

DOS MODELOS DÉBILMENTE ACOPLADOS DE REACCIÓN-DIFUSIÓN. OBSERVACIONES SOBRE EL ESTADO ESTACIONARIO.

Edgardo A. Moyano, Alberto F. Scarpettini*

Centro Atómico Constituyentes, Comisión Nacional de Energía Atómica (CNEA)
Av. Gral. Paz 1499, (1650) San Martín, Prov. Buenos Aires, Argentina
e-mail: emoyano@cnea.gov.ar, web page: <http://www.cnea.gov.ar>

* Becario de la Comisión Nacional de Energía Atómica (CNEA)

Palabras clave: reacción-difusión, acoplamiento débil, continuidad Hölder, sucesiones monótonas, diferencias finitas, estabilidad asintótica.

Resumen. *En el presente trabajo se realizan investigaciones sobre dos sistemas de reacción-difusión. Cada uno de estos modelos consta de una ecuación diferencial parcial parabólica semilineal, acoplada débilmente a una ecuación diferencial ordinaria.*

El primer sistema ha sido propuesto por M. V. Speight para simular el desprendimiento isotérmico del gas de fisión, durante la irradiación del combustible dióxido de uranio. En este caso la fuente es una función lineal de las incógnitas. El segundo modelo pertenece al campo de la biología, y es una versión simplificada por FitzHugh y Nagumo del trabajo original de Hodgkin y Huxley, que estudia la propagación de los impulsos nerviosos. En este segundo sistema, la función de reacción de la ecuación parabólica es una función no lineal de las incógnitas.

El método usado para la elaboración del algoritmo es el de las sucesiones monótonas, que son colecciones de funciones continuas en la matemática continua, y de grilla en la matemática discreta, que convergen monótonamente, superior e inferiormente, a la solución del modelo que se trate. Estos procesos iterativos parten de “soluciones superiores e inferiores” ordenadas, que de algún modo encierran las soluciones del problema. El procedimiento numérico emplea el método de las diferencias finitas, en forma implícita.

En este trabajo se intenta hacer apreciaciones sobre la evolución de las soluciones dependientes del tiempo, así como estudiar la posible estabilidad en el sentido de Lyapunov, de las soluciones a tiempo infinito o estado estacionario.

INTRODUCCIÓN

El presente trabajo intenta resolver numéricamente dos modelos de ecuaciones de reacción-difusión. Los algoritmos usados son aptos para tratar sistemas débilmente acoplados de ecuaciones llamadas semilineales por ser lineales en el operador diferencial y poseer además funciones de reacción que son funciones de las incógnitas del problema.

Los modelos que se estudian representan dos fenómenos de distintas áreas de la ciencia. El primero fue propuesto por M. V. Speight para simular el desprendimiento isotérmico del gas de fisión, durante la irradiación del combustible UO_2 . Su estudio permite aumentar el rendimiento del combustible y la seguridad de la operación¹.

Se asume que el UO_2 es una colección de granos esféricos². Todo el gas generado en un tiempo t , que no está en el borde de grano, es contenido dentro de él, tanto en solución como en burbujas intragranulares. La ecuación de difusión en una esfera de radio a , teniendo en cuenta que atrapa átomos y los disuelve, es descrita de la siguiente forma³:

$$\begin{aligned} \frac{\partial c}{\partial t} &= D \left(\frac{\partial^2 c}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial c}{\partial r} \right) - g c + b' m + \beta \\ \frac{\partial m}{\partial t} &= g c - b' m \end{aligned} \quad (1)$$

donde c es la concentración de átomos de gas en solución, D es el coeficiente difusivo, g es la probabilidad de un átomo de gas en solución de ser capturado por una burbuja, b' es la probabilidad de un átomo de gas dentro de una burbuja de ser rediseuelto, m es la cantidad de gas por unidad de volumen en las burbujas, β es la razón de producción de gas por unidad de volumen, y r es el radio de los granos esféricos. La segunda ecuación expresa el balance para el gas atrapado⁴.

