

GENERACIÓN DE MALLAS TRIDIMENSIONALES EN TIEMPO LINEAL

Nestor A. Calvo y Sergio R. Idelsohn

Centro Internacional de Métodos Computacionales para Ingeniería (CIMEC-INTEC)
Universidad Nacional del Litoral y CONICET, Santa Fe, Argentina, ncalvo@ceride.gov.ar

Palabras clave: generación de mallas, Extended Delaunay Tessellation, poliedros, Voronoï.

Resumen: *En este trabajo se presenta un nuevo método de generación de mallas tridimensionales cuyo costo computacional es de orden n , siendo n el número de puntos que define el dominio. El método se denominó Extended Delaunay Tessellation pues se basa en diagrama de Voronoï de una nube de puntos para armar poliedros con aquellos puntos que definen esferas prácticamente coincidentes. De ese modo, se evitan las inestabilidades propias de la teselación estándar de Delaunay que provocan indefiniciones en 2D y 3D y peor aún, elementos de volumen prácticamente nulo (slivers) en 3D. Cabe aclarar que la existencia de funciones de forma para poliedros acabó con la restricción a tetraedros y cubos en el método de elementos finitos. Con este procedimiento se obtienen automáticamente elementos de buena calidad, de tal forma que no hay que pagar el precio computacional de un postratamiento cosmético o de suavizado de la malla. Por la misma razón, este algoritmo se utiliza en métodos lagrangianos y métodos sin mallas (meshless) pues determina las conectividades entre los puntos en tiempo lineal. Se incluyen también algunos detalles del generador de puntos y de la preparación de la geometría de la frontera y la función que especifica el espaciamiento entre nodos.*

1 INTRODUCCIÓN

Una malla para el Método de Elementos Finitos (MEF) consiste en una partición adecuada del dominio geométrico, con dos propiedades básicas: la unión de los elementos es el dominio y la intersección entre dos elementos tiene medida nula.

En la práctica habitual se utilizan elementos poliédricos irregulares, principalmente tetraedros, hexaedros y a veces prismas triangulares. Los dos primeros tipos suelen utilizarse en exclusividad, es decir mallas sólo de tetraedros o sólo de hexaedros.

En las mallas poliédricas es común requerir también la “conformidad” de la malla exigiendo que la intersección entre dos elementos sea sólo una subunidad completa, entendiendo por subunidad de un poliedro a una cara, una arista, un nodo o el conjunto vacío.

La restricción en el uso de determinados poliedros viene dada por las funciones de forma que se utilizarán como interpolantes. Para cada tipo de poliedro hay que construir la función que interpola el valor de una variable utilizando los valores nodales que toma la variable en los vértices del poliedro.

Recientemente se han utilizado con éxito en métodos sin mallas¹ y Lagrangianos² unas funciones de forma no-sibsonianas o armónicas^{3,4} sobre una clase de poliedros un poco más general, a la que podemos denominar como **poliedros esféricos** por el hecho de que sus vértices están (aproximadamente) sobre una superficie esférica. Es decir que ahora podemos generar una malla de poliedros esféricos completamente adecuada para el MEF.

En los métodos Lagrangianos y en los métodos sin mallas, la nube de puntos inicial es un dato y en cada paso de tiempo los puntos se mueven gobernados por la física del problema, cambiando las vecindades o conectividades. En contraste, para el problema de la generación de mallas, el dato es la geometría y la nube de nodos es parte del resultado. De cualquier modo, en el punto de partida de un método Lagrangiano o meshless debe haber un algoritmo que ubique adecuadamente los nodos en el dominio y en cada paso de tiempo se requiere de otro algoritmo que actualice las conectividades. De tal manera que los procedimientos que describiremos se aplican por igual en ambos casos.

Para la construcción de la malla se parte siempre de la definición geométrica de la frontera y de una función real de la posición $h(\mathbf{x})$, que determina el tamaño deseado para los elementos o el espaciamiento entre los nodos en cada región del dominio.

