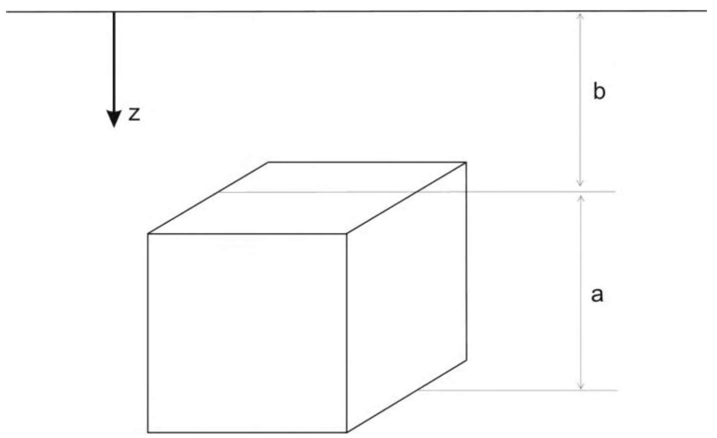
Universidad Nacional del Litoral

Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas

Examen Parcial 24/06/2014

1. Sea un cubo de lado a sumergido en un líquido de densidad ρ a una profundidad b (ver figura).
    a. Sabiendo que el fluido está en reposo, y que su presión es igual a ρz, determinar la **fuerza total** que ejerce el fluido sobre el cuerpo, como suma de las fuerzas que ejerce sobre cada una de las caras.



    b. Cuál sería la fuerza total que ejerce el fluido sobre el cuerpo, si el cuerpo se encontrara a una profundidad $2b$?
    c. Mostrar que el torque total que ejercen las fuerzas de presión sobre el cuerpo es nulo.

2. Mostrar, usando notación indicial, que

$$\nabla \bullet \nabla \left(\|\mathbf{x}\| \right) = \frac{2}{\|\mathbf{x}\|}$$

3. Sea V el volumen encerrado por una superficie S de normal saliente unitaria n, y sean $\phi = \phi(x_1, x_2, x_3)$ y $\psi = \psi(x_1, x_2, x_3)$ funciones escalares de las coordenadas x_i. Usando el teorema de Green, demostrar:

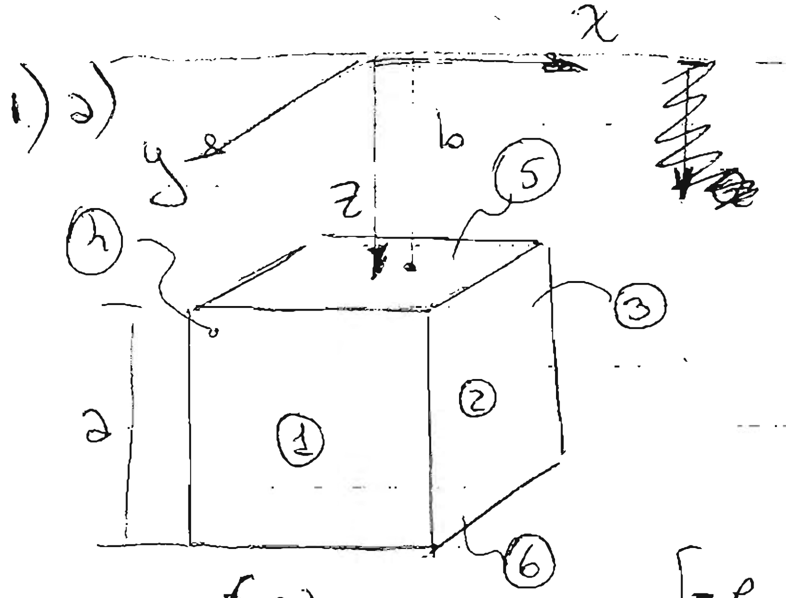
$$\int_S (\phi\nabla\psi - \psi\nabla\phi) \cdot \boldsymbol{n}\ dS = \int_V (\phi\Delta\psi - \psi\Delta\phi)\ dV$$

donde $\Delta\psi = \psi_{,ii}$ es el laplaciano de la función ψ.

4. La formulación general de una deformación llamada "homogénea" está dada por el campo de desplazamientos $u_i = A_{ij} X_j$, donde los A_{ij} son constantes (o bien funciones del tiempo, pero independientes de la posición X_j). Mostrar que esta deformación es tal que toda línea recta permanece recta después de la deformación.

    Sugerencia: aplique la transformación a puntos pertenecientes a una recta arbitraria $a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3 = b$ y verifique que luego de la deformación se encuentran alineados sobre una línea recta. (Notar que como consecuencia, toda sección plana permanece plana después de la deformación).