Este modelo está compuesto por una ecuación diferencial parcial parabólica semilineal acoplada a una ecuación ordinaria. La difusión esférica se estudia como problema parabólico de condiciones iniciales $c_0(r)$ y $m_0(r)$ y condición de borde dada por:

$$\left. \frac{\partial c}{\partial r} \right|_{r=0} = 0 \quad ; \quad c(r=a) = 0 \quad (2)$$

Adimensionalizando el sistema:

$$x = \frac{r}{a} \quad ; \quad \tau = \frac{Dt}{a^2} \quad (3)$$

y llamando:

$$G = \frac{g a^2}{D} \quad ; \quad B = \frac{b' a^2}{D} \quad ; \quad \beta' = \frac{\beta a^2}{D} \quad (4)$$

resulta el sistema acoplado:

$$\begin{aligned} \frac{\partial c}{\partial \tau} &= \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{2}{x} \frac{\partial c}{\partial x} - G c + B m + \beta' \\ \frac{\partial m}{\partial \tau} &= G c - B m \end{aligned} \quad (5)$$

Mediante la transformación:

$$u = \frac{x c}{c_0} \quad ; \quad v = \frac{x m}{c_0} \quad ; \quad \alpha = \frac{\beta'}{c_0} \quad (6)$$

con $c_0 = c + m|_{r=0, t=0}$, resulta el sistema acoplado sin término convectivo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \tau} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - G u + B v + \alpha x \\ \frac{\partial v}{\partial \tau} &= G u - B v \end{aligned} \quad (7)$$

con las condiciones de borde:

$$u(x = 0) = u(x = 1) = 0 \quad (8)$$

y las condiciones iniciales:

$$\begin{aligned} u(\tau = 0) &= u_0 x(1 - x^2) \\ v(\tau = 0) &= v_0 x(1 - x^2) \end{aligned} \quad (9)$$

El segundo modelo pertenece al terreno de la biología, y es una versión simplificada por FitzHugh y Nagumo del trabajo original de Hodgkin y Huxley, que estudia la propagación de los impulsos nerviosos⁵. El modelo está representado por

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \sigma u(u - \theta)(1 - u) - b v \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= c u - a v \end{aligned} \quad (10)$$

La ecuación parabólica se estudia con cond. de borde Neumann (gradiente nulo). Para ambas ecuaciones se han elegido cond. iniciales constantes. En este modelo u representa el potencial eléctrico a través de la membrana, y v representa un par de variables del modelo original de Hodgkin-Huxley. Las ctes. D, σ, a, b, c y θ son positivas, siendo $0 < \theta < 1/2$.

Antes de pasar a comentar los algoritmos elaborados para resolver numéricamente estos modelos de reacción-difusión, se describe brevemente la teoría matemática del método de las sucesiones monótonas superiores e inferiores, que en el continuo y bajo ciertas condiciones, convergen monótonamente, superior e inferiormente, a la solución de cada sistema^{6,7,8}.

Se define como sector funcional a la colección de funciones (u, v) tales que $(\hat{u}, \hat{v}) \leq (u, v) \leq (\tilde{u}, \tilde{v})$, donde (\hat{u}, \hat{v}) es una “solución inferior” y (\tilde{u}, \tilde{v}) una “solución superior”. Se dice que el sistema (f_1, f_2) es cuasi-monótono creciente si $\partial f_1 / \partial v \geq 0$ y $\partial f_2 / \partial u \geq 0$, como sucede en el modelo que estudia la distribución del gas de fisión; y es cuasi-monótono mixto si $\partial f_1 / \partial v \leq 0$ y $\partial f_2 / \partial u \geq 0$, que es el caso del modelo de la propagación de los impulsos nerviosos. Debido a esta diferencia de monotonicidad, los procesos iterativos del método de las sucesiones monótonas son distintos.

Además, se define (\tilde{u}, \tilde{v}) como solución superior y (\hat{u}, \hat{v}) como solución inferior del problema:

$$\begin{aligned} u_t - L_1 u &= f_1(u, v) \\ v_t - L_2 v &= f_2(u, v) \end{aligned} \quad (11)$$

cuando valen las desigualdades:

$$\begin{aligned} \tilde{u}_t - L_1 \tilde{u} - f_1(\tilde{u}, \tilde{v}) &\geq 0 \geq \hat{u}_t - L_1 \hat{u} - f_1(\hat{u}, \hat{v}) \\ \tilde{v}_t - L_2 \tilde{v} - f_2(\tilde{u}, \tilde{v}) &\geq 0 \geq \hat{v}_t - L_2 \hat{v} - f_2(\hat{u}, \hat{v}) \end{aligned} \quad (12.a)$$

para el caso monótono creciente, y

$$\begin{aligned} \tilde{u}_t - L_1 \tilde{u} - f_1(\tilde{u}, \hat{v}) &\geq 0 \geq \hat{u}_t - L_1 \hat{u} - f_1(\hat{u}, \tilde{v}) \\ \tilde{v}_t - L_2 \tilde{v} - f_2(\tilde{u}, \tilde{v}) &\geq 0 \geq \hat{v}_t - L_2 \hat{v} - f_2(\hat{u}, \hat{v}) \end{aligned} \quad (12.b)$$