Los métodos de generación son muy variados, pero uno de los más sencillos es través del diagrama de Voronoï, cuyo dual es la triangulación de Delaunay que consiste en una partición del dominio en tetraedros⁵.

El procedimiento que hemos adoptado consiste en un mallado en sucesivas dimensiones: Para construir una malla tridimensional partimos de una malla de la superficie límite, dicha malla la construimos por piezas o “patches” a partir de una malla unidimensional de su contorno, que a su vez también construimos por subdivisión (regular o variable) de cada línea.

La función h viene dada en forma implícita por el tamaño de los elementos de la frontera y de algunos elementos interiores utilizados como “mallas de h ”. Para el espaciamiento de los nodos interiores, utilizamos un valor interpolado que explicaremos mas adelante.

Cabe aclarar que las mallas de frontera y de h pueden contener cualquier tipo de elementos

mezclados y pueden aún no ser conformes. Las tres funciones de dichas mallas son: limitar el dominio, definir el espaciamento entre nodos y proveer algunos nodos que deberán ser incluidos en la malla final.

Una vez establecida la frontera, se procede a llenar el dominio con puntos hasta cumplir con el espaciamento requerido, a la vez que se va construyendo el diagrama de Voronoï del conjunto de nodos.

Posteriormente, se procede a unir tetraedros para formar los elementos poliédricos.

El paso final puede consistir de una reconstrucción de los elementos de la frontera pero ahora formada por las caras no compartidas de los elementos.

El procedimiento no requiere de ningún tipo de suavizado o reposicionamiento de nodos, ni local ni global. El único algoritmo con costo no lineal en el número de nodos es el de la construcción del diagrama de Voronoï, pero con el uso de un árbol de organización (octree) se llega a un orden lineal.

A continuación se presentan algunos detalles de la implementación.

2 PREPARACIÓN DE LOS DATOS

A cada nodo de las mallas de frontera y de h se asigna un valor de h utilizando la longitud media de las aristas del nodo. A los nodos de la frontera se les asigna además un versor que apunta hacia el interior del dominio. Para ello se debe regularizar previamente la malla de frontera de modo que todos los elementos estén orientados de la misma manera.

Para regularizar (orientar) la malla de frontera se busca primero un nodo con máximo valor de la coordenada x . La dirección interior tendrá en ese punto una componente x necesariamente negativa. De ese nodo se busca el elemento más perpendicular al eje x y se orienta haciendo que el producto vectorial de la arista posterior al nodo por la anterior tenga primera componente negativa.

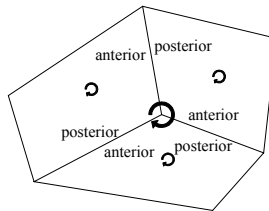


Figura 1: Vista de la circulación de los nodos y elementos desde el exterior del dominio.

Luego se ordena el conjunto de elementos del nodo de modo que la lista “circule” con normal hacia adentro (hacia la derecha vista desde afuera, como en la Figura 1), utilizando el hecho de que la arista anterior al nodo en un elemento debe ser la misma que la posterior en el elemento siguiente.

Para ordenar el resto de los nodos y elementos, se construye una lista de nodos “ordenables” con los vecinos del nodo ya ordenado, en cada uno de ellos se parte de un elemento previamente orientado para ordenar el resto y ordenar también la secuencia de

elementos del nodo con el método antes mencionado.

Para que el procedimiento anterior complete la malla, la frontera debería ser conexa (de una sola pieza). En caso contrario, los remanentes son considerados fronteras interiores y se procede exactamente a la inversa (normal hacia afuera) mientras existan componentes conexas restantes.

Para calcular la dirección interior se suman las normales a cada elemento del nodo. No es apropiado sumar los productos vectoriales de las aristas en orden, tal suma puede apuntar hacia el exterior de la malla en algunos vértices agudos, pues por el teorema de Gauss (de Minkowski, para poliedros), tal suma sería normal a la cara que falta para convertir el vértice en un poliedro, si la cara faltante formase algún diedro obtuso, el vector apuntaría hacia el exterior. El problema se puede visualizar por medio de un tetraedro con una arista suficientemente larga. Normalizando cada producto se corrige el problema.

