Universidad Nacional del Litoral
Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas

Apellido y nombre:

DNI:

Examen Parcial 26/06/2015

1. Sea un campo de velocidad $\mathbf{v}(\mathbf{x})$, en una descripción espacial del movimiento. Sea $\boldsymbol{\alpha} = \dfrac{D\mathbf{v}}{Dt}$ la aceleración de una partícula material que pasa en el instante t por el lugar $\mathbf{x}$. Mostrar que la aceleración puede escribirse en la forma:

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} + \frac{1}{2}\nabla v^2$$

   donde $\boldsymbol{\omega} = \mathrm{rot}\ \mathbf{v}$ es el vector de vorticidad y $v^2 = \mathbf{v} \bullet \mathbf{v}$.

2. El movimiento de un continuo está dado por

$$v_1 = \frac{x_1}{1+t}; \quad v_2 = \frac{2x_2}{1+t}; \quad v_3 = \frac{3x_3}{1+t};$$

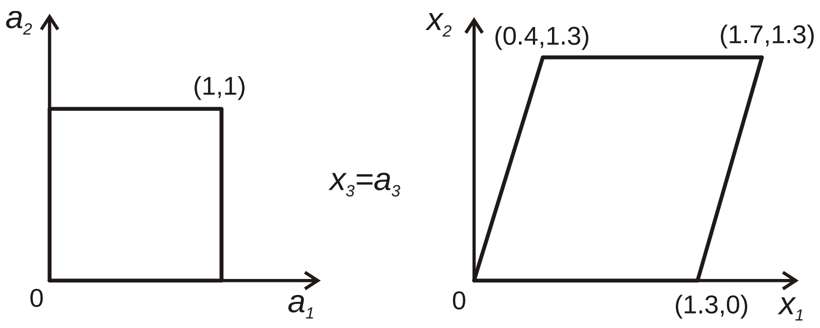
   - Determinar las componentes de aceleración para este movimiento, donde x_i es la componente i-ésima de la posición espacial.
   - Integrar las ecuaciones de velocidad y obtener las relaciones de desplazamiento $x_i = \chi_i(\mathbf{a}, t)$ (función de cambio de configuración, donde $\mathbf{a}$ es la posición inicial al instante t_0 =0.).
   - A partir de las ecuaciones para el desplazamiento, calcular las componentes de aceleración para el movimiento en forma Lagrangiana.

3. Sea V el volumen encerrado por una superficie S de normal saliente unitaria n, y sean $\phi = \phi(x_1, x_2, x_3)$ y $\psi = \psi(x_1, x_2, x_3)$ funciones escalares de las coordenadas x_i. Usando el teorema de Green, demostrar:

$$\int_S (\phi\nabla\psi - \psi\nabla\phi) \cdot \boldsymbol{n}\ dS = \int_V (\phi\Delta\psi - \psi\Delta\phi)\ dV$$

   donde $\Delta\psi = \psi_{,ii}$ es el laplaciano de la función ψ.

4. Considerar una placa bajo el estado de deformación homogénea que muestra la figura. Calcular:
   a) campo de desplazamientos u_i.
   b) componentes del tensor de deformaciones infinitesimales e_{ij}
   c) componentes del tensor de deformaciones de Green-Lagrange E_{ij}.



5. El estado de deformación (infinitesimal) en un punto, medido en referencia a un sistema de ejes coordenados Cartesianos xyz, está dado por

$$\begin{bmatrix} 0.001 & -0.003 & 0 \\ -0.003 & 0.002 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Asumiendo se trata de un sólido elástico isótropo, calcular las tensiones principales. Suponer λ =1.2E6 kg/cm^2 y μ =8.1E5 kg/cm^2.

1

$$\underset{\sim}{\alpha} = \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \underline{\omega} \times \underline{V} + \frac{1}{2} \underline{\nabla} v^2$$

$$\alpha_i = \frac{\partial v_i}{\partial t} + \varepsilon_{ijk}\, \omega_j v_k + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} (v_k v_k) =$$

$$= \frac{\partial v_i}{\partial t} + \underbrace{\varepsilon_{ijk}\, \varepsilon_{jlm}}_{\delta_{kl}\delta_{im} - \delta_{km}\delta_{il}} \frac{\partial v_m}{\partial x_l} v_k + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} v_k$$

$$= \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial v_i}{\partial x_k} v_k - \cancel{\frac{\partial v_k}{\partial x_i} v_k} + \cancel{\frac{\partial v_k}{\partial x_i} v_k} =$$

$$= \frac{D v_i}{D t}$$

QED

2

2

$$v_1 = \frac{x_1}{1+t} \qquad v_2 = \frac{2x_2}{1+t} \qquad v_3 = \frac{3x_3}{1+t}$$

a) $$\alpha_i = \frac{Dv_i}{Dt} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k}$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial \underline{x}} = \begin{pmatrix} 1/1+t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \frac{\partial v_2}{\partial \underline{x}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2/1+t \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial v_3}{\partial \underline{x}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3/1+t \end{pmatrix}$$