para el caso monótono mixto. El carácter monótono se debe mantener también en las condiciones de borde e iniciales:

$$\begin{aligned} B\tilde{u} &\geq Bu \geq B\hat{u} \\ \tilde{u}(x, 0) &\geq u_0 \geq \hat{u}(x, 0) \\ \tilde{v}(x, 0) &\geq v_0 \geq \hat{v}(x, 0) \end{aligned} \quad (13)$$

donde B es operador de borde. Es necesario mencionar también que las funciones de reacción de los dos modelos nombrados (f_1, f_2) , son lipschitzianas, es decir, suponiendo $u_1 \geq u_2$ y $v_1 \geq v_2$ se cumple:

$$|f_i(u_1, v_1) - f_i(u_2, v_2)| \leq K_L [|u_1 - u_2| + |v_1 - v_2|] \quad (14)$$

Se muestra fácilmente que en ambos modelos se satisfacen estas condiciones, en el primero globalmente, en el segundo localmente⁹. El carácter lipschitziano de las fuentes (f_1, f_2) , permite afirmar que se cumplen las condiciones que se nombran a continuación, que permiten afirmar la existencia de funciones $\underline{c}_i(x, t)$ y $\bar{c}_i(x, t)$, $i = 1, 2$ tales que:

$$\begin{aligned} f_1(u_1, v_1) - f_1(u_2, v_1) &\leq \bar{c}_1(u_1 - u_2), & u_1 &\geq u_2 \\ f_2(u_1, v_1) - f_2(u_1, v_2) &\leq \bar{c}_2(v_1 - v_2), & v_1 &\geq v_2 \end{aligned} \quad (15.a)$$

denominadas condiciones de Lipschitz a izquierda, y

$$\begin{aligned} f_1(u_1, v_1) - f_1(u_2, v_1) &\geq -\underline{c}_1(u_1 - u_2), & u_1 &\geq u_2 \\ f_2(u_1, v_1) - f_2(u_1, v_2) &\geq -\underline{c}_2(v_1 - v_2), & v_1 &\geq v_2 \end{aligned} \quad (15.b)$$

denominadas condiciones de Lipschitz a derecha, en la zona delimitada por (\tilde{u}, \tilde{v}) y (\hat{u}, \hat{v}) .

Las condiciones (15.a) aseguran la existencia de solución (u, v) del sistema diferencial y las condiciones (15.b) la unicidad de la misma (unicidad asegurada sólo para el sector delimitado por el par (\tilde{u}, \tilde{v}) y (\hat{u}, \hat{v}) elegido). La teoría de la resolución de sistemas acoplados de reacción-difusión, supone que las funciones $\underline{c}_i(x, t)$ y $\bar{c}_i(x, t)$, $i = 1, 2$, son Hölder continuas en el dominio del plano (x, t) de interés (\bar{D}_T) , de modo tal que:

$$\begin{aligned} F_1(u, v) &= \underline{c}_1(x, t)u + f_1(u, v) \\ F_2(u, v) &= \underline{c}_2(x, t)v + f_2(u, v) \end{aligned} \quad (16)$$

resultan Hölder continuas en $\bar{D}_T \times \langle (\tilde{u}, \tilde{v}), (\hat{u}, \hat{v}) \rangle$ y monótonas crecientes (F_1 en u y F_2 en v) en el primer modelo, y monótonas mixtas en el segundo^{6,10}. A partir de las condiciones (15.a) y (15.b) se construyen procesos iterativos que se demuestra convergen a la solución del problema continuo.

Los dos modelos propuestos son problemas evolucionarios parabólicos. El sistema elíptico o estacionario que se deduce de cada sistema parabólico puede tener múltiples soluciones de equilibrio⁹. Interesa en el presente trabajo realizar experiencias numéricas que permitan determinar cuestiones como las siguientes: ¿qué datos iniciales hacen que la solución del sistema parabólico evolucione a alguna solución estacionaria del problema de equilibrio?, ¿qué soluciones del sistema estacionario son asintóticamente estables? Interesa además ubicar puntos de bifurcación.