3 DIAGRAMA DE VORONOÏ Y TRIANGULACIÓN DELAUNAY

El segundo paso del mallado consiste en una triangulación Delaunay de los nodos existentes (básicamente los de frontera). Si bien el procedimiento es clásico y puede encontrarse muy fácilmente⁵, lo detallamos brevemente a continuación.

Dada una nube de puntos nodales, el diagrama de Voronoï asigna a cada nodo una región del espacio que lo contiene, con la propiedad de que la distancia desde cualquier punto de esa región al nodo correspondiente es menor que a cualquier otro nodo. La región del espacio asignada a un nodo suele denominarse como celda de Voronoï de dicho nodo.

La partición (de todo el espacio) en celdas de Voronoï es conforme en el sentido antes expuesto. En general*, una cara de celda es una región equidistante de dos nodos, una arista equidista de tres nodos y un vértice es equidistante de cuatro nodos.

Los cuatro nodos equidistantes a un vértice del diagrama de Voronoï forman un tetraedro de la triangulación de Delaunay. Cada vértice del diagrama es entonces el centro de la esfera que circunscribe al tetraedro. Dichas esferas reciben el nombre de esferas de Voronoï o esferas vacías pues, para una nube dada, forman el conjunto de esferas definidas por cuaternas de puntos con la propiedad de que no contienen a ningún otro nodo en su interior. Este hecho nos proporciona un método para construir el diagrama de Voronoï:

1. Se colocan cuatro nodos virtuales en un gran tetraedro que encierra la nube y se construye la esfera de esos nodos.
2. Para cada nodo:
 - 2.1. Se busca el conjunto de esferas que lo contienen.
 - 2.2. Se arma un poliedro con el conjunto de sus nodos y se determina el conjunto de triángulos que forman la frontera de ese poliedro (caras no compartidas).
 - 2.3. Se eliminan esas esferas no vacías y se genera una nueva esfera con cada cara del poliedro y el nodo agregado.
3. Se eliminan las esferas que contienen nodos virtuales.

El paso más ineficiente es el 2.1 que se realiza normalmente con un costo computacional

* La posición general o no degenerada es cuando no hay mas de cuatro nodos en una misma superficie esférica ni mas de tres en una misma circunferencia.

de orden $n^{(1+1/d)}$, donde n es el número de nodos y d la dimensión del problema. Para ello se parte de una esfera cualquiera y se analiza si contiene al punto, en caso negativo, se busca el nodo de la esfera más alejado del nodo a insertar y se pasa a la esfera vecina que no contiene al nodo lejano. Así se llega a alguna esfera que contiene al nodo y el resto se busca entre las vecinas de las encontradas.

En 3D ese algoritmo tiene un costo de orden $n^{4/3}$, pero con una sencilla organización en un árbol binario u “octree” de unos pocos nodos por rama, siempre se parte de un nodo muy cercano y el costo resulta mucho menor. Fijando la cantidad de nodos por rama se obtiene un costo lineal. Para ello se subdivide el envoltorio prismático o “bounding-box” del dominio en sus ocho octantes, y cada octante se subdivide hasta que cada uno contenga a lo más una cierta cantidad (15) de nodos.

Con esos simples pasos se obtiene la triangulación del envoltorio convexo o “convex-hull” de la nube de puntos, que es el menor poliedro convexo que contiene al dominio.

3.1 Restitución de la frontera

Para descartar las esferas exteriores remanentes, cuyos tetraedros pertenecen al convex-hull pero no al dominio, se requiere del uso de la dirección interior asignada anteriormente a los nodos de la frontera.

