Universidad Nacional del Litoral
FACULTAD DE INGENIERÍA
Y CIENCIAS HÍDRICAS

Departamento de Informática

Mecánica del Continuo

Examen Parcial – 15/5/15

Apellido y nombre:

DNI:

1.

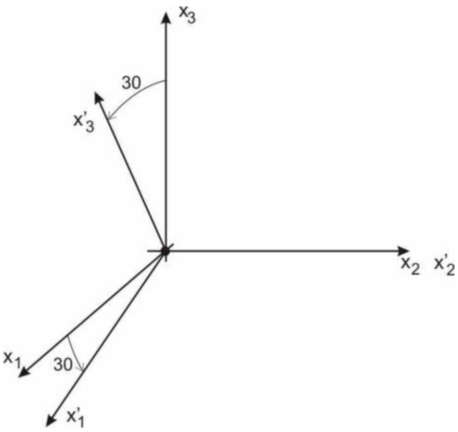
a. Hallar los valores principales y direcciones principales correspondientes para el tensor $\mathbf{T}$ cuyas componentes, en el sistema coordenado Cartesiano de referencia, son:

$$T_{ij} = \begin{pmatrix} 21 & 0 & -12 \\ 0 & 20 & 0 \\ -12 & 0 & 14 \end{pmatrix}$$

b. Verificar que todas las direcciones principales son mutuamente ortogonales.

c. Dar la matriz de rotación de ejes que llevaría la matriz de componentes de $\mathbf{T}$ a tener forma diagonal. Justificar.

d. Cuáles son los valores principales del tensor $\mathbf{T}$ cuando sus componentes se expresan en el sistema coordenado $\{O; x'_1, x'_2, x'_3\}$ de la figura? Justificar.



2. Mostrar, usando álgebra indicial, que

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{v}) = \nabla (\nabla \bullet \mathbf{v}) - \nabla \bullet (\nabla \mathbf{v})$$

donde:

$$\nabla \times \mathbf{v} \to e_{ijk} \frac{\partial v_k}{\partial x_j}$$

$$\nabla \bullet \mathbf{v} \to \frac{\partial v_k}{\partial x_k}$$

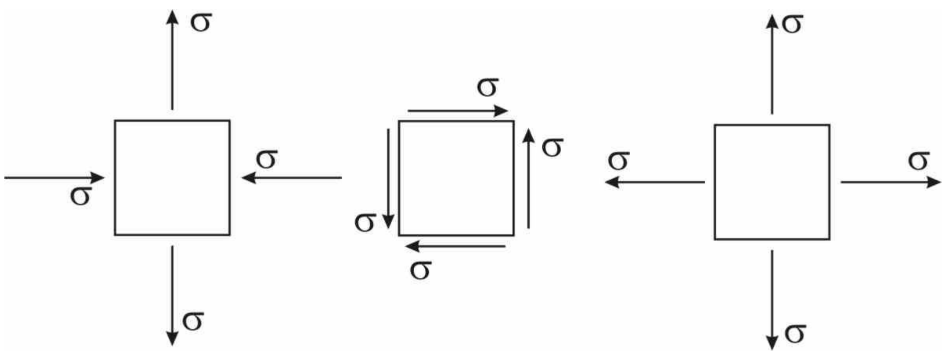
$$\nabla \bullet (\nabla \mathbf{v}) \to \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial v_k}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_j \partial x_j}$$

3. Sea un cuerpo para el cual el estado de tensiones en un punto P tiene componentes, en algún sistema coordenado, dadas por

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

donde σ_{11} es desconocido. Determinar la dirección $\mathbf{n}$ para la cual el vector de tensiones $\overset{\mathbf{n}}{\mathbf{T}}$ actuando en P sobre un plano perpendicular a $\mathbf{n}$, es nulo (o sea, $\overset{\mathbf{n}}{\mathbf{T}} = \mathbf{0}$). Determinar además el valor que debe tener σ_{11} para que esta condición pueda verificarse.

4. Sea un cubo orientado según los ejes coordenados, sometido a los estados de tensiones graficados abajo.



Para cada uno de los casos indicados,

a. Graficar el círculo de Mohr correspondiente.
b. Calcular las tensiones principales.