Se determinan funciones (\tilde{u}, \tilde{v}) y (\hat{u}, \hat{v}) que cumplan la definición de solución superior e inferior. Para el primer modelo, estas funciones de partida elegidas tienen la forma general:

$$\begin{aligned} \tilde{u}(x,0) &= \tilde{a} x(x^2 - 1) \quad ; \quad \hat{u}(x,0) = \hat{a} x(x^2 - 1) \\ \tilde{v}(x,0) &= \frac{G}{B} \tilde{u}(x,0) \quad ; \quad \hat{v}(x,0) = \frac{G}{B} \hat{u}(x,0) \end{aligned} \quad (17.a)$$

imponiendo ciertas restricciones a los valores de \tilde{a} y \hat{a} . En cambio, para el segundo modelo, se eligen funciones de partida constantes:

$$\begin{aligned} \tilde{u}(x,0) &= \tilde{u}_0 \quad ; \quad \hat{u}(x,0) = \hat{u}_0 \\ \tilde{v}(x,0) &= \frac{c}{a} \tilde{u}_0 \quad ; \quad \hat{v}(x,0) = \frac{c}{a} \hat{u}_0 \end{aligned} \quad (17.b)$$

De modo que los modelos diferenciales propuestos gozan de las exigencias de la teoría monótona que permite afirmar que poseen solución continua en cada sector funcional para valores apropiados de \tilde{a} y \hat{a} .

Se ha usado la metodología de las diferencias finitas, eligiendo un esquema de cálculo cuya solución discreta, a pesar de la no linealidad del problema original, posee propiedades cualitativas análogas a las de la solución (u, v) del sistema continuo. Como el método empleado para resolver este problema diferencial acoplado, no lineal, se basa en la elaboración de sucesiones de funciones que tienden superior e inferiormente, en forma monótona, a la solución (u, v) del problema, ha sido necesario verificar primero la cuasimonotonicidad del problema diferencial y elegir un esquema en diferencias que preserve esa monotonicidad. De modo que mediante esquemas en diferencias finitas implícitos, se discretizan las ecuaciones y las condiciones de borde, obteniendo (i subíndice espacial, j subíndice temporal):

$$\begin{aligned} \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} - \frac{u_{i-1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i+1,j+1}}{h^2} &= f_1(u_{i,j+1}, v_{i,j+1}) \\ \frac{v_{i,j+1} - v_{i,j}}{k} &= f_2(u_{i,j+1}, v_{i,j+1}) \end{aligned} \quad (18)$$

Luego, se suma $c_n u_{i,j}$ a ambos miembros de cada ecuación y se elabora un proceso iterativo desacoplado para cada nivel temporal. Este proceso se ejecuta hasta que la norma infinita de la diferencia entre dos perfiles consecutivos sea menor que un ε prefijado. Logrado esto, el control pasa al nivel temporal siguiente. Es así que de la expresión iterativa continua:

$$\begin{aligned} (u)_i^{(m)} - L_1 u^{(m)} + c_1 u^{(m)} &= F_1(u^{(m-1)}, v^{(m-1)}) \\ (v)_i^{(m)} + c_2 v^{(m)} &= F_2(u^{(m-1)}, v^{(m-1)}) \end{aligned} \quad (19)$$

(m subíndice de iteración), se pasa a la discreta:

$$\frac{u_{i,j+1}^{(m)} - u_{i,j}^{(m)}}{k} - \frac{u_{i-1,j+1}^{(m)} - 2u_{i,j+1}^{(m)} + u_{i+1,j+1}^{(m)}}{h^2} + c_1 u_{i,j+1}^{(m)} = c_1 u_{i,j+1}^{(m-1)} + f_1(u_{i,j+1}^{(m-1)}, v_{i,j+1}^{(m-1)})$$

$$\frac{v_{i,j+1}^{(m)} - v_{i,j}^{(m)}}{k} + c_2 v_{i,j+1}^{(m)} = c_2 v_{i,j+1}^{(m-1)} + f_2(u_{i,j+1}^{(m-1)}, v_{i,j+1}^{(m-1)})$$
(20)

Lo mismo vale con \bar{c}_1 y \bar{c}_2 , para elaborar la sucesión decreciente de funciones monótonas ordenadas de grilla. De manera semejante al proceder de la Matemática continua, se demuestra que existen los operadores inversos y que éstos resultan monótonos.