$$\alpha_1 = \frac{\partial v_1}{\partial t} + \underline{v} \cdot \frac{\partial v_1}{\partial \underline{x}} = -\frac{x_1}{(1+t)^2} + \frac{x_1}{(1+t)^2} = 0$$

$$\alpha_2 = \frac{\partial v_2}{\partial t} + \underline{v} \cdot \frac{\partial v_2}{\partial \underline{x}} = -\frac{2x_2}{(1+t)^2} + \frac{4x_2}{(1+t)^2} = \frac{2x_2}{(1+t)^2}$$

$$\alpha_3 = \frac{\partial v_3}{\partial t} + \underline{v} \cdot \frac{\partial v_3}{\partial \underline{x}} = -\frac{3x_3}{(1+t)^2} + \frac{9x_3}{(1+t)^2} = \frac{6x_3}{(1+t)^2}$$

b) $$v_1 = \frac{x_1}{1+t} = \frac{dx_1}{dt}$$

$$\therefore \quad \frac{dx_1}{x_1} = \frac{dt}{1+t}$$

$$\int \frac{dx_1}{x_1} = \int \frac{dt}{1+t}$$

$$\ln x_1 = \ln(1+t) + \mathbb{C}$$

$$\therefore \quad x_1 = C_1 (1+t) \qquad (C_1 = \ln \mathbb{C})$$

P/fijar la cte

$$t=0 \Rightarrow x_1 = a_1 \qquad \text{(posición inicial)}$$

$$\therefore \quad C_1 = a_1$$

Luego

$$x_1 = a_1 (1+t) \qquad (*)$$

P/las otras compontes:

$$v_2 = \frac{2x_2}{1+t} = \frac{dx_2}{dt} \Rightarrow \frac{dx_2}{x_2} = 2\frac{dt}{1+t}$$

$$\ln x_2 = \underbrace{2\ln(1+t)}_{\ln(1+t)^2} + \mathbb{C}$$

$$\therefore \quad x_2 = C_2 (1+t)^2$$

$$t=0 \Rightarrow x_2 = C_2 = a_2 \Longrightarrow \boxed{x_2 = a_2 (1+t)^2}$$

De la misma manera $\Longrightarrow \boxed{x_3 = a_3 (1+t)^3}$ $(**)$

c)

$$v_1 = \frac{dx_1}{dt} = a_1$$

$$v_2 = \frac{dx_2}{dt} = 2a_2 (1+t)$$

$$v_3 = \frac{dx_3}{dt} = 3a_3 (1+t)^2$$

(Notar que

$$V_1 = a_1 = \frac{x_1}{1+t}$$

reemplazando ($*$)

y coincide c/el enunciado. Idem V_2, V_3)

$$\alpha_1 = \frac{dV_1}{dt} = 0$$

$$\alpha_2 = \frac{dV_2}{dt} = 2a_2$$

$$\alpha_3 = \frac{dV_3}{dt} = 6a_3(1+t)$$

Usando ($**$) se ve la coincidencia c/resultados del punto (a).

QED

3

$$\int_S (\phi \underline{\nabla} \psi - \psi \underline{\nabla} \phi) \cdot \underline{n} \, dS = \int_V (\phi \Delta \psi - \psi \Delta \phi) \, dV$$

$$\int_S (\phi \psi_{,i} - \psi \phi_{,i}) n_i \, dS \underset{\text{Green}}{=}$$

$$= \int_V (\phi \psi_{,i} - \psi \phi_{,i})_{,i} \, dV =$$

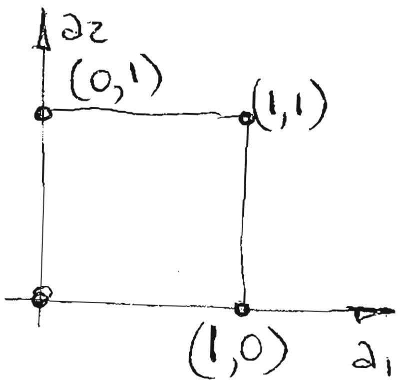
$$= \int_V (\cancel{\phi_{,i} \psi_{,i}} + \phi \psi_{,ii} - \cancel{\psi_{,i} \phi_{,i}} - \psi \phi_{,ii}) \, dV$$

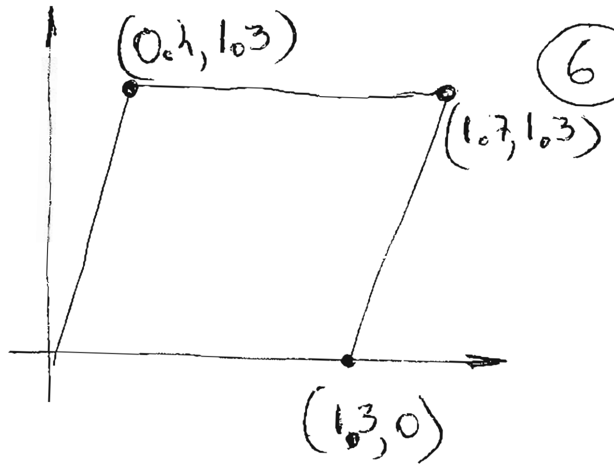
$$= \int_V (\phi \psi_{,ii} - \psi \phi_{,ii}) \, dV$$