1) a)



$$p = \rho g z$$

$$\underline{n}_1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad \underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\rho g z & 0 & 0 \\ 0 & -\rho g z & 0 \\ 0 & 0 & -\rho g z \end{bmatrix}$$

Fuerza total sobre cara 1:

$$\underline{F}_1 = \int_{-a/2}^{a/2} \int_{b}^{b+a} \begin{bmatrix} -\rho g z & 0 & 0 \\ 0 & -\rho g z & 0 \\ 0 & 0 & -\rho g z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} dz\, dx =$$

$$= \int_{-a/2}^{a/2} \int_{b}^{b+a} \begin{Bmatrix} 0 \\ -\rho g z \\ 0 \end{Bmatrix} dz\, dx =$$

$$= \int_{-a/2}^{a/2} \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{\rho g}{2} \underbrace{\left[(b+a)^2 - b^2 \right]}_{2ab + a^2} \\ \end{Bmatrix} dx = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\rho g a^2 \left[b + a/2 \right] \\ 0 \end{Bmatrix}$$

De manera similar:

$$\underline{F}_2 = \begin{Bmatrix} -\rho g a^2 \left[b + a/2 \right] \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad \underline{F}_3 = \begin{Bmatrix} 0 \\ \rho g a^2 \left[b + a/2 \right] \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\underline{F}_4 = \begin{pmatrix} \rho g a^2 [b + a/2] \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Fuerza total sobre la cara 5:

$$\underline{n}_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{F}_5 = \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-a/2}^{a/2} \begin{bmatrix} -\rho g b & 0 & 0 \\ 0 & -\rho g b & 0 \\ 0 & 0 & -\rho g b \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} dx\, dy =$$

$$\underline{F}_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \rho g b a^2 \end{pmatrix}$$

Fuerza total sobre la cara 6:

$$\underline{n}_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{F}_6 = \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-a/2}^{a/2} \begin{bmatrix} -\rho g (b+a) & & \\ & -\rho g (b+a) & \\ & & -\rho g (b+a) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} dx\, dy =$$

$$\underline{F}_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\rho g (b+a) a^2 \end{pmatrix}$$

La fuerza total sobre el cuerpo:

$$\underline{F}_T = \underline{F}_1 + \underline{F}_2 + \underline{F}_3 + \underline{F}_4 + \underline{F}_5 + \underline{F}_6 =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ \cancel{-\rho g a^2 [b + a/2]} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cancel{-\rho g a^2 [b + a/2]} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \cancel{\rho g a^2 [b + a/2]} \\ 0 \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} \cancel{\rho g a^2 [b + a/2]} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \rho g b a^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\rho g (b+a) a^2 \end{pmatrix} =$$

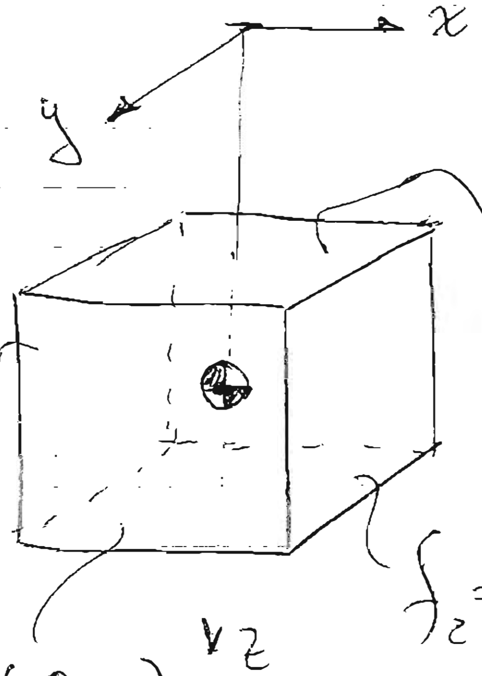
$$\underline{F}_T = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\rho g a^3 \end{pmatrix}$$

Notar que la fuerza total que ejerce el fluido sobre el cuerpo es igual al peso del volumen de agua desalojado, y está dirigida hacia arriba (Principio de Arquímedes).

b) A partir del resultado anterior, vemos que la fuerza total sobre el cuerpo no depende de b. Luego, si cambia b por 2b, la fuerza sigue siendo la misma:

$$\underline{F}_T = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\rho g a^3 \end{pmatrix}$$

(c)



$$\underline{CG} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b + a/2 \end{pmatrix}$$

$$\underline{f}_4 = \begin{pmatrix} \rho g z \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \underline{f}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ \rho g z \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \underline{f}_2 = \begin{pmatrix} -\rho g z \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \underline{f}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\rho g z \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{m}_1 = \int_{-a/2}^{a/2} \int_b^{b+a} \begin{pmatrix} x \\ a/2 \\ (z-b-a/2) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -\rho g z \\ 0 \end{pmatrix} dz\, dx =$$

$$= -\underline{m}_3 = -\int_{-a/2}^{a/2} \int_b^{b+a} \begin{pmatrix} x \\ -a/2 \\ (z-b-a/2) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ \rho g z \\ 0 \end{pmatrix} dz\, dx$$