Los procesos iterativos propuestos convergen, en el continuo, de modo tal que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \bar{u}^{(m)}(x, t) = \bar{u}(x, t) \quad ; \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \underline{u}^{(m)}(x, t) = \underline{u}(x, t)$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \bar{v}^{(m)}(x, t) = \bar{v}(x, t) \quad ; \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \underline{v}^{(m)}(x, t) = \underline{v}(x, t)$$
(21)

hecho que sumado a la hipótesis que cada (f_1, f_2) cumple las propiedades de Lipschitz a izquierda y a derecha, resulta:

$$\bar{u} = \underline{u} \equiv u$$

$$\bar{v} = \underline{v} \equiv v$$
(22)

y es la única solución del problema diferencial original⁶.

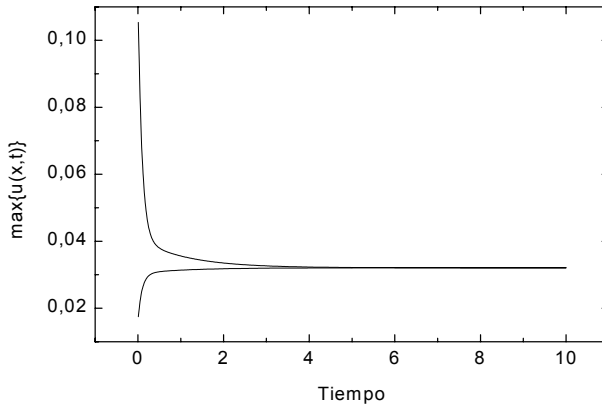


Figura 1a. Evolución en el tiempo de la norma infinita de la solución superior $\tilde{u}(x, t)$ e inferior $\hat{u}(x, t)$ del problema del gas de fisión, para el caso $G=1$, $B=1$, $\alpha=0,5$, tomando una grilla de $h=k=0,01$.

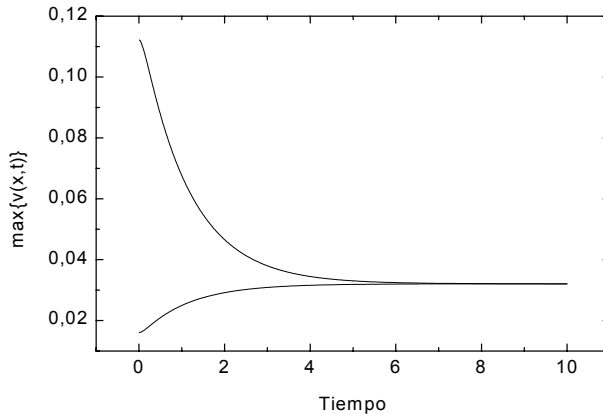


Figura 1b. Evolución en el tiempo de la norma infinita de la solución superior $\tilde{v}(x,t)$ e inferior $\hat{v}(x,t)$ del problema del gas de fisión, para el caso $G = 1$, $B = 1$, $\alpha = 0,5$, tomando una grilla de $h = k = 0,01$.

Análogamente, el algoritmo genera sucesiones inferiores $\{u_{i,j}^{(m)}\}$, $\{v_{i,j}^{(m)}\}$ y superiores $\{\bar{u}_{i,j}^{(m)}\}$, $\{\bar{v}_{i,j}^{(m)}\}$ de funciones de grilla ordenadas y monótonas, que convergen superior e inferiormente, a la solución del sistema discretizado¹¹. En la figura 1 puede observarse la evolución temporal de estas sucesiones para el problema del gas de fisión, a través de la norma infinita de la solución superior e inferior, y su convergencia a la solución del problema elíptico. En la figura 2 se representan las funciones de partida y la solución a la cual convergen las sucesiones. En la figura 3 se observa la evolución temporal para el caso del problema de la propagación de los impulsos nerviosos.

Se demuestra que el sistema discretizado es numéricamente estable, que el sistema tipo Picard (20) converge a la solución del sistema discretizado (18) y que esta solución del sistema discretizado tiende a ser la solución del problema diferencial (11) cuando el paso de malla tiende a cero.

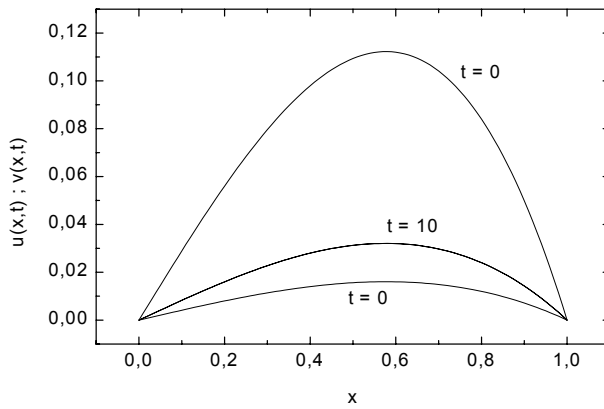


Figura 2. Perfiles de las funciones de partida y de la solución del problema del gas de fisión, luego de 1000 pasos temporales, para el caso $G = 1$, $B = 1$, $\alpha = 0,5$, tomando una grilla de $h = k = 0,01$.