QED

1

a)





6

Deformación homogénea $\Rightarrow$ $x_i = A_{ij}\, a_j$

Evaluando a los vértices:

$$\begin{pmatrix} 1.3 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{\underline{A}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} A_{11}\, 1 = 1.3 \Rightarrow A_{11} = 1.3 \\ A_{21}\, 1 = 0 \Rightarrow A_{21} = 0 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 0.4 \\ 1.3 \end{pmatrix} = \underline{\underline{A}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} A_{12}\, 1 = 0.4 \Rightarrow A_{12} = 0.4 \\ A_{22}\, 1 = 1.3 \Rightarrow A_{22} = 1.3 \end{array}$$

$\therefore$

$$x_1 = 1.3\, a_1 + 0.4\, a_2$$
$$x_2 = 1.3\, a_2$$

Luego:

$$u_1 = x_1 - a_1 = 0.3\, a_1 + 0.4\, a_2$$
$$u_2 = x_2 - a_2 = 0.3\, a_2$$

b)

$$e_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial a_1} = 0.3 \qquad e_{12} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial a_2} + \frac{\partial u_2}{\partial a_1}\right) = 0.2$$

$$e_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial a_2} = 0.3$$

$$\underline{\underline{e}} = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.2 \\ 0.2 & 0.3 \end{bmatrix}$$

c)

$$E_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial a_j} + \frac{\partial u_j}{\partial a_i} + \frac{\partial u_k}{\partial a_i}\frac{\partial u_k}{\partial a_j}\right)$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial a_1}\frac{\partial u_1}{\partial a_1} + \frac{\partial u_2}{\partial a_1}\frac{\partial u_2}{\partial a_1}\right) = \frac{0.3 \times 0.3}{2} = 0.045$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial a_2}\frac{\partial u_1}{\partial a_2} + \frac{\partial u_2}{\partial a_2}\frac{\partial u_2}{\partial a_2}\right) = \frac{0.4 \times 0.4 + 0.3 \times 0.3}{2} =$$

$$= 0.125$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial a_1}\frac{\partial u_1}{\partial a_2} + \frac{\partial u_2}{\partial a_1}\frac{\partial u_2}{\partial a_2}\right) = \left(\frac{0.3 \times 0.4}{2}\right) = 0.06$$

$\therefore$

$$\underline{\underline{E}} = \begin{bmatrix} 0.3 + 0.045 & 0.2 + 0.06 \\ 0.2 + 0.06 & 0.3 + 0.125 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0.345 & 0.26 \\ 0.26 & 0.425 \end{bmatrix}$$

5

$$\underline{\underline{e}} = \begin{bmatrix} 0.001 & -0.003 & 0 \\ -0.003 & 0.002 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{ij} = \lambda e_{\alpha\alpha} \delta_{ij} + 2\mu e_{ij}$$

$$e_{\alpha\alpha} = 0.001 + 0.002 = 0.003$$

$$\lambda e_{\alpha\alpha} = 3 \times 10^{-3} \times 1.2 \times 10^{6} = 3.6 \times 10^{3}$$

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} (1.62 \times 10^{6} \times 10^{-3} + 3.6 \times 10^{3}) & & \text{Simet} \\ -1.62 \times 10^{6} \times 3 \times 10^{-3} & 1.62 \times 10^{6} \times 10^{-3} \times 2 + 3.6 \times 10^{3} & \\ 0 & 0 & 3.6 \times 10^{3} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5.22 \times 10^{3} & & \text{Simet} \\ -4.86 \times 10^{3} & 6.84 \times 10^{3} & \\ 0 & 0 & 3.6 \times 10^{3} \end{bmatrix} =$$

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} 5220. & -4860. & 0. \\ -4860. & 6840. & 0. \\ 0 & 0 & 3600. \end{bmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} (5220-\sigma) & -4860 & 0 \\ -4860. & (6840-\sigma) & 0 \\ 0 & 0 & (3600-\sigma) \end{pmatrix} = 0$$

$\sigma_1 = 3600.$

$$(5220-\sigma)(6840-\sigma) - 4860^2 = 0$$

$$\sigma^2 - \cancel{2\times}(5220+6840)\sigma + (5220\times 6840 - 4860^2) = 0$$

$$\sigma^2 - 12060\,\sigma + 12085200 = 0$$

$$\sigma_{1,3} = \frac{12060 \pm \sqrt{12060^2 - 4\times 12085200}}{2} =$$

$$= \frac{12060 \pm 9854{,}1}{2} \begin{cases} 10957. \\ 1102{,}9 \end{cases}$$

Ordenado:

$\sigma_1 = 10957 \ kg/cm^2$

$\sigma_2 = 3600 \ kg/cm^2$

$\sigma_3 = 1102{,}9 \ kg/cm^2$