1) a)

$$T_{ij} = \begin{pmatrix} 21 & 0 & -12 \\ 0 & 20 & 0 \\ -12 & 0 & 14 \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} (21-\lambda) & 0 & -12 \\ 0 & (20-\lambda) & 0 \\ -12 & 0 & (14-\lambda) \end{pmatrix} = 0$$

$$(20-\lambda)\left[(21-\lambda)(14-\lambda) - 12^2\right] = 0$$

$$(20-\lambda)\left[294 - 35\lambda + \lambda^2 - 144\right] = 0 \qquad \lambda = 20$$

$$\lambda^2 - 35\lambda + 150 = 0$$

$$\frac{35 \pm \sqrt{35^2 - 4\times 150}}{2} = \frac{35 \pm 25}{2} = \begin{cases} 5 \\ 30 \end{cases}$$

$\lambda_1 = 5$
$\lambda_2 = 20$
$\lambda_3 = 30$

$$\begin{pmatrix} 16 & 0 & -12 \\ 0 & 15 & 0 \\ -12 & 0 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1^1 \\ V_2^1 \\ V_3^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow V_2^1 = 0$$

$$16 V_1^1 - 12 V_3^1 = 0 \Rightarrow V_3^1 = 1$$

$$-12 V_1^1 + 9 V_3^1 = 0 \qquad V_1^1 = \frac{3}{4}$$

$$\underline{V}^{1*} = \begin{pmatrix} 3/4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \|\underline{V}^{1*}\| = 1.25 \qquad \underline{V}^1 = \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0 \\ 0.8 \end{pmatrix}$$

(2)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & 0 \\ -12 & 0 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1^2 \\ V_2^2 \\ V_3^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{V}^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -9 & 0 & -12 \\ 0 & -10 & 0 \\ -12 & 0 & -16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1^3 \\ V_2^3 \\ V_3^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$V_2^3 = 0$$

$$\begin{cases} -9 V_1^3 - 12 V_3^3 = 0 \\ -12 V_1^3 - 16 V_3^3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} V_1^3 = 1 \\ V_3^3 = -3/4 \end{array}$$

$$\underline{V}^{3*} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3/4 \end{pmatrix} \qquad \|\underline{V}^{3*}\| = 1.25 \qquad \underline{V}^3 = \begin{pmatrix} 0.8 \\ 0 \\ -0.6 \end{pmatrix}$$

$$(\lambda_1, \underline{V}^1) = \left(5, \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0 \\ 0.8 \end{pmatrix}\right) \qquad (\lambda_2, \underline{V}^2) = \left(20, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

$$(\lambda_3, \underline{V}^3) = \left(30, \begin{pmatrix} 0.8 \\ 0 \\ -0.6 \end{pmatrix}\right)$$

b)

$$\underline{v}^1 \circ \underline{v}^2 = \lfloor 0.6 \quad 0 \quad 0.8 \rfloor \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} = 0$$

$$\underline{v}^2 \circ \underline{v}^3 = \lfloor 0 \quad 1 \quad 0 \rfloor \begin{Bmatrix} 0.8 \\ 0 \\ -0.6 \end{Bmatrix} = 0$$

$$\underline{v}^1 \circ \underline{v}^3 = \lfloor 0.6 \quad 0 \quad 0.8 \rfloor \begin{Bmatrix} 0.8 \\ 0 \\ -0.6 \end{Bmatrix} = 0$$

c) El prob de autovalores se escribe:

$$T_{ij}\, v_j^k = v_i^k \lambda_k \qquad k = 1, \dots 3$$

Para los 3 autov:

$$T_{ij} \underbrace{\left[v_j^1 \; v_j^2 \; v_j^3 \right]}_{V_{jk}} = \underbrace{\left[v_i^1 \; v_i^2 \; v_i^3 \right]}_{V_{il}} \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}}_{\Lambda_{lk}}$$

$$T_{ij} V_{jk} = V_{il} \Lambda_{lk}$$

Premultiplicando x V_{im} :

$$V_{im} T_{ij} V_{jk} = \underbrace{V_{im} V_{il}}_{\delta_{ml}} \Lambda_{lk} = \Lambda_{mk}$$

(autovectores normalizados)

O sea, que haciendo un cambio de coordenadas al sistema dado por $\beta_{mi} = V_{im} = \{ v_i^m \}$

el tensor $\underline{\underline{I}}$ tiene forma diagonal.