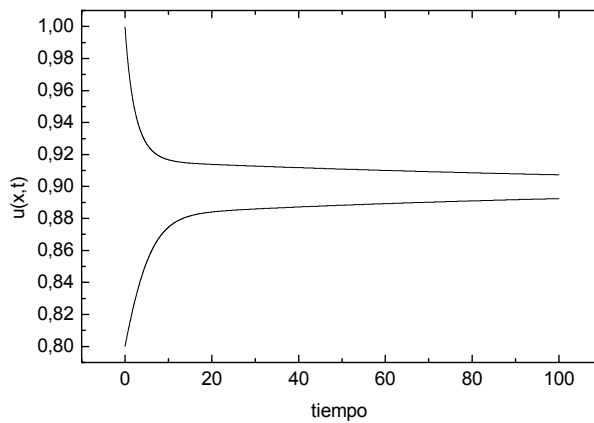


Figura 3. Evolución en el tiempo de la norma infinita de la solución superior $\tilde{u}(x,t)$ e inferior $\hat{u}(x,t)$ del problema de la propagación de los impulsos nerviosos, para el caso $D = \sigma = b = 1$, $\theta = 0,4$, $c = 5.10^{-4}$ y $a = 10^{-2}$.

Es conveniente notar que el proceso iterativo mencionado en (20) comprende para cada m ($m = 1, 2, \dots$) un sistema lineal desacoplado del problema parabólico, en diferencias finitas. De modo que la sucesión está bien definida. Además, se puede demostrar que tanto en el caso del problema del gas de fisión (calificado como monótono creciente), como en el de la propagación de los impulsos nerviosos (que se denomina de monotonicidad mixta), las sucesiones $\{\bar{u}_{i,j}^{(m)}, \bar{v}_{i,j}^{(m)}\}$ y $\{\underline{u}_{i,j}^{(m)}, \underline{v}_{i,j}^{(m)}\}$ mantienen la propiedad de monotonía, y además que, partiendo de $(\bar{u}_{i,j}^{(0)}, \bar{v}_{i,j}^{(0)}) = (\tilde{u}_{i,j}, \tilde{v}_{i,j})$ y $(\underline{u}_{i,j}^{(0)}, \underline{v}_{i,j}^{(0)}) = (\hat{u}_{i,j}, \hat{v}_{i,j})$, convergen monótonamente, superior e inferiormente, a las soluciones $(\bar{u}_{i,j}, \bar{v}_{i,j})$, $(\underline{u}_{i,j}, \underline{v}_{i,j})$ del sistema discretizado originalmente.

En el caso de monotonicidad mixta se construyen dos sucesiones $\{\bar{u}_{i,j}^{(m)}, \bar{v}_{i,j}^{(m)}\}$, $\{\underline{u}_{i,j}^{(m)}, \underline{v}_{i,j}^{(m)}\}$ del proceso iterativo:

$$\begin{aligned} (\bar{u})_t^{(m)} - L_1 \bar{u}^{(m)} + \bar{c}_1 \bar{u}^{(m)} &= F_1(\bar{u}^{(m-1)}, \bar{v}^{(m-1)}) \\ (\bar{v})_t^{(m)} + \bar{c}_2 \bar{v}^{(m)} &= F_2(\bar{u}^{(m-1)}, \bar{v}^{(m-1)}) \\ (\underline{u})_t^{(m)} - L_1 \underline{u}^{(m)} + \underline{c}_1 \underline{u}^{(m)} &= F_1(\underline{u}^{(m-1)}, \bar{v}^{(m-1)}) \\ (\underline{v})_t^{(m)} + \underline{c}_2 \underline{v}^{(m)} &= F_2(\underline{u}^{(m-1)}, \underline{v}^{(m-1)}) \end{aligned} \quad (23)$$