Una esfera es interior si el centro o el centroide del tetraedro esta hacia adentro del dominio. Pero el problema consiste en encontrar la condición necesaria, pues puede suceder que algunos nodos “vean” la esfera dentro y otros la vean afuera, como se muestra en la Figura 2.

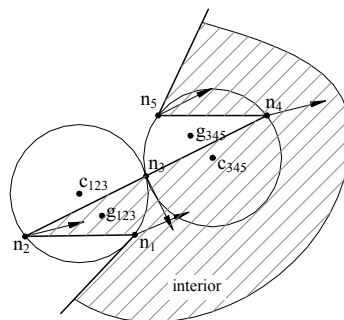


Figura 2: Esferas interiores y exteriores en situación conflictiva.

A falta de un criterio riguroso y después de varios experimentos, hemos adoptado el criterio de buscar el máximo valor absoluto del coseno del ángulo entre el versor interior y la dirección al centro de la esfera, si ese valor es negativo la esfera es exterior y se descarta*.

Hemos notado que éste método falla cuando una esfera contiene nodos de dos porciones

* En tres dimensiones, si el valor es muy pequeño se puede tratar de un sliver (ver más adelante) sobre la frontera, que también resulta descartable.

distintas de la frontera y la distancia entre esas porciones es mucho menor que el espaciamiento entre los nodos de una misma porción, es decir que falla con mallas de entrada muy mal hechas (de hecho debimos provocar esa situación para analizar los límites de confiabilidad). Para cualquier caso práctico, el método ha resultado ser exitoso.

3.2 Generador de puntos

Para rellenar de puntos el dominio probamos dos métodos, uno consiste en agregar el centro de toda esfera mayor que un dado tamaño y el otro en subdividir las aristas grandes. Siendo la velocidad de ambos métodos prácticamente la misma, resulta favorable el método de inserción de centros por la calidad de los elementos.

En el método de centros, es necesario comprobar que el nuevo nodo no caiga fuera del dominio; para ello, si la esfera tiene algún punto frontera y éste ve al centro como exterior, el nodo no se agrega.

Con cada nuevo nodo se actualiza la teselación por el mecanismo estándar: se busca el conjunto de esferas que contienen al nodo y se forma un poliedro por unión de sus tetraedros, luego se eliminan esas esferas y se agregan las nuevas, formadas con el nuevo nodo y cada cara del poliedro.

Para determinar que esfera se considera “grande” partimos de que no deseamos poner un nodo en el centro de un cubo de arista h , por lo tanto una distancia entre nodos aceptable es $1.1 \cdot h \sqrt{3}$ en tres dimensiones y lo mismo para el diámetro de esfera. El factor arbitrario 1.1 proporciona un 10% de tolerancia. El valor de h es el promedio de los valores en los nodos de la esfera y se asigna al nuevo nodo.

4 SLIVERS

Un elemento “feo” es aquel que provoca grandes gradientes de las funciones de forma. Para los procesos cosiméticos o de suavizado de la malla que deben calcular calidad muchas veces, se utilizan medidas alternativas de calidad más fáciles y rápidas de calcular, en general son relaciones geométricas involucrando volumen, máxima, y/o mínima longitud de arista, circunradio e inradio. En el mejor de los casos tales medidas se correlacionan bien con las funciones de forma, pero el análisis de esas correlaciones ha probado ser muy complicado⁶.

Un sliver es un tetraedro que tiene dos aristas opuestas muy próximas.

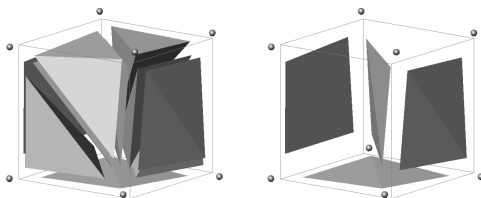


Figura 3: Izquierda: Partición de un cubo perturbado en tetraedros. Derecha: slivers.