<u>Verificación</u>:

$$\underline{\underline{\beta}} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0 & 0.8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0.8 & 0 & -0.6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc|ccc|ccc}
 & & & 21 & 0 & -12 & 0.6 & 0 & 0.8 \\
 & & & 0 & 20 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 & & & -12 & 0 & 14 & 0.8 & 0 & -0.6 \\
\hline
0.6 & 0 & 0.8 & 3 & 0 & 4 & 5 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 20 & 0 & 0 & 20 & 0 \\
0.8 & 0 & -0.6 & 24 & 0 & -18 & 0 & 0 & 30
\end{array}$$

d) Los autovalores de un tensor son invariantes frente a cambio de sistema coordenado. Luego, para cualquier sistema coordenado, tendremos:

$$\lambda_1 = 5$$
$$\lambda_2 = 20$$
$$\lambda_3 = 30$$

2)

$$\underline{\nabla} \times (\underline{\nabla} \times \underline{v}) = \underline{\nabla}(\underline{\nabla} \circ \underline{v}) - \underline{\nabla} \circ (\underline{\nabla}\,\underline{v})$$

$$\underline{\nabla} \times \underline{v} \Rightarrow e_{ijk} \frac{\partial v_k}{\partial x_j}$$

$$\underline{\nabla} \times (\underline{\nabla} \times \underline{v}) \longrightarrow e_{lmi} \frac{\partial}{\partial x_m}\left(e_{ijk} \frac{\partial v_k}{\partial x_j}\right) =$$

$$= e_{ilm} e_{ijk} \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_m \partial x_j} =$$

$$= (\delta_{lj}\delta_{mk} - \delta_{lk}\delta_{mj}) \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_m \partial x_j} =$$

$$= \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_k \partial x_l} - \frac{\partial^2 v_l}{\partial x_m \partial x_m} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_l}\left(\frac{\partial v_k}{\partial x_k}\right) - \frac{\partial^2 v_l}{\partial x_m \partial x_m} \longrightarrow$$

$$\underline{\nabla}(\underline{\nabla} \circ \underline{v}) - \underline{\nabla} \circ (\underline{\nabla}\,\underline{v})$$

QED

3) $\underline{T}^{n} = \underline{\underline{\sigma}}\,\underline{n} = \underline{0}$

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} n_1^* \\ n_2^* \\ n_3^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \quad \sigma_{11}\, n_1^* + 2\, n_2^* + n_3^* = 0 \qquad (\mathrm{I})$$

$$2\, n_1^* + 2\, n_3^* = 0 \qquad (\mathrm{II})$$

$$n_1^* + 2\, n_2^* = 0 \qquad (\mathrm{III})$$

Haciendo $n_1^* = 1 \Rightarrow n_3^* = -1$ (II)

$n_2^* = -1/2$ (III)

Luego, en (I):

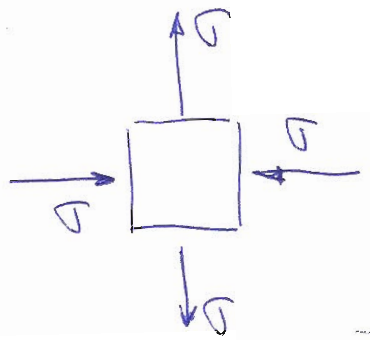
$$\sigma_{11}\, 1 + 2 \times \left(-\tfrac{1}{2}\right) + (-1) = 0$$

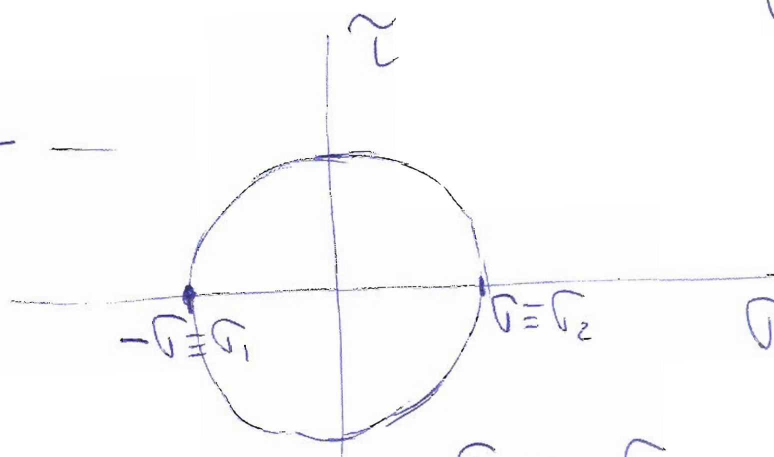
$$\therefore \quad \underline{\sigma_{11} = 2}$$