$\therefore$ $\underline{m}_1 + \underline{m}_3 = \underline{0}$

Similarmente $\underline{m}_2 + \underline{m}_4 = 0$

Además

$$\underline{f}_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \rho g b \end{pmatrix} \quad y \quad \underline{f}_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\rho g b \end{pmatrix}$$

$$\underline{m}_5 = \int_{-a/2}^{a/2}\int_{-a/2}^{a/2} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ -a/2 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \rho g b \end{Bmatrix} dx\,dy = -\underline{m}_6 =$$

$$= -\int_{-a/2}^{a/2}\int_{-a/2}^{a/2} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ a/2 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\rho g b \end{Bmatrix} dx\,dy$$

$$\therefore \quad \underline{m}_5 + \underline{m}_6 = \underline{0}$$

$$\therefore \quad \underline{M}_T = \underline{m}_1 + \underline{m}_2 + \underline{m}_3 + \underline{m}_4 + \underline{m}_5 + \underline{m}_6 = \underline{0}$$

2)

$$\underline{\nabla}\circ\underline{\nabla}\left(\|\underline{x}\|\right) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sqrt{x_j x_j}\right)\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{2\sqrt{x_{\cancel{j}k} x_{\cancel{j}k}}}\left[x_j \frac{\partial x_j}{\partial x_i} + \frac{\partial x_j}{\partial x_i} x_j\right]\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{2\sqrt{x_k x_k}}\left[x_j \delta_{ji} + \delta_{ji} x_j\right]\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{x_i}{\sqrt{x_k x_k}}\right) =$$

$$= \frac{\partial x_i}{\partial x_i}\frac{1}{\sqrt{x_k x_k}} + x_i\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{(x_k x_k)^{3/2}}\cdot$$

$$\cdot\left(x_j \frac{\partial x_j}{\partial x_i} + \frac{\partial x_j}{\partial x_i} x_j\right) =$$

$$= \delta_{ii}\frac{1}{\sqrt{x_k x_k}} \cancel{+} - \frac{x_i}{\cancel{2}(x_k x_k)^{3/2}}\cancel{2} x_i =$$

$$= \frac{3}{\sqrt{x_k x_k}} - \frac{1}{\sqrt{x_k x_k}} = \frac{2}{\sqrt{x_k x_k}} = \frac{2}{\|\underline{x}\|}$$

$\boxed{\text{QED}}$

3)

$$\int_S (\phi \underline{\nabla} \psi - \psi \underline{\nabla} \phi) \circ \underline{n} \, dS =$$

Green

$$= \int_S (\phi \psi_{,i} - \psi \phi_{,i}) \, n_i \, dS =$$

$$= \int_V (\phi \psi_{,i} - \psi \phi_{,i})_{,i} \, dV =$$

$$= \int_V (\cancel{\phi_{,i} \psi_{,i}} + \phi \psi_{,ii} - \cancel{\psi_{,i} \phi_{,i}} - \psi \phi_{,ii}) \, dV$$

$$= \int_V (\phi \Delta \psi - \psi \Delta \phi) \, dV$$

QED

3) $a_i X_i = b$ $\quad (*)$

Sea el desplazamiento $u_i = A_{ij} X_j$ $\quad (**)$

Los puntos X_i pasan a ocupar una posición:

$$Y_i = X_i + u_i = (\delta_{ij} + A_{ij}) X_j$$

Matricialmente

$$\underline{Y} = (\underline{\underline{I}} + \underline{\underline{A}})\, \underline{X} \implies \underline{X} = (\underline{\underline{I}} + \underline{\underline{A}})^{-1}\, \underline{Y}$$

Como los puntos $\underline{X}$ se encuentran alineados sobre una recta y verifican $(*)$:

$$b = \underline{a}^T \underline{X} = \underbrace{\underline{a}^T (\underline{\underline{I}} + \underline{\underline{A}})^{-1}}_{\underline{c}^T} \underline{Y}$$

Definiendo

$$\underline{c} = (\underline{\underline{I}} + \underline{\underline{A}})^{-T}\, \underline{a} \qquad (\text{cte})$$

Los puntos $\underline{Y}$ verifican:

$$\underline{c}^T \underline{Y} = c_i Y_i = b$$

o sea que los puntos obtenidos bajo desplazamiento $(*)$ verifican la ecuación de una recta.

O sea $(**)$ transforma rectas en rectas.