La triangulación de Delaunay se adoptó como método de generación de mallas por dos

razones fundamentales, una es su evidente simplicidad y elegancia, la otra es que en dos dimensiones produce una triangulación que minimiza el máximo ángulo, es decir que provee elementos “bonitos”, que dan buenos resultados en el MEF, pero esto último no es cierto en tres dimensiones.

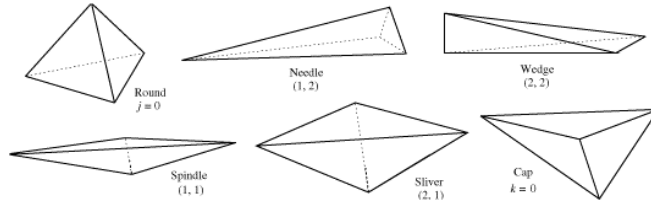


Figura 4: Clasificación de tetraedros según sus diedros⁷

De entre todos los tetraedros feos que se pueden formar, la gran mayoría tienen grandes desproporciones entre sus aristas, pero los slivers tienen sus nodos regularmente espaciados, de modo que resulta muy probable que definan una circunsfera vacía y aparezcan en la triangulación Delaunay de una nube bien espaciada*.

Si se pretende una malla exclusivamente de tetraedros, se pueden buscar los slivers de entre los elementos formados y se pueden eliminar modificando los elementos que comparten una arista “diagonal” del sliver. El resultado difiere de la malla estrictamente Delaunay pero es igualmente aceptable.

5 TESELACIÓN DELAUNAY EXTENDIDA

Si bien existen los (lentos) métodos de suavizado y algunos métodos de eliminación de slivers⁸, a nosotros nos ha resultado mucho más productivo unir tetraedros para formar elementos poliédricos.

Además del problema de los slivers, la triangulación de Delaunay no comparte la continuidad de su dual, el diagrama de Voronoï. Una pequeña perturbación de un nodo no altera demasiado el diagrama de Voronoï, pero la triangulación puede sufrir cambios bruscos como se ve en la Figura 5.

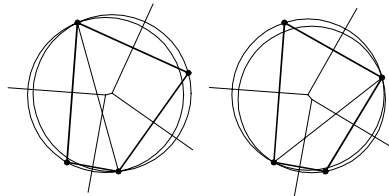


Figura 5: Cuatro nodos cerca de la posición ambigua.

* También pueden aparecer “caps” en la frontera, pues poseen esferas grandes pero puede que su centro exterior no “capture” otros nodos y resulte hueca.

Esto sucede cuando hay mas de cuatro nodos equidistantes de un mismo vértice del diagrama. Por ejemplo, en un cubo como el de la Figura 3, hay 8 nodos equidistantes del centro, eso da un total de 70 posibles tetraedros con igual derecho de pertenecer a la triangulación. Es más, una función en un punto cualquiera del cubo sería interpolada con los valores nodales de solo cuatro de los ocho nodos.

La Tesselación Extendida de Delaunay⁹, admite que todos los nodos equidistantes del centro formen un polígono esférico, reteniendo la continuidad del diagrama de Voronoï y proveyendo además de interpolantes más naturales, en el sentido de que todos los nodos del poliedro serán tenidos en cuenta para la interpolación en un punto interior del poliedro.



Figura 6: Polígonos circulares en 2D y dos vistas de un poliedro esférico en 3D.

Las ventajas de “engordar” los poliedros (rellenando más la esfera) han resultado tan apreciables que hemos ido un paso más adelante admitiendo la formación de poliedros con nodos que no son exactamente equidistantes de un vértice del diagrama sino sólo en forma aproximada.

Con referencia en la Figura 5, dado que las esferas son huecas, debe cumplirse la siguiente relación entre sus radios y sus centros:

$$|r_2 - r_1| \leq \|c_1 - c_2\| \quad (1)$$

Entonces para saber si dos esferas son parecidas alcanza con medir la distancia entre sus centros, decimos que dos esferas son similares si se cumple que:

$$\|c_1 - c_2\| < \delta r_{rms}, \quad (2)$$

Donde δ es un pequeño valor adimensional y r_{rms} es el radio medio cuadrático*.