Este proceso iterativo contrasta con el propuesto para el caso de monotonicidad creciente, donde la secuencia $\{u_{i,j}^{(m)}, v_{i,j}^{(m)}\}$ puede ser computada en forma independiente de las otras sucesiones. Se demuestra que en esta forma de iterar, las sucesiones resultantes son monótonas, es decir mantienen

$$(\underline{u}_{i,j}^{(m-1)}, \underline{v}_{i,j}^{(m-1)}) \leq (\underline{u}_{i,j}^{(m)}, \underline{v}_{i,j}^{(m)}) \leq (\bar{u}_{i,j}^{(m)}, \bar{v}_{i,j}^{(m)}) \leq (\bar{u}_{i,j}^{(m-1)}, \bar{v}_{i,j}^{(m-1)}) \quad m = 1, 2, \dots \quad (24)$$

Observando el proceso iterativo utilizado, se nota que el problema no lineal se transforma de ese modo en una sucesión de problemas lineales, y en cada uno de esos problemas se aplica la teoría conocida para la resolución del problema lineal⁸

$$\begin{aligned} u_t - D u_{xx} + c_0(x)u &= f(x, t) \quad \text{en } D_T \\ B u &= h(x, t) \quad \text{sobre } S_T \\ u(x, 0) &= u_0(x) \quad \text{en } \Omega \end{aligned} \quad (25)$$

Es decir, ello permite aplicar el teorema de existencia para problemas parabólicos lineales de borde cuando los datos f, h, u_0 tienen continuidad Hölder en sus dominios y u_0 satisface la condición de borde en $t=0$. Con esas condiciones este último problema lineal tiene solución única $u \in C(\bar{D}_T) \cap C^{1,2}(D_T)$, que se expresa en forma integral mediante funciones de Green^{8,12,13}.

Es bueno recalcar que el método monótono es útil para establecer teoremas de existencia-comparación tanto en el caso de una ecuación escalar como en sistemas acoplados, como ocurre en los dos modelos que se mencionan. El hecho de que sean Hölder continuas las funciones de reacción (f_1, f_2) del modelo acoplado, así como las condiciones iniciales y las funciones $\underline{c}_i(x, t)$, $\bar{c}_i(x, t)$ para $i = 1, 2$, permite elaborar el método de las soluciones superiores e inferiores, de carácter iterativo⁶. De esta manera, se justifica el proceso iterativo de la Matemática continua, que inspira la creación de un proceso iterativo semejante en el terreno discreto, valiéndose de las diferencias finitas, que converge a la solución del problema diferencial, cuando el paso de malla tiende a cero.

Soluciones de equilibrio

En el modelo del gas de fisión, que posee (f_1, f_2) lineal, resulta el problema estacionario:

$$\begin{aligned} 0 &= u_{xx} - Gu + Bv + \alpha x \\ 0 &= Gu - Bv \end{aligned} \tag{26}$$

Es decir,

$$u_{xx} + \alpha x = 0 \tag{27}$$

con $u(0) = u(1) = 0$. Integrando dos veces resulta

$$u + \frac{\alpha}{6}x^3 + cx + d = 0 \tag{28}$$

y utilizando las condiciones de borde obtenemos $c = -\alpha/6$ y $d = 0$. Por lo tanto, el estado estacionario tiene por solución:

$$u(x) = \frac{\alpha}{6}x(1 - x^2) \tag{29}$$

Eligiendo (17.a) como sector funcional, se comprueba que la solución del sistema parabólico tiende asintóticamente a la solución del estacionario cuando t tiende a infinito.

En el segundo modelo, el que estudia la propagación de los impulsos nerviosos, el problema elíptico o estacionario es:

$$\begin{aligned} 0 &= Du_{xx} + \sigma u(u - \theta)(1 - u) - bv \\ 0 &= cu - av \end{aligned} \tag{30}$$

Es decir,

$$Du_{xx} + \sigma u(u - \theta)(1 - u) - \frac{bc}{a}u = 0 \quad (31)$$

con $u_x(0) = u_x(1) = 0$ como condiciones de borde. El polinomio

$$p(u) = \sigma u(u - \theta)(1 - u) - \frac{bc}{a}u \quad (32)$$

tiene las raíces $u_1 = 0$ y las dos que salen de resolver

$$u^2 - (1 + \theta)u + \left(\theta + \frac{bc}{\sigma a}\right) = 0 \quad (33)$$

Eligiendo los parámetros de modo que resulte

$$(1 + \theta)^2 > 4\left(\theta + \frac{bc}{\sigma a}\right) \quad (34)$$

se obtienen otras dos raíces reales, que son soluciones constantes y entonces verifican las condiciones de borde. Ellas son:

$$u_{\pm} = \frac{1 + \theta}{2} \pm \sqrt{\frac{(1 - \theta)^2}{4} - \frac{bc}{\sigma a}} \quad (35)$$

Las experiencias numéricas muestran que la solución $u_1 = 0$ se comporta como un atractor, es una solución asintóticamente estable. Lo mismo ocurre con u_+ , resultando u_- una solución inestable.

