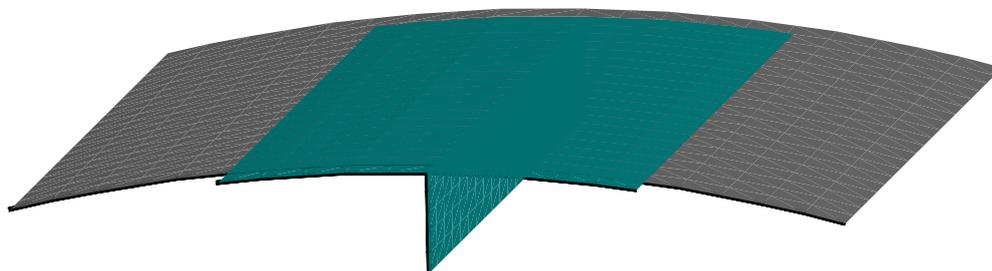


Figura 6: Panel reforzado. Vista de la geometría

La carga se aplica en forma lineal desde 0 hasta el valor máximo en 0.8 msec y luego se mantiene constante. Se realizaron dos modelos, un primer modelo en el cual los nudos del panel que se solapan con el refuerzo se relacionan con los nudos sobre este último a través de relaciones multipunto y un segundo modelo en el cual la zona solapada se modela como una única lámina del doble de espesor.

En la Figures 7 se muestra una vista de la geometría del panel con un contorno de deformaciones plásticas efectivas para ambos modelos. La plasticidad se concentra sobre el borde empotrado en la parte inferior de la pared vertical (comprimida) y en los extremos del panel (también comprimidos). Los valores mostrados son casi coincidentes para ambos modelos.

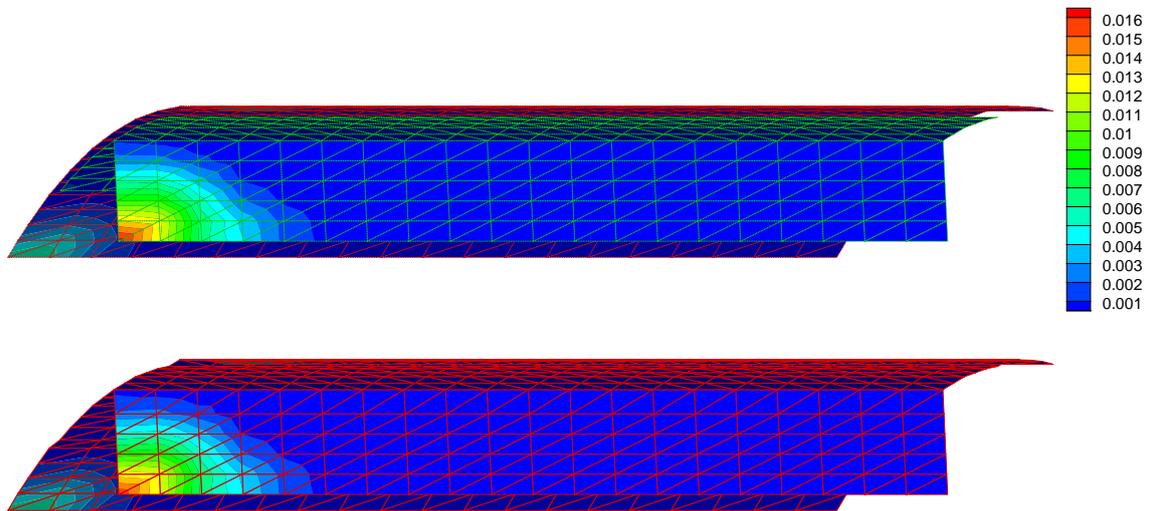


Figura 7: Panel reforzado. Contornos de deformación plástica efectiva. Solapado (arriba) y Doble espesor (abajo).

En la Figura 8 se muestra la historia en el tiempo del desplazamiento punto central del extremo libre del panel. Puede notarse una muy buena concordancia entre ambos modelos.

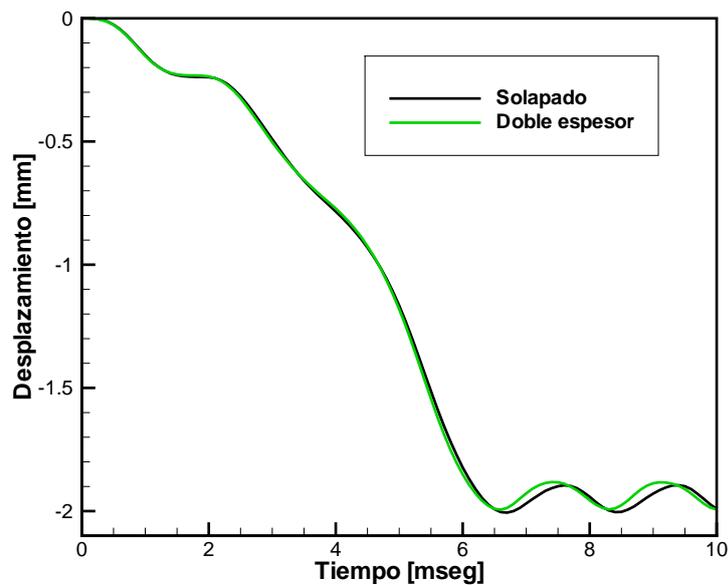


Figura 8: Panel reforzado. Desplazamiento del extremo del rigidizador

5. CONCLUSIONES

Se han presentado dos formulaciones para el tratamiento de restricciones multi-punto cuando se utilizan elementos de lámina si grados de libertad de rotación. Una para la combinación con elementos de sólido y otra para el solapamiento de láminas. Estas formulaciones se han implementado en un código con integración explícita de las ecuaciones de movimiento.

Los ejemplos que acoplan elementos de lámina y sólido muestran que son suficientes tres elementos de sólido en el espesor de la lámina. En general la modelización con elementos de sólido requiere de una discretización más fina en la superficie de la lámina. El ejemplo de la placa cuadrada, con una malla fina muestra que la formulación conduce a resultados correctos. Los ejemplos del tubo unido a la placa y el codo muestran el excelente comportamiento del elemento de lámina y nuevamente la necesidad de utilizar mallas finas de elementos de sólido.

El ejemplo modelización de láminas solapadas usando restricciones multipunto muestra muy buenos resultados. Esto es particularmente cierto en este ejemplo donde el comportamiento es principalmente membranaral pero presenta algunas diferencias en problemas puramente flexionales.

AGRADECIMIENTOS

El autor agradece el apoyo financiero de CONICET (Argentina) y de la SeCyT-UNC.

REFERENCIAS

- F.G. Flores y E. Oñate. A basic thin shell triangle with only translational dofs for large strain plasticity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 51:57–93, 2001.
- F.G. Flores y E. Oñate. Improvements in the membrane behaviour of the three node rotation-free bst shell triangle using an assumed strain approach. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194:907–932, 2005.
- F.G. Flores y E. Oñate. A rotation-free shell triangle for the analysis of kinked and branching shells. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 69:1521–1551, 2007.