Si dos (o más) esferas son similares, entonces formamos un poliedro con sus vértices.

El valor de δ es arbitrario. Dado que pretendemos unir esferas similares, debe ser un valor pequeño. Si es nulo sólo se formarán poliedros con nodos exactamente equidistantes de un vértice del diagrama de Voronoï. A medida que δ aumenta se formarán más poliedros supernumerarios. En todos los casos que hemos probado, un valor de $\delta = 10^{-2}$ resultó suficiente y adecuado a juzgar por la calidad de las mallas y los resultados obtenidos, pero variaciones de un orden de magnitud alrededor de ese valor ($10^{-3} - 10^{-1}$) no provocan mayores cambios, lo que habla muy bien de la robustez del método.

* Distancias y radios se calculan y almacenan al cuadrado.

6 CALIDAD DE LOS ELEMENTOS

Como mencionábamos antes, la calidad de un elemento se mide en forma directa por medio de los gradientes de las funciones de forma y en forma indirecta a través de simples medidas geométricas. En ausencia de una necesidad constante de calcular la calidad de los elementos*, podemos utilizar el método directo y medir la calidad γ de acuerdo a la siguiente ecuación:

$$\gamma = \frac{\text{máximo gradiente de las funciones de forma}}{\text{máximo gradiente esperado}} \quad (3)$$

El máximo gradiente de las funciones de forma lo calculamos en el centroide del poliedro, el gradiente máximo esperado resulta de una variación de 0 a 1 en la menor arista del poliedro, quedando:

$$\gamma = \frac{1}{h_{\min} |\nabla N|_{\max}} \quad (4)$$

La definición y el cálculo de las funciones de forma N y sus gradientes pueden encontrarse en las referencias^{3,4,9}.

Con esta medida de la calidad, nunca hemos obtenido valores menores que 10^{-3} y muy raras veces se observaron valores por debajo de 10^{-2} . En contraste, la triangulación Delaunay casi invariablemente produce slivers con calidades muy por debajo de 10^{-4} .

7 EJEMPLOS

Si bien el test de robustez de la EDT ha sido superado ampliamente por el hecho de que se han realizado miles de pasos de tiempo en distintos problemas Lagrangianos, tanto bi como tridimensionales, aquí se presenta un par de ejemplos que ilustran el comportamiento del método de generación de mallas. Los ejemplos aquí mostrados fueron realizados en una PC con procesador Pentium III de 800Mhz y con 256 Mb de RAM.

7.1 Estrella

El primer ejemplo es un poliedro estrellado sobre la base de un gran rombicuboctaedro (ver Figura 7), que presenta diversos tipos de ángulos. Fue realizado con la intención de analizar el comportamiento del generador de puntos con respecto al reconocimiento de las esferas interiores/exteriores al mezclar ángulos diedros agudos y obtusos y tanto cóncavos como convexos.

La malla de frontera consta de 7.370 nodos y 12.432 elementos. Todo el proceso de generación de los nodos interiores y su correspondiente diagrama de Voronoï se llevó a cabo en 6 segundos, con un resultado de 13.892 nodos y 64.396 esferas (tetraedros), que en 3 segundos mas se procesaron generando un total de 60.129 poliedros.

En la Figura 7 se destaca la presencia de numerosos slivers generados por el proceso de

* En realidad no se necesita puesto que no realizamos ningún suavizado; resulta útil aquí, sólo para investigar el método en sí.

triangulación estándar que desaparecieron al aplicar la teselación extendida de Delaunay.

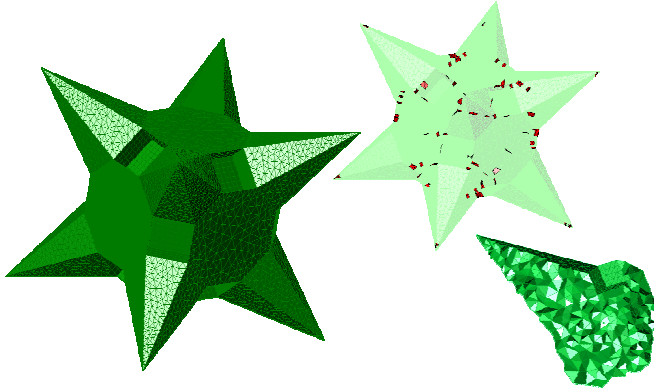


Figura 7: Poliedro estrellado, slivers y detalle de la malla interior.

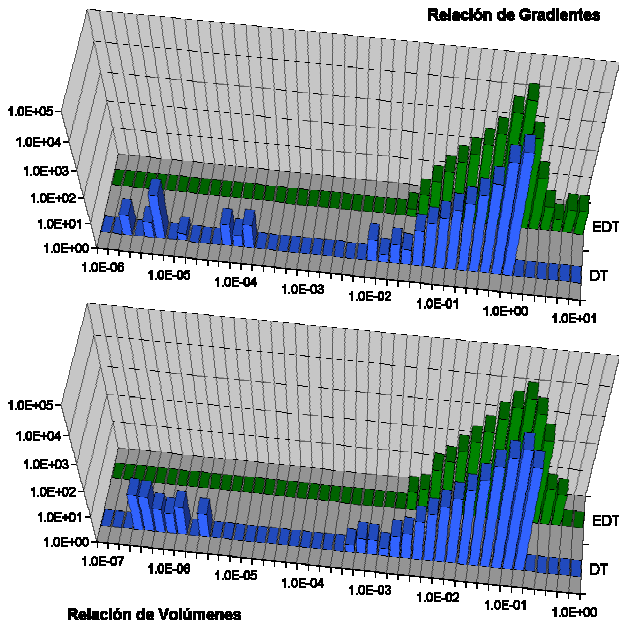


Figura 8: Calidad de las mallas obtenidas por DT y EDT

En la Figura 8 se muestran los histogramas bi-logarítmicos de dos medidas de la calidad

para dos mallas del ejemplo. Una malla fue obtenida por medio de la teselación estándar de Delaunay (DT) y la otra por la teselación extendida de Delaunay (EDT). Las dos medidas de calidad son la relación de gradientes definida por la ecuación (3) y la relación de llenado o de volúmenes que es el cociente entre el volumen del elemento y el volumen de la circunscrita.

Como puede apreciarse, ambas medidas de la calidad tienen buena correlación entre sí y muestran que utilizando EDT se evita la existencia de elementos de muy baja calidad (típicamente slivers), a la vez que se mejora la calidad a escala global.

7.2 Automóvil

El siguiente ejemplo pertenece a una serie de mallas que se realizaron para estudiar la performance de nuestros programas para análisis aerodinámico. Se requería una malla de unos 500.000 tetraedros, pero con elementos pequeños cerca de la carrocería y en la estela de viento tras el vehículo. Para ello se utilizó, como frontera interior, una malla preexistente de la carrocería que fue envuelta por una malla de h en la zona de la estela y por la malla de la frontera exterior totalizando unos 8.500 nodos de partida. El generador dio un resultado de 71.843 nodos y 433.200 tetraedros en un tiempo de 32 segundos. Los slivers fueron eliminados por swapping diagonal de los conjuntos de elementos a un lado (el más aplanado) de cada sliver.