Es posible efectuar un diagrama de fases para este problema. Multiplicando la ecuación estacionaria (31) por u_x , e integrando se obtiene:

$$H(u, u_x) = \frac{Du_x^2}{2} - \frac{\sigma u^4}{4} + \frac{\sigma(1 + \theta)u^3}{3} - \left(\sigma\theta + \frac{bc}{a}\right)\frac{u^2}{2} = cte \quad (36)$$

El gráfico en el plano (u, u_x) de la figura 4 muestra posibles soluciones.

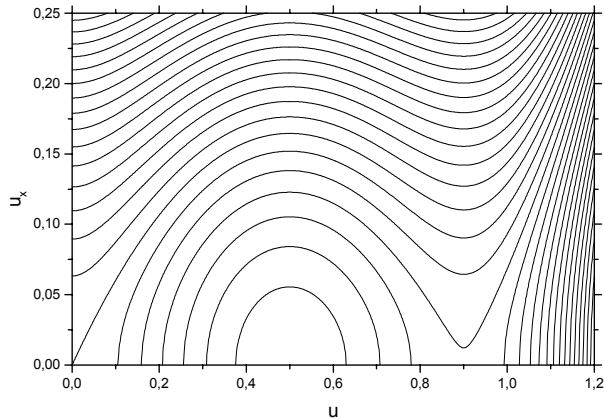


Figura 4. Diagrama de fases para el problema de la propagación de los impulsos nerviosos, para el caso $D=\sigma=b=1$, $\theta=0,4$, $c=5.10^{-4}$ y $a=10^{-2}$.

CONCLUSIONES

El método matemático de las soluciones superiores e inferiores, permite elaborar algoritmos que conservan las características más importantes de la teoría matemática, en especial la monotonicidad. Se ha verificado en el presente trabajo que esta característica se mantiene en los dos modelos débilmente acoplados semilineales, ya que las funciones de grilla generadas, mantienen la monotonicidad. Previamente se ha verificado que existe el operador inverso o matriz de evolución, generada por el uso de diferencias finitas en forma implícita, y que este operador inverso es monótono creciente.

Se han hecho experiencias numéricas que verifican la convergencia, la monotonicidad, la existencia y unicidad de solución, en el sector delimitado por las llamadas soluciones superior e inferior (que cumplen las propiedades antes nombradas), y observaciones sobre la estabilidad de las soluciones de equilibrio.

REFERENCIAS

- [1] D. R. Olander, *Fundamental aspects of nuclear reactor fuel elements*, Technical Information Center, US Department of Energy, 1976.
- [2] R. J. White y M. O. Tucker, *A new fission-gas release model*, J. Nuclear Mater., 118 (1983), 1-38.
- [3] M. V. Speight, *A calculation on the size distribution of intragranular bubbles in irradiated UO₂*, J. Nuclear Mater., 38 (1971), 236-238.

- [4] T. Nakajima y H. Saito, *A comparison between fission gas release data and FEMAXI-IV code calculations*, Nuclear Eng. And Design, 101 (1987), 267-279.
- [5] J. Nagumo, S. Arimoto y S. Yoshizawa, *An active pulse transmission line simulating nerve axon*, Proc. IRE, 50 (1962), 2061-2070.
- [6] C. V. Pao, *Nonlinear parabolic and elliptic equations*, Plenum Press, New York, 1992.
- [7] J. Smoller, *Shock waves and reaction-diffusion equations*, Springer-Verlag, New York, 1994.
- [8] O. A. Ladyzhenskaja, V. A. Solonnikov y N. N. Ural'ceva, *Linear and quasi-linear equations of parabolic type*, Translations of Mathematical Monographs, vol. 23, American Math. Society, Providence, 1968.
- [9] J. D. Logan, *Nonlinear partial differential equations*, J. Wiley, 1994.
- [10] F. D. Gajov, *Problemas de contorno*, MIR, 1980.
- [11] C. V. Pao, *Numerical methods for coupled systems of nonlinear parabolic boundary value problems*, J. Math. Anal. Appl., 151 (1990), 581-608.
- [12] A. Friedman, *Partial differential equations of parabolic type*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.Y., 1964.
- [13] A. C. Lazer, *Topics in the study of boundary value problems for semi-linear differential equations*, Trabalho de Matemática Nro. 196, 1982.