$$\| \underline{n}^* \| = \sqrt{1 + \tfrac{1}{4} + 1} = \frac{3}{2}$$

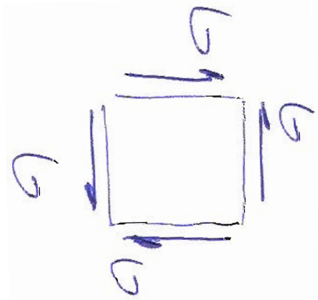
$$\underline{n} = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ -1/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}$$

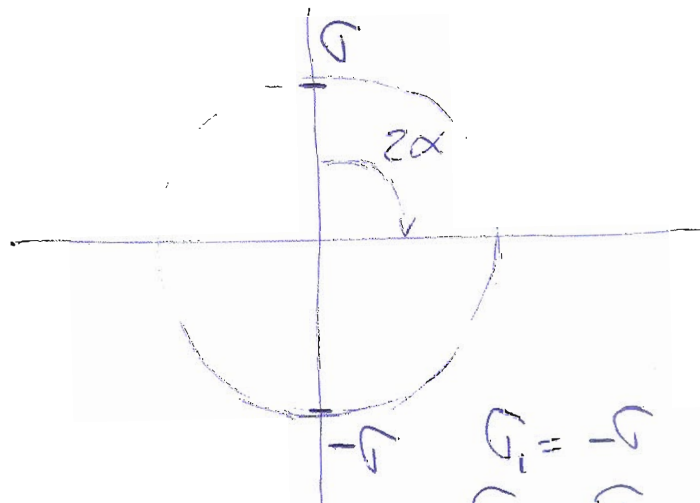
d)



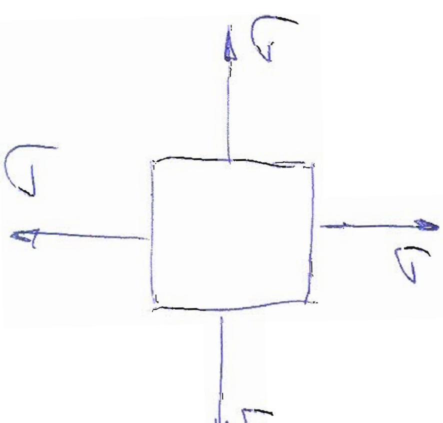


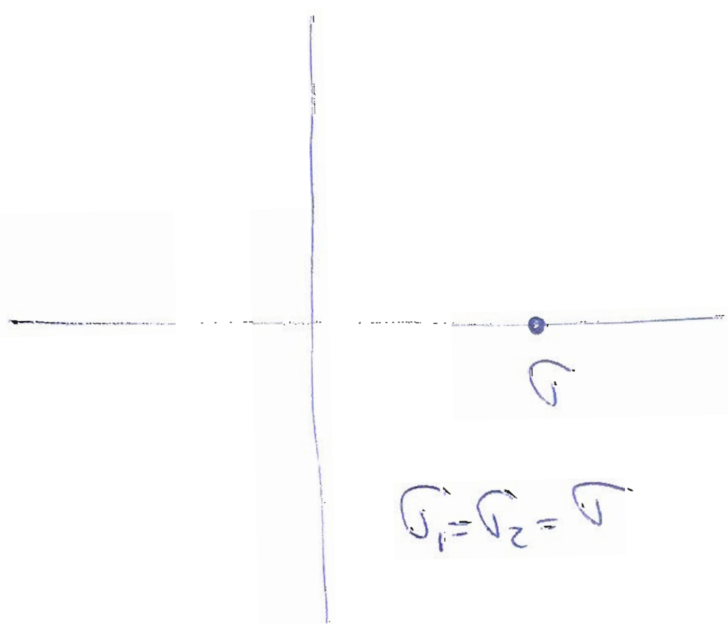
$\sigma_1 = -\sigma$
$\sigma_2 = \sigma$





$\sigma_1 = -\sigma$ $\quad \alpha = 45^\circ$
$\sigma_2 = \sigma$





$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$