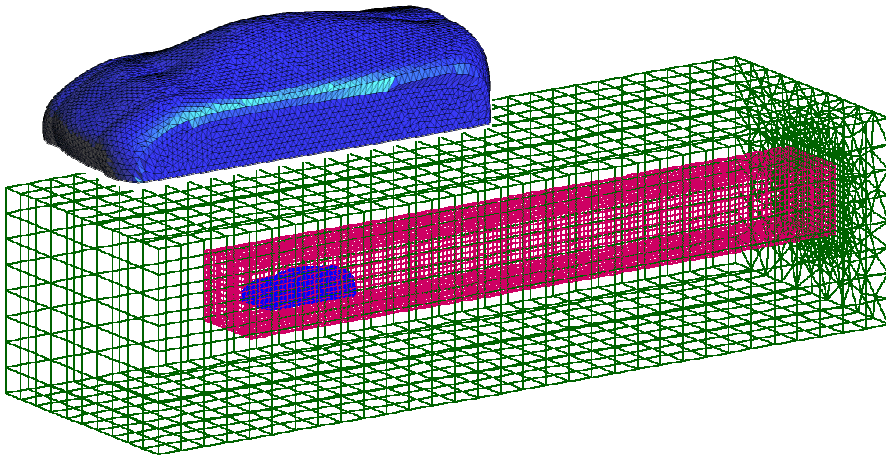


Figura 9: Malla del automóvil (con una ampliación superpuesta) y mallas de frontera y de h .

La calidad de la malla al eliminar los slivers pero dejar solo tetraedros y sin suavizar puede apreciarse en los histogramas del ejemplo anterior, donde se ve que eliminando los elementos de calidad extremadamente baja se obtiene una malla aceptable, que en este caso tiene una calidad mínima $\gamma = 0.0205$, lo cual puede considerarse un éxito del generador de puntos en tanto coloca nodos en posiciones que naturalmente dan buenos elementos, a excepción de los

slivers que deben ser eliminados.

8 CONCLUSIONES

Hemos presentado un método de generación de mallas poliédricas que comparte todas las ventajas del método estándar de Delaunay, pero con la enorme ventaja adicional de que no requiere de una etapa cosmética o de suavizado para mejorar la calidad de la malla, en tanto los elementos obtenidos adquieren naturalmente calidades aceptables.

Otra ventaja destacable es el hecho de que, cuando hay varias esferas similares (y eso sucede casi siempre y con más frecuencia cuanto más estructurada sea la nube de nodos), resulta mucho más natural y provoca menos error computacional² realizar las interpolaciones teniendo en cuenta a todos los vecinos naturales de un punto, en lugar de considerar sólo un tetraedro arbitrario.

9 REFERENCIAS

- [1] N. Sukumar, B. Moran, A.Yu. Semenov, V. V. Belikov, "Natural neighbour Galerkin Methods", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **50**, 1-27 (2001).
- [2] S. Idelsohn, E. Oñate, N. Calvo and F. Del Pin. "The meshless finite element method". Enviado a *Int. J. Num. Meth. Eng.* (2001)
- [3] V. Belikov, A. Semenov. "Non-Sibsonian interpolation on arbitrary system of points in Euclidean space and adaptive generating isolines algorithm". Numerical Grid Generation in Computational Field Simulation, Proc. of the 6th Intl. Conf. Greenwich Univ, July 1998.
- [4] N. A. Calvo, F. Del Pin y S. Idelsohn. "Funciones de forma en poliedros". *Mecánica Computacional*, Vol. XX, 2001.
- [5] P.L. George. *Automatic Mesh Generation, Applications to Finite Methods*. J. Wiley & Sons, New York, 1991, ISBN 0-471-93097-0.
- [6] J.R. Shewchuk, "What is a Good Linear Element? Interpolation, Conditioning, and Quality Measures". To appear in the Eleventh International Meshing Roundtable, 2002.
- [7] M. Bern, L.P. Chew, D. Eppstein, and J. Ruppert. "Dihedral bounds for mesh generation in high dimensions". 892nd Meeting Amer. Math. Soc., Brooklyn, 1994.
- [8] H. Edelsbrunner, D. Guoy, "An Experimental Study of Sliver Exudation". Proc. 10th Int. Meshing Roundtable, Sandia National Laboratories, pp.307-316, October 7-10 2001.
- [9] N. Calvo, S.R. Idelsohn and E. Oñate. "The Extended Delaunay Tessellation". Enviado a *Int. J. Num. Meth. Eng.